

ОБ ОБЩЕМ КРИТЕРИИ  
УСТОЙЧИВОСТИ ЛАМИНАРНОГО ТЕЧЕНИЯ В ТРУБАХ

*Р. С. Кузнецкий, М. К. Лихт*

(Харьков)

Возникновение турбулентности связано с возмущениями конечной интенсивности [1]. Можно указать отдельные попытки теоретических построений в этой области, например, [2]. Экспериментально установлена неоднородность ламинарного течения жидкости по сечению трубы в отношении степени его локальной устойчивости<sup>1</sup> [3,4,1]. Этот факт служит исходным для объяснения ряда особенностей перехода к турбулентному течению и в их числе характерной особенностью зависимости коэффициента сопротивления шероховатых труб от числа Рейнольдса при промежуточном режиме [5].

Вводимая в качестве меры устойчивости величина (1.1) и критерий  $q_*$  позволяют получить при этом количественно удовлетворительные результаты.

1. Будем характеризовать степень локальной устойчивости стационарного ламинарного течения жидкости в цилиндрической (в широком смысле) трубе симплексом

$$\frac{\rho v |\nabla_{xy} v|}{|dp/dz|} = \frac{1}{2} q(x, y) \quad (1.1)$$

аналогичным вводимому для плоскопараллельных течений местному числу Рейнольдса [2], пропорциональному поперечному градиенту скорости и обратно пропорциональному вязкости. Здесь  $v$ ,  $p$ ,  $\rho$  — скорость, давление и плотность жидкости;  $x$ ,  $y$  — декартовы координаты в поперечном сечении  $F$  трубы;  $z$  — координата вдоль ее оси. Симплекс (1.1) представляет собой отношение изменений энергии элемента жидкости при малых смещениях в поперечном и продольном направлениях соответственно.

Независимо от степени устойчивости ламинарного течения в целом в  $F$  всегда существует область произвольной малости  $q$ . Поэтому наступления неустойчивости следует ожидать при достаточно больших значениях  $q$ . В соответствии с этим предположим существование такого числа  $q_*$ , что  $q \leq q_*$  во всем  $F$  есть условие устойчивости течения, а наличие в  $F$  областей с  $q > q_*$  — условие неустойчивости, т. е. возможности турбулентного режима.

Приведем (1.1) к критериальному виду. Для Пуазейлева течения

$$\Delta_{xy} v = \frac{1}{\mu} \frac{dp}{dz} = \text{const} < 0, \quad v|_{\Gamma} = 0 \quad (1.2)$$

где  $\mu = \rho \nu$  — динамическая вязкость и  $\Gamma$  — контур сечения  $F$ . Введя безразмерные скорость и координаты ( $s$  — гидравлический радиус трубы)

$$u = \frac{\mu}{|dp/dz| s^2} v, \quad \xi = \frac{x}{s}, \quad \eta = \frac{y}{s} \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Под локальной устойчивостью (неустойчивостью) будем понимать отрицательную (положительную) реакцию течения в данной малой области на вводимые возмущения.

(аналогично для радиус-вектора  $\xi = r/s$  в полярной системе координат и для любой линейной координаты в произвольной системе), будем иметь

$$\Delta_{\xi\eta} u = -i, \quad u|_{\Gamma_{\xi\eta}} = 0 \quad (1.4)$$

Выразив  $q$  через безразмерные переменные и  $R = 2s\langle v \rangle / \nu$ , где угловые скобки означают усреднение по  $F$ , преобразуем (1.1) к виду

$$q = R \frac{u | \nabla_{\xi\eta} u |}{\langle u \rangle} \quad (1.5)$$

Симплекс  $q$  пропорционален числу Рейнольдса и равен нулю на контуре  $\Gamma$  и в точках (или на линиях) экстремумов и стационарности скорости. Следовательно, точка (линия) максимальной неустойчивости, в которой достигается  $\sup \{u | \nabla_{\xi\eta} u|\}$ , всегда находится вне их окрестности.

Потеря ламинарным течением устойчивости и возможность его турбулизации наступают при  $\sup\{q\} = q_*$ , откуда следует критическое число Рейнольдса

$$R_* = q_* f, \quad f \equiv \frac{\langle u \rangle}{\sup_{F_{\xi\eta}} \{u | \nabla_{\xi\eta} u|\}} \quad (1.6)$$

равное произведению  $q_*$  на определенный функционал  $f\{\Gamma\}$  от формы сечения (т. е. от  $F$  или  $\Gamma$ , с точностью до подобия).

