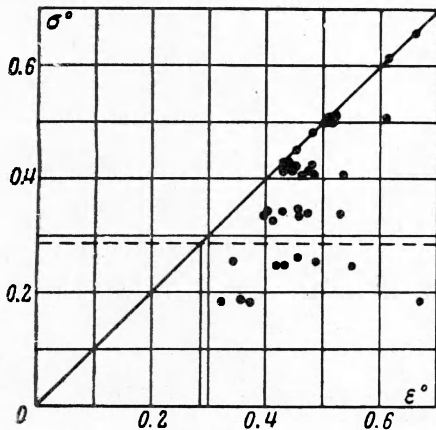
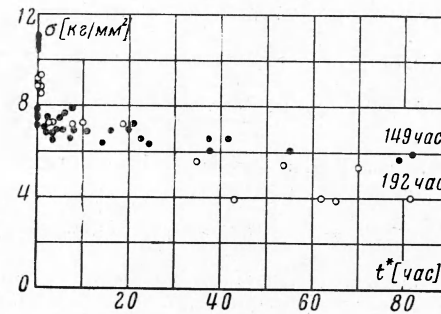


экспериментальных данных увеличивается с уменьшением напряжений, т. е. с увеличением деформации ползучести. Точно такой же вывод о величинах критической деформации оболочки при сжатии в условиях ползучести получен теоретически в работе [3] на основе нелинейных уравнений оболочки, где для ползучести материала принята гипотеза старения.

Сравнение экспериментальных результатов по изгибу и осевому сжатию оболочек, изготовленных из второй партии материала, дано на фиг. 4. По оси абсцисс здесь отложено критическое время  $t^*$ , а по оси ординат — среднее напряжение при осевом сжатии или максимальное сжимающее напряжение в начальный момент в случае изгиба.



Фиг. 3



Фиг. 4

Из фиг. 4 следует, что в области низких уровней напряжения наименьшие значения критического времени получаются при продольном сжатии. Таким образом, оценка критического времени потери устойчивости оболочек в условиях ползучести, полученная по величине упругой деформации, соответствующей нижнему критическому напряжению сжатия  $\sigma^{**}$ , дает гарантированное нижнее значение критического времени и для сжатия и для изгиба.

Поступила 17 XI 1964

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Справочник по авиационным материалам, т. II. Оборонгиз, 1958.
2. В о л ь м и р А. С. Устойчивость упругих систем. Физматгиз, 1963.
3. К у з н е ц о в А. П., К у р ш и н Л. М. К расчету на устойчивость оболочек в условиях ползучести по теории старения. Сб. «Проблемы устойчивости в строительной механике». Изд. литер. по строительству, М., 1965.

#### О ТЕЧЕНИИ ВЯЗКО-ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ В ТРУБАХ НЕКРУГОВОГО СЕЧЕНИЯ

В. Б. Белозеров, В. А. Знаменский, А. Т. Листров

(Воронеж)

Движение вязко-пластической среды при постоянном перепаде давления в трубах круглого и кольцевого сечения рассмотрено в работах [1-4].

В настоящей работе методом малого параметра исследуется установившееся течение вязко-пластической среды в трубах некругового сечения.

1. Пусть в бесконечно длинной трубе эллиптического сечения

$$\frac{x^2}{b^2(1+\delta)^2} + \frac{y^2}{b^2(1-\delta)^2} = 1 \quad (\delta < 1)$$

где  $\delta$  — безразмерный параметр; в направлении положительной оси  $z$  осуществляется течение вязко-пластического материала под действием постоянного градиента давления  $q^2 = -dp/dz$ .

Обозначим через  $\mu$  коэффициент вязкости,  $k$  — предел текучести,  $S$  — площадь, а  $L$  — периметр поперечного сечения ядра.

Предполагая течение прямолинейным, имеем в цилиндрической системе координат [2]

$$\left(\mu + \frac{\tau_0}{h}\right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r}\right) - \frac{\tau_0}{h^2} \left(\frac{\partial h}{\partial r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial h}{\partial \varphi} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right) = -q^2$$

$$h = \left[\left(\frac{\partial w}{\partial r}\right)^2 + \left(\frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial \varphi}\right)^2\right]^{1/2} \quad (1.1)$$

Здесь  $w(r, \varphi)$  — скорость,  $\tau_0$  — предельное напряжение сдвига.