В реальных условиях турбулизация течения наступает при числах Рейнольдса, больших  $R_*$  (затянутый ламинарный режим), поскольку в жидкости имеются не все виды возмущений.

2. Оценим влияние формы сечения  $F$  на  $R_*$  и определим значение  $q_*$ , сопоставив соответственные отношения  $R_*$  и  $f$  для ряда сечений:

а) для трубы кругового сечения ( $0 \leq \zeta \leq 1$ ) имеем

$$u = 1/4 (1 - \zeta^2), \quad q = R \zeta (1 - \zeta^2), \quad f^0 = 3/2 \sqrt{3} \quad (2.1)$$

Экспериментально получено  $R_*^0 \approx 2100$  [6,7].

б) для плоского канала ( $|\eta| \leq 1/2$ )

$$u = 1/8 (1 - 4\eta^2), \quad q = 3/2 R \eta (1 - 4\eta^2), \quad f = 2\sqrt{3} \quad (2.2)$$

Для труб прямоугольного сечения с большим отношением сторон (104 : 1 и 165 : 1) экспериментально получено  $R_* \approx 2800$  [6-8].

Для труб и каналов с сечением более сложной формы, чем круг и бесконечная полоса, соответствующий расчет приходится выполнять численными методами.

в) для трубы квадратного сечения ( $|\xi| \leq 1, |\eta| \leq 1$ ) был произведен на ЭВМ расчет  $f$  при помощи метода сеток с шагом сетки, равным  $1/64$  стороны квадрата. Было получено значение  $f \approx 2.103$ .

Экспериментально получено  $R_* \approx 2000$  [9,8].

г) для трубы кольцевого сечения

$$k \leq \kappa \leq 1 \quad (k = r_1 / r_2, \kappa = (1 - k)\zeta = r / r_2,$$

где  $r_1, r_2, r$  — радиус-векторы стенок и текущий) [5-7]

$$u = \frac{1 - \kappa^2 + \kappa_0^2 \ln \kappa^2}{4(1 - k)^2}, \quad \langle u \rangle = \frac{1 + k^2 - 2\kappa_0^2}{8(1 - k)^2}, \quad u_{\max} = \frac{1 - \kappa_0^2 \ln e / \kappa_0^2}{4(1 - k)^2} \quad (2.3)$$

Значение  $\kappa_0^2 = -(1 - k^2) / \ln k^2$  соответствует максимуму  $u$ . Симплекс (1.1) равен

$$q = R \frac{(1 - \kappa^2 + \kappa_0^2 \ln \kappa^2) |\kappa_0^2 - \kappa^2|}{(1 - k)(1 + k^2 - 2\kappa_0^2)\kappa} \quad (2.4)$$

Отсюда (фиг. 1)

$$f = (1-k)(1+k^2-2\kappa_0^2) \frac{\kappa}{(1-\kappa^2+\kappa_0^2 \ln \kappa^2)(\kappa_0^2-\kappa^2)} =$$

$$= \frac{(1-k)(1+k^2-2\kappa_0^2)}{2} \frac{\kappa_0^2+\kappa^2}{(\kappa_0^2-\kappa^2)^3} \quad (2.5)$$

Здесь  $\kappa^2$  есть меньший из двух корней  $\kappa_i^2(k)$  ( $k < \kappa_1 < \kappa_0 < \kappa_2 < 1$ ) (фиг. 2) уравнения

$$2(\kappa_0^2 - \kappa^2)^2 = (\kappa_0^2 + \kappa^2)(1 - \kappa^2 + \kappa_0^2 \ln \kappa^2) \quad (2.6)$$

Из соответствующих экспериментов [10-13] воспользуемся, например, тремя, в которых турбулизация была обнаружена при  $R \approx 2000, 2700$  и  $2640$  соответственно для  $k \approx 0.186$  [12],  $0.514$  и  $0.639$  [11].