Для определения  $w(r, \varphi)$ , неизвестной границы  $r_s = r_s(\varphi)$  жесткого ядра и его скорости  $v = \text{const}$  необходимо решить уравнение (1.1) при условиях

$$\frac{\partial w}{\partial n} = 0, \quad q^2 S = kL, \quad v = w \quad \text{при } r = r_s \quad (1.2)$$

Здесь  $n$  — нормаль к границе ядра. На поверхности трубы принимаем условие  $w = 0$ .

Будем искать решение в форме разложений по малому параметру

$$w = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n w^{(n)}, \quad v = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n v^{(n)}, \quad r_s = \sum_{n=0}^{\infty} \delta^n r_s^{(n)} \quad (1.3)$$

В качестве нулевого приближения возьмем решение [2] для течения в трубе круглого сечения радиуса  $b$

$$w^0 = \frac{1}{2b} (b^2 - r^2) - \frac{1}{b} (b - r), \quad r_s^0 = 1, \quad v^0 = \frac{(b-1)^2}{2b} (1 \leq r \leq b) \quad (1.4)$$

Здесь и далее, сохранив прежние обозначения, отнесем скорости  $w^{(n)}$ ,  $v^{(n)}$  к величине  $kb/\mu$ , полярный радиус  $r$  и все линейные размеры — к величине  $2k/q^2$ , напряжение  $\tau_0$  — к величине  $k$ .

Уравнение контура сечения трубы представим в цилиндрических координатах в форме ряда

$$r = b + \delta b \cos 2\varphi - \frac{3}{4} \delta^2 b (1 - \cos 4\varphi) + \dots \quad (1.5)$$

Линеаризуя (1.4), (1.2) по малому параметру  $\delta$  с учетом (1.3) — (1.5), получим уравнения первого приближения в виде

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{1}{r(r-1)} \frac{\partial^2 w'}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (1.6)$$

$$r_s' = b \frac{\partial w'}{\partial r} \Big|_{r=1}, \quad v' = w' \Big|_{r=1}, \quad \int_0^{2\pi} r_s' d\varphi = 0, \quad \frac{\partial w'}{\partial \varphi} \Big|_{r=1} = 0, \quad w' \Big|_{r=b} = (b-1) \cos 2\varphi$$

Представляя решение уравнения (1.6) в форме  $w' = R(r) \Phi(\varphi)$ , получаем

$$w' = C_0 \ln r + D_0 [C_1 f_1(r) + D_1 f_2(r)] \cos 2\varphi \quad (C_0, D_0, C_1, D_1 = \text{const})$$

где

$$f_1(r) = r^2 - \frac{4}{3}r + \frac{1}{3}, \quad f_2(r) = \left[9 \ln r - 20.25 \frac{1}{3r-1} - 9 \ln(r-1) - \frac{2.25}{r-1}\right] \times \\ \times (r-1) \left(r - \frac{1}{3}\right)$$

— решения гипергеометрического уравнения

$$r(r-1) \frac{d^2 R}{dr^2} + (r-1) \frac{dR}{dr} - 4R = 0$$

Из граничных условий (1.6) получаем  $D_0 = 0$ ,  $C_0 = 0$ ,  $D_1 = 0$ ,  $C_1 = 3/(3b-1)$ . Таким образом, окончательно находим

$$w' = \frac{3r^2 - 4r + 1}{3b-1} \cos 2\varphi, \quad r_s' = \frac{2b}{3b-1} \cos 2\varphi, \quad v' = 0 \quad (1.7)$$