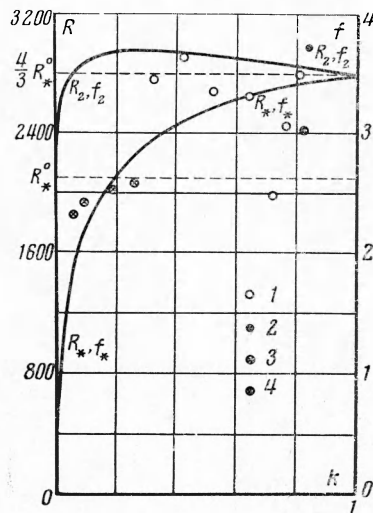
	Труба кругового сечения	Плоский канал	Труба квадратного сечения	Труба кольцевого сечения		
				$k = 0.186$	$k = 0.514$	$k = 0.631$
$R_* / R_*^0$ , эксперимент	1	$\frac{4}{3}$ [8]	0.95 [9]	0.952 [12]	1.28 [11]	1.26 [11]
$f / f^0$ , теория	1	$\frac{4}{3}$	0.81	1.00	1.23	1.26

Сопоставление вычисленных значений  $f / f^0$  с экспериментальными значениями  $R_* / R_*^0$  приведено в таблице. Они практически (т. е. в пределах точности экспериментов и связанных с ними вспомогательных расчетов) совпадают. Если учесть также отмеченный факт затягивания ламинарного режима, естественно сделать заключение об универсальности значения  $q_*$  для труб произвольных сечений.

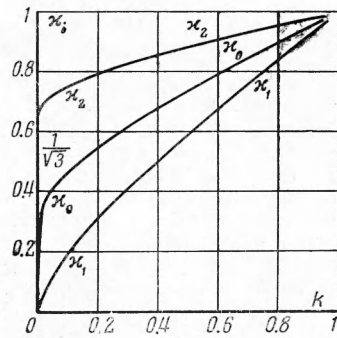
Определим  $q_*$ , пользуясь наиболее достоверными результатами многочисленных экспериментов для труб кругового сечения [6,7]

$$q_* = R_*^0 / f^0 \approx 2100 : \frac{3}{2} \sqrt{3} \approx 808.3 \quad (2.7)$$

Точность полученного значения  $q_*$  определяется точностью экспериментального измерения  $R_*^0$ .



Фиг. 1



Фиг. 2

Тем самым получаем  $R_* = q_* f$  равным 2800 для плоского канала (в полном согласии с результатом эксперимента) и около 1700 для трубы с квадратным сечением (что на 15% меньше экспериментально обнаруженного).

3. Приведем результаты расчетного определения точек (линий) максимальной неустойчивости для труб различных сечений и сопоставления с имеющимися данными.

а) В трубе кругового сечения максимум  $q$ , т. е. окружность максимальной неустойчивости, согласно (2.1) характеризуется  $\zeta = 1 / \sqrt{3} \approx 0.57735$ .

Эксперименты, проведенные при значениях  $R$ , близких к  $R_*^0$ , обнаружили наиболее слабое затухание вносимых возмущений в области  $0.4 < \xi < 0.6$  [3] и наибольшую устойчивость возникающих пульсаций при  $\xi \approx 0.6$  [4] и, таким образом, подтверждают теоретический результат.

Можно ожидать, что область максимальной неустойчивости ламинарного течения отличается при турбулентном режиме максимальной интенсивностью турбулентности и тем самым максимальной турбулентной вязкостью. Действительно, максимум турбулентной вязкости при  $\xi \approx 0.6$  был установлен экспериментально [14].

б) В плоском канале плоскости максимальной неустойчивости согласно (2.2) характеризуются  $\eta = \pm 1/2 \sqrt{3}$ .

Таким образом, в плоском канале и трубе кругового сечения максимум  $q$  достигается при совпадающих значениях относительной ординаты  $2|\eta|$  и радиус-вектора  $\xi$ . Этот вывод следует также из независимых теоретических соображений [15].

в) В трубе квадратного сечения точки максимальной неустойчивости лежат на осях симметрии квадрата, параллельных его сторонам

$$\xi = 0, \quad \eta \approx \pm 0.625, \quad \xi \approx \pm 0.625, \quad \eta = 0$$

Расположение этих точек легко осмыслить физически при сопоставлении квадрата с вписанным в него кругом (п. а).