Уравнения задачи второго приближения имеют вид

$$\frac{\partial^2 w''}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w''}{\partial r} + \frac{1}{r(r-1)} \frac{\partial^2 w''}{\partial \varphi^2} = \Psi(r) + \Theta(r) \cos 4\varphi$$

$$\int_0^{2\pi} r_s'' d\varphi = \frac{4b^2 \pi}{(3b-1)^2}, \quad w'' \Big|_{r=b} = \frac{19b - 18b^2 - 3}{4(3b-1)} + \frac{3-5b}{4(3b-1)} \cos 4\varphi$$

$$\frac{\partial w''}{\partial \varphi} \Big|_{r=1} = \frac{4b}{(3b-1)^2} \sin 4\varphi \quad (1.8)$$

$$r_s'' = b \frac{\partial w''}{\partial r} \Big|_{r=1} + \frac{12b}{(3b-1)^2} \cos^2 2\varphi, \quad v'' = w''|_{r=1} + \frac{b}{(3b-1)^2} (1 + \cos 4\varphi)$$

$$\Psi(r) = \frac{b(1-9r^2)}{r^3(3b-1)^2}, \quad \Theta(r) = \frac{b(3r-1)(27r^2-18r-1)}{r^3(r-1)(3b-1)^2}$$

Применяя метод разделения переменных, получаем

$$w'' = R_1(r) + R_2(r) \cos 4\varphi$$

где  $R_1(r)$  и  $R_2(r)$  — общие решения неоднородных уравнений

$$\frac{d^2 R_1}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_1}{dr} = \Psi(r), \quad \frac{d^2 R_2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_2}{dr} - \frac{16}{r(r-1)} R_2 = \Theta(r) \quad (1.9)$$

Общее решение первого из уравнений (1.9) имеет вид

$$R_1 = -\frac{b}{(3b-1)^2} \left( A \ln r + 9r - \frac{1}{r} + B \right) \quad (A, B = \text{const})$$

Второе уравнение (1.9) является гипергеометрическим и имеет решение [5]

$$R_2 = C_2 P(r) + C_3 T(r) + \frac{b}{(3b-1)^2} E(r), \quad (C_2, C_3 = \text{const})$$

$$P(r) = 35r^4 - 80r^3 + 60r^2 - 16r + 1$$

$$T(r) = P(r) \left[ \ln r + \sum_{i=1}^4 F_i \ln(r-a_i) - \sum_{i=1}^4 H_i (r-a_i)^{-1} \right]$$

$$E(r) = P(r) \left[ 32 \ln r - \frac{1}{r} + \sum_{i=1}^4 S_i \ln(r-a_i) - \sum_{i=1}^4 M_i (r-a_i)^{-1} \right]$$

$$a_1 = 1, \quad a_2 = 0.78775, \quad a_3 = 0.08870, \quad a_4 = 0.40926$$

$$F_1 = -1, \quad F_2 = 0.002646, \quad F_3 = 0.0049553, \quad F_4 = -0.0052577$$

$$H_1 = 0.0625, \quad H_2 = 0.32857, \quad H_3 = 0.22074, \quad H_4 = 0.38794$$

$$S_1 = -32, \quad S_2 = 0.10536, \quad S_3 = 0.1828, \quad S_4 = -0.16707$$

$$M_1 = 2.25, \quad M_2 = 10.44778, \quad M_3 = 6.17281, \quad M_4 = 12.11781$$

Используя граничные условия (1.8), окончательно находим

$$w'' = -\frac{b}{(3b-1)^2} \left[ A \ln r + 9r - \frac{1}{r} + B \right] + \left[ C_2 P(r) + C_3 T(r) + \frac{bE(r)}{(3b-1)^2} \right] \cos 4\varphi$$

$$A = -6, \quad B = \frac{-342b^3 + 271b^2 - 63b + 4 - 24b^2(3b-1) \ln b}{4b(3b-1)^2} \quad (1.10)$$

$$C_3 = -\frac{32b}{(3b-1)^2}, \quad C_2 = \frac{(14b - 15b^2 - 3) + 128bT(b) - 4bE(b)}{4(3b-1)^2 P(b)}$$

Из (1.10), (1.8) легко найти  $r_s''$ ,  $v''$ , выражения которых из-за их громоздкости опустим.

Отметим, что из условия существования течения в трубе эллиптического сечения  $q^2 S_* \geq kL_*$ , где  $S_*$  — площадь,  $L_*$  — периметр эллиптического сечения трубы, вытекает, что  $b \geq 1 + 1.25\delta^2$ . При  $b < 1 + 1.25\delta^2$  перепада давления  $q^2$  недостаточно для возникновения течения.

На фиг. 1 приведены контуры трубы, границы жесткого ядра и эпюры скоростей в первом и втором приближениях для случая  $b = 2$ ,  $\delta = 0.25$ . Пунктирными линиями показаны контуры ядра и сечения трубы в первом и втором приближениях. Эпюра скоростей нулевого приближения совпадает с эпюрой скоростей первого приближения при  $\varphi = 45^\circ$ .

Размеры эпюр скоростей увеличены на фиг. 1 в пять раз.

2. Рассмотрим теперь установившееся течение вязко-пластической среды в пространстве между двумя соосными трубами эллиптического сечения. Пусть оси эллиптических контуров  $L_0$  и  $L_3$  поперечных сечений внутренней и внешней труб составляют угол  $\varphi_0$  (фиг. 2). Предполагаем, что среда под действием постоянного градиента давления  $q^2 = -\partial p / \partial z$  течет со скоростью  $w(r, \varphi)$  в положительном направлении оси  $z$ . Обозначим через  $L_0, L_3$  — периметры сечений внутренней и внешней труб, через  $L_1, L_2$  — периметры внутренней и внешней границ жесткого ядра, через  $S$  — площадь поперечного сечения ядра.

Для определения  $w(r, \varphi)$ , уравнений  $r_1(\varphi), r_2(\varphi)$  — границ  $L_1$  и  $L_2$  ядра и его скорости  $v$  имеем уравнение (1.1) и соотношения (2.1)

$$q^2 S = k(L_1 + L_2), \quad w(r_1, \varphi) = w(r_2, \varphi) = v, \quad \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{L_1} = \frac{\partial w}{\partial n} \Big|_{L_2} = 0, \quad w|_{L_1} = w|_{L_2} = 0$$

В качестве малого параметра возьмем безразмерную величину  $\delta < 1$ , характеризующую эллиптичность контуров  $L_0$  и  $L_3$ . Представляя искомые величины  $w, r_1,$

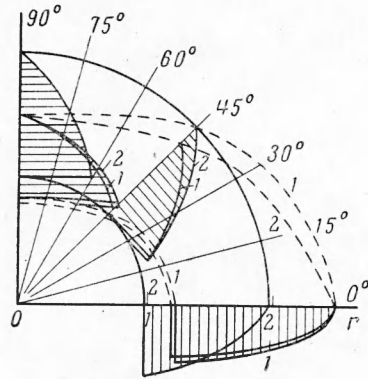
$r_2$ ,  $v$  в форме рядов (1.3), ограничимся членами порядка  $\delta$

$$w = w^\circ + \delta w', \quad r_1 = r_1^\circ + \delta r_1', \quad r_2 = r_2^\circ + \delta r_2', \quad v = v^\circ + \delta v' \quad (2.2)$$

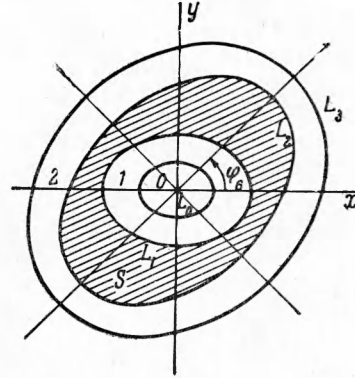
Уравнения границ  $L_0$  и  $L_3$  запишем соответственно в виде

$$r_0 = a (1 + \delta d_0 \cos 2\varphi), \quad r_3 = b [1 + \delta d_3 \cos 2(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.3)$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы окружностей, в которые преобразуются эллипсы  $L_0$  и  $L_3$  при  $\delta = 0$ , величины  $d_0$  и  $d_3$  — безразмерные коэффициенты.



Фиг. 1



Фиг. 2

Сохраняя прежние обозначения, перейдем к безразмерным переменным, отнеся  $w^\circ, w', v^\circ, v'$  к величине  $2k^2/q^2\mu$ , напряжение  $\tau_0$  — к величине  $k$ , полярный радиус  $r$ ,  $a$  и  $b$  — к величине  $2k/q^2$ .