г) В трубе кольцевого сечения достигаются два максимума  $q$ , больший (основной) из которых характеризуется меньшим  $\kappa_1$ , а меньший — большим корнем  $\kappa_2$  уравнения (2.6) (фиг. 2).

Поскольку вероятность турбулизации течения резко увеличивается при появлении второй из зон неустойчивости  $\kappa \sim \kappa_1$ ,  $\kappa \sim \kappa_2$ , в реальных условиях следует ожидать наступления турбулизации при числе Рейнольдса, удовлетворяющих неравенству  $R_* = R_1 < R \lesssim R_2$ , где  $R_i$  (и  $f_i = R_i / q_*$ ) соответствует  $\kappa_i$  согласно (2.4) при  $q = q_*$  (фиг. 1). Вероятность близости  $R$  к  $R_2$  возрастает при приближении  $k$  к единице (т. е. с уменьшением асимметрии потока).

В предельном случае малой кривизны стенок  $1 - k \equiv \alpha \ll 1$  приближаемся к результатам для плоского канала

$$\begin{aligned} \kappa_0 &\approx 1 - 1/2 \alpha - 1/24 \alpha^2, & \kappa_{1,2} &\approx 1 - 1/2 (1 \pm 1 / \sqrt{3}) \alpha + 1/4 (11/27 \pm 1 / \sqrt{3}) \alpha^2 \\ R_{1,2} &\approx 2q_* (\sqrt{3} \mp 1/6 \alpha) \end{aligned} \quad (3.1)$$

В противоположном предельном случае  $k \rightarrow 0$  (круглая труба с тонкой коаксиальной вставкой)  $R_*$  неограниченно уменьшается, а окружность наибольшей неустойчивости быстро стягивается к центру

$$\kappa_0 \approx (2 \ln k)^{-1} \rightarrow 0, \quad \kappa_1 \approx ek \rightarrow 0, \quad \kappa_1 / \kappa_0 \rightarrow 0, \quad R_2 \approx 2eq_* k \ln^2 k \rightarrow 0 \quad (3.2)$$

Для второго локального максимума неустойчивости получаем в пределе то же, что и для кругового сечения

$$\begin{aligned} \kappa_2 &\approx \frac{1}{\sqrt{3}} \left( 1 - \frac{6 - \ln 3}{4 \ln k} \right) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{3}} \\ R_2 &\approx R_*^0 \left( 1 - \frac{2 - \ln 3}{4 \ln k} - \frac{12 + 7 \ln 3 - 2 \ln^2 3}{8 \ln^2 k} \right) \rightarrow R_*^0 \end{aligned} \quad (3.3)$$

Однако наступление турбулизации при  $R \sim R_2 \approx R_*^0$  уже маловероятно.

При увеличении  $k$  величины  $\kappa_0$ ,  $\kappa_1$  и  $R_*$  ( $0 < R_* < 4/3 R_*^0$ ) монотонно возрастают,  $\kappa_2$  убывает;  $R_2$  ( $R_*^0 < R_2 \lesssim 2962$ ) при  $k \approx 0.30$  имеет слабый максимум (фиг. 1, 2). В частности,  $R_* = R_*^0$  при  $k \approx 0.18531$  и  $R_2 \approx 4/3 R_*^0$  при  $k \approx 0.03323$ .

На фиг. 1 представлены также экспериментально обнаруженные значения  $R$ , при которых наступала турбулизация. Точки 1, 2, 3, 4, соответствуют данным работ [10-13]. Согласно (2.4), (2.5) с результатами экспериментов можно признать вполне удовлетворительным, если учесть затягивание ламинарного режима и возрастающее при сужении кольцевой щели влияние конструктивных погрешностей ее изготовления на уменьшение действительного  $R_*$ .

4. Рассмотрим вопрос о влиянии шероховатости стенки на турбулизацию течения и коэффициент  $\lambda$  сопротивления трубы.