Решение задачи нулевого приближения [3] запишем в виде

$$w^\circ = \frac{a^2 - r^2}{2} + a - r + r_1^\circ (r_1^\circ + 1) \ln \frac{r}{a} \quad (a \leq r \leq r_1^\circ) \quad (2.4)$$

$$w^\circ = \frac{b^2 - r^2}{2} - b + r + r_2^\circ (r_2^\circ - 1) \ln \frac{r}{b} \quad (r_2^\circ \leq r \leq b)$$

где радиусы  $r_1^\circ, r_2^\circ$  внутренней и внешней границ жесткого ядра связаны соотношениями

$$r_2^\circ = r_1^\circ + 1, \quad \frac{a^2 - r_1^{\circ 2}}{2} + a - r_1^\circ + r_1^\circ (r_1^\circ + 1) \ln \frac{r_1^\circ}{a} =$$

$$= \frac{b^2 - r_2^{\circ 2}}{2} - b + r_2^\circ + r_2^\circ (r_2^\circ - 1) \ln \frac{r_2^\circ}{b}$$

Отметим, что  $v^\circ = w^\circ(r_1^\circ) = w^\circ(r_2^\circ)$ .

Линеаризуя уравнение (1.4), (2.1) с учетом (2.2) — (2.4), получим уравнения для определения компонент первого приближения.

Для области 1, примыкающей к границе внутренней трубы (фиг. 2), имеем

$$w'(a, \varphi) = - \frac{dw^\circ}{dr} \Big|_{r=a} - a d_0 \cos 2\varphi, \quad r_1' = - \left[ \frac{\partial w'}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial r^2} \right)^{-1} \right]_{r=r_1^\circ}, \quad \frac{\partial w'}{\partial \varphi} \Big|_{r=r_1^\circ} = 0 \quad (2.5)$$

Для области 2 аналогичные соотношения имеют вид

$$w'(b, \varphi) = - \frac{dw^\circ}{dr} \Big|_{r=b} - b d_3 \cos 2(\varphi - \varphi_0), \quad r_2' = - \left[ \frac{\partial w'}{\partial r} \left( \frac{\partial^2 w^\circ}{\partial r^2} \right)^{-1} \right]_{r=r_2^\circ}, \quad \frac{\partial w'}{\partial \varphi} \Big|_{r=r_2^\circ} = 0$$

Для  $w'$  получаем уравнения

$$\frac{\partial^2 w'}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w'}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \left( \frac{A - r^2}{A - r^2 \pm r} \right) \frac{\partial^2 w'}{\partial \varphi^2} = 0 \quad (A = r_1^\circ (r_1^\circ + 1)) \quad (2.7)$$

Здесь знак минус соответствует области 1, знак плюс — области 2.

Линеаризованные кинематические и динамические условия движения ядра как жесткого целого принимают вид

$$w'(r_1^\circ, \varphi) = w'(r_2^\circ, \varphi) = v, \quad \int_0^{2\pi} (r_2' - r_1') d\varphi = 0 \quad (2.8)$$

Решения уравнений (2.6), которые в дальнейшем будем обозначать  $w_1'$  и  $w_2'$ , ищем в виде

$$w_1' = C_0 + E_0 \ln r + \sum_{\lambda=1}^{\infty} R_{\lambda}(r) [C_{\lambda} \cos \lambda \varphi + E_{\lambda} \sin \lambda \varphi]$$

$$w_2' = D_0 + F_0 \ln r + \sum_{m=1}^{\infty} T_m(r) [D_m \cos m(\varphi - \varphi_0) + F_m \sin m(\varphi - \varphi_0)] \quad (2.9)$$

где  $C_0, D_0, E_0, C_{\lambda}, E_{\lambda}, D_m, F_m$  — произвольные постоянные,  $\lambda, m = 1, 2, 3, \dots$

Из (2.8) получаем уравнения для  $R_{\lambda}$  и  $T_m$

$$\frac{d^2 R_{\lambda}}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR_{\lambda}}{dr} - \frac{\lambda^2}{r^2} \left( \frac{r^2 - A}{r^2 - A + r} \right) R_{\lambda} = 0, \quad \frac{d^2 T_m}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dT_m}{dr} - \frac{m^2 (r^2 - A) T_m}{r^2 (r^2 - A - r)} = 0$$

( $\lambda, m = 1, 2, 3, \dots$ ) (2.10)

Уравнения (2.10) представляют собой уравнения класса Фукса с четырьмя особыми точками [5]. Для уравнений относительно  $R_{\lambda}$  особыми точками являются нуль, бесконечно удаленная точка,  $r_1^{\circ} = -1/2 + (1/4 + A)^{1/2}$ ,  $r_1^{*\circ} = -1/2 - (1/4 + A)^{1/2}$ . Уравнения для  $T_m$ , помимо нуля и бесконечно удаленной точки, имеют особыми точками  $r_2^{\circ} = 1/2 + (1/4 + A)^{1/2}$  и  $r_2^{*\circ} = 1/2 - (1/4 + A)^{1/2}$ .

Отметим, что особые точки  $r_1^{\circ}$  и  $r_2^{\circ}$  уравнений (2.10) расположены соответственно на внутренней и внешней границах ядра в задаче нулевого приближения.

Так как часть граничных условий (2.5), (2.6) для  $w'$  задана при  $r = r_1^{\circ}$  и  $r = r_2^{\circ}$ , то в (2.9) следует использовать решения уравнений (2.10) в окрестностях их особых точек  $r_1^{\circ}$  и  $r_2^{\circ}$ .

Для уравнений (2.10) точки  $r_1^{\circ}$  и  $r_2^{\circ}$  являются слабо особыми, при этом корни определяющих уравнений в каждой из них равны нулю и единице. Поэтому для всякого  $\lambda$  и  $m$  одно из независимых частных решений каждого уравнения (2.10) обращается в нуль в особой точке, а другое, содержащее логарифм, имеет в особой точке отличное от нуля значение [5]. Учитывая это и последние из соотношений в (2.5) и (2.6), находим, что в (2.10) можно использовать только те частные решения уравнений (2.10), которые обращаются в нуль в особых точках  $r_1^{\circ}$  и  $r_2^{\circ}$ .

Из условий на границах в (2.5), (2.6) и (2.8) находим, что в (2.9), за исключением  $C_2$  и  $D_2$ , все произвольные постоянные следует положить равными нулю.

Таким образом, решения уравнений (2.7) при граничных условиях (2.5), (2.6) и (2.8) запишутся в виде

$$w_1' = CR(r) \cos 2\varphi, \quad w_2' = DT(r) \cos 2(\varphi - \varphi_0) \quad (2.11)$$

Введем следующее обозначение для разложений:

$$S_{\nu}(r, \alpha) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_{\nu k} (r - r_{\nu}^{\circ})^{k+1} \quad (2.12)$$

Частные решения  $R(r), T(r)$  уравнений (2.10) при  $\lambda = m = 2$ , регулярные в окрестностях особых точек  $r_1^{\circ}$  и  $r_2^{\circ}$ , представим в виде

$$R(r) = (r - r_1^{\circ}) + S_1(r, C), \quad T(r) = (r - r_2^{\circ}) + S_2(r, C) \quad (2.13)$$

коэффициенты которых  $C_{1k}$  и  $C_{2k}$  последовательно определяются из соотношений [5]

$$C_{\nu n} [(1+n)n + a_0(1+n) + b_0] + \sum_{k=1}^n C_{\nu, n-k} [a_{\nu k}(1+n-k) + b_{\nu k}] = 0 \quad (2.14)$$

( $\nu = 1, 2, n = 1, 2, 3, \dots$ )

в которых  $a_{\nu k}, b_{\nu k}$  — коэффициенты разложений

$$\frac{r - r_{\nu}^{\circ}}{r} = a_{\nu 0} + (r - r_{\nu}^{\circ})^{-1} S_{\nu}(r, a), \quad \frac{4(r^2 - r_1^{\circ 2} - r_1^{\circ})(r_1^{\circ} - r)}{r^2(r - r_{\nu}^{\circ})} =$$

$$= b_{\nu 0} + (r - r_{\nu}^{\circ})^{-1} S_{\nu}(r, b) \quad (2.15)$$

( $\nu = 1, 2$ )

Постоянные интегрирования  $C$  и  $D$  в (2.11) имеют вид

$$C = d_0 \frac{a^2 + a - r_1^{\circ 2} - r_1^{\circ}}{a - r_1^{\circ} + S_1(a, C)}, \quad D = d_2 \frac{b^2 - b - r_2^{\circ 2} + r_2^{\circ}}{b - r_2^{\circ} + S_2(b, C)} \quad (2.16)$$