Естественно ожидать, что начиная со значения  $R$ , при котором распределенная шероховатость  $\Delta = \delta$  проникает в область неустойчивости  $q > q_*$

$$R' = q_* \frac{\langle u \rangle}{\sup_{\delta} \{u | \nabla_{\xi, \eta} u\}} \quad (4.1)$$

шероховатость существенно изменяет характер зависимости  $\lambda(R)$  в сторону возрастания, или более интенсивного возрастания. Здесь индекс  $\delta$  соответствует геометрическому месту точек, отстоящих от точек контура  $\Gamma_{\xi\eta}$  на расстоянии  $\delta$  (контур  $\Gamma$  сечения  $F$  соответствует расстояние  $\Delta$ ) по внутренней (обезразмеренной аналогично координатам) нормали  $n$ ; индекс 0 относится тем самым к контуру  $\Gamma_{\xi\eta}$ .

Поскольку относительная шероховатость  $\delta$  обычно весьма мала, (4.1) можно представить в виде

$$R' \approx \frac{q_*}{\delta} \langle u \rangle \sup^{-1} \left\{ \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0 + \delta \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_0 \right] \left[ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0 + \frac{\delta}{2} \left( \frac{\partial^2 u}{\partial n^2} \right)_0 \right] \right\} \approx \frac{q_*}{\delta} \langle u \rangle \sup^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0^2 \right\} \quad (4.2)$$

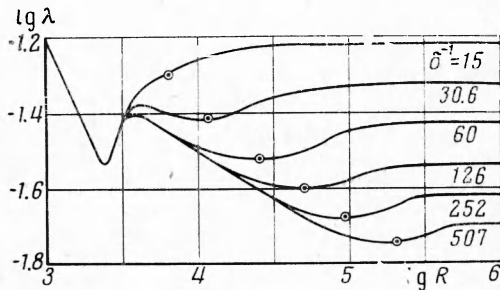
или

$$R_{\Delta} \equiv \frac{\langle v \rangle \Delta}{v} = \frac{R' \delta}{2} \approx \frac{q_*}{2} \langle u \rangle \sup^{-1} \left\{ \left( \frac{\partial u}{\partial n} \right)_0^2 \right\} \quad (4.3)$$

В частности, для трубы кругового сечения

$$R' \approx \frac{q_*}{\delta(1-\delta)(2-\delta)} \approx \frac{q_*}{2\delta} = \frac{R_*^0}{3\delta \sqrt{3}} \approx \frac{404.2}{\delta}, \quad R_{\Delta} \approx \frac{q_*}{4} \approx 202.1 \quad (4.4)$$

На фиг. 3 приведены экспериментальные кривые  $\lambda(R)$  Никурадзе для шероховатых труб кругового сечения [5]. На кривых выделены точки с  $R = R'$ . В них действительно начинается возрастание  $\lambda$ , продолжающееся далее вплоть до области автомодельности.



Фиг. 3

Отсюда следует вывод о том, что в шероховатой трубе при  $R_* < R < R'$  турбулентные пульсации имеют некоторую тенденцию к затуханию, которое становится невозможным, как только в область  $q > q_*$  начинают проникать постоянные источники возмущений.

Непосредственное экспериментальное определение «допускаемой» высоты распределенной шероховатости было произведено для трубы кольцевого сечения [16,1]. Было по-

лучено в среднем  $R_{\Delta}^* \approx 120$ , а для реальных отрицательных градиентов давления —  $R_{\Delta} \approx 130 \div 140$ .

Для плоского канала, гидравлически близкого к трубе с сечением в виде узкого кольца, из (4.2), (4.3) следует:

$$R' \approx \frac{q_*}{3\delta} \approx \frac{269.4}{\delta}, \quad R_{\Delta} \approx \frac{q_*}{6} \approx 134.7 \quad (4.5)$$

т. е. совпадение с экспериментальным результатом [16] оказывается хорошим.

5. Отметим некоторую аналогию признака  $q \leq q_*$  устойчивости ламинарного течения в трубах с признаком Рэлея устойчивости течения Куэтта между вращающимися цилиндрами [17], который также будет результатом локального энергетического анализа течения. Согласно признаку Рэлея последнее устойчиво, если квадрат циркуляции скорости нигде не убывает с увеличением радиус-вектора

$$\frac{d}{dr} (vr)^2 \geq 0 \quad (5.1)$$

и обратно. Условию (5.1) можно придать следующую форму:

$$\frac{\rho v (-dv/dr)}{\rho v^2 / r} \leq 1 \quad (5.2)$$

Знаменатель дроби в (5.2) есть величина градиента давления, числитель с точностью до знака — плотности кинетической энергии жидкости.

