О ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ВОЛНАХ, РАСПРОСТРАНЯЮЩИХСЯ ПОПЕРЕК МАГНИТНОГО ПОЛЯ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Ю. А. Березин

(Новосибирск)

В настоящее время хорошо известно, что профиль волн конечной амплитуды в разреженной плазме (где длина свободного пробега частиц существенно больше других характерных размеров) определяется двумя конкурирующими процессами: нелинейным укручением и «размазыванием» вследствие дисперсионных эффектов [1,2]. Для волн, распространяющихся поперек магнитного поля в холодной разреженной плазме, закон дисперсии таков, что фазовая скорость малых колебаний рассматриваемого типа убывает с уменьшением длины волны (отрицательная дисперсия). Такой закон дисперсии приводит к возможности существования стационарных волн «сжатия» конечной амплитуды (уединенных и периодических), которые изучены достаточно полно. В ряде работ [3-5] исследовались нестационарные плоские волны, движущиеся поперек магнитного поля, которые возбуждались при повышении магнитного давления на границе плазма — вакуум.

Ниже численным интегрированием соответствующей системы уравнений проводится исследование цилиндрических волн, распространяющихся в холодной разреженной плазме поперек сильного магнитного поля. Результаты имеют значение для экспериментов по быстрому сжатию плазменных столбов магнитным полем при условиях, когда плазму можно считать достаточно разреженной [6].

1. Основная система уравнений. Будем рассматривать движения, характерные частоты которых значительно меньше электронной ларморовской частоты

$$\omega_{He} = eH / m_e c, \quad \omega_{He} \ll \omega_{oe} = \sqrt{4\pi N e^2 / m_e}$$

Поэтому плазму можно считать квазинейтральной $N_i = N_e = N$. Будем также пренебрегать газокинетическим давлением по сравнению с магнитным $(p \ll H^2 / 8\pi)$, так как плазма предполагается холодной. Вследствие этого движение электронов и ионов определяется в основном самосогласованным электромагнитным полем.

При указанных условиях уравнения макроскопического движения электронной и ионной компонент и уравнения Максвелла имеют следующий вид:

$$m_i \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e\mathbf{E} + \frac{e}{c}[\mathbf{v}_i \mathbf{H}] + \nu m_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i), \qquad m_e \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = -e\mathbf{E} - \frac{e}{c}[\mathbf{v}_e \mathbf{H}] - \nu m_e (\mathbf{v}_e - \mathbf{v}_i)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \frac{4\pi e N}{c}(\mathbf{v}_i - \mathbf{v}_e), \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\mathbf{v}_i) = 0, \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\mathbf{v}_e) = 0, \quad \operatorname{div} \mathbf{H} = 0$$

Здесь v_i (v_e) — макроскопическая скорость ионов (электронов)

$$\frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_i}{\partial t} + (\mathbf{v}_i \nabla)\mathbf{v}_i, \qquad \frac{d\mathbf{v}_e}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}_e}{\partial t} + (\mathbf{v}_e \nabla)\mathbf{v}_e$$

ν — частота соударений между электронами и ионами (для большей общности в уравнения движения введено некоторое трение между компонентами плазмы).

Введем массовую скорость

$$\mathbf{U} = \frac{m_i \mathbf{v}_i + m_e \mathbf{v}_e}{m_i + m_e} \tag{1.2}$$

Тогда скорости ионов и электронов записываются так:

$$\mathbf{v}_i = \mathbf{U} + \frac{m_e c}{4\pi e N (m_i + m_e)} \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \mathbf{v}_e = \mathbf{U} - \frac{m_i c}{4\pi e N (m_i + m_e)} \operatorname{rot} \mathbf{H} \tag{1.3}$$

Теперь преобразуем систему уравнений (1.1) следующим образом. Сложим два первых уравнения этой системы и подставим в полученное уравнение выражения (1.3). Затем из первого уравнения системы (1.1) выразим электрическое поле E и подставим его в уравнение индукции $\partial H / \partial t = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}$. В результате таких преобразований исходная система уравнений принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\nabla)\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi N M}[\operatorname{rot} \mathbf{H} \cdot \mathbf{H}] - \frac{m_i m_e c^2}{(4\pi e M)^2}\left(\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{N}\nabla\right)\frac{\operatorname{rot} \mathbf{H}}{N}, \qquad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(N\mathbf{U}) = 0 \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}[\mathbf{UH}] - \frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}\right) - \frac{m_i c}{4\pi e M}\operatorname{rot}\left[\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N}\cdot\mathbf{H}\right] +$$

$$+\left(\frac{m_i c}{4\pi e M}\right)^2 \frac{m_e c}{e}\operatorname{rot}\left\{\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N}\nabla\right)\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N}\right\} - \frac{m_i m_e c^2}{4\pi e^2 M}\operatorname{rot}\left\{\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N}\right) + (\mathbf{U}\nabla)\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N} +\right.$$

$$\left.+\left(\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N}\nabla\right)\left(\mathbf{U} + \frac{m_e c}{4\pi e M}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{N}\right)\right., \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \qquad \left(M = m_i + m_e, \quad \sigma = \frac{Ne^2}{m_e \nu}\right)$$

Здесь σ — проводимость плазмы. В обычной магнитной гидродинамике рассматриваются движения, частоты которых много меньше ионной циклотронной частоты $\omega_{Hi} = eH / m_i c$; кроме того, плазма считается достаточно плотной. Уравнения, соответствующие приближению обычной магнитной гидродинамики, можно получить из системы (1.1), оставляя в первом уравнении справа только член

$$\frac{1}{4\pi NM}(\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H})$$

а в третьем уравнении справа — только члены

$$\operatorname{rot}[\mathbf{U}\times\mathbf{H}], \qquad \frac{c^2}{4\pi}\operatorname{rot}\frac{\operatorname{rot}\mathbf{H}}{\sigma}$$

Если считать, как это обычно делается, $\sigma = \mathrm{const}$, то систему уравнений в этом случае можно записать в виде

$$\frac{\partial \mathbf{U}}{\partial t} + (\mathbf{U}\cdot\nabla)\,\mathbf{U} = \frac{1}{4\pi NM}(\operatorname{rot}\mathbf{H}\times\mathbf{H}) \quad \frac{\partial N}{\partial t} + \operatorname{div}(\mathbf{N}\cdot\mathbf{U}) = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \operatorname{rot}(\mathbf{U}\times\mathbf{H}) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\Delta\mathbf{H} \quad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0 \tag{1.5}$$

что совпадает с системой уравнений магнитной гидродинамики, приведенной, например, в [7]. Остальные члены в системе уравнений (1.4) описывают дисперсионные эффекты, характерные для разреженной плазмы в сильном магнитном поле и связанные с учетом инерции электронов, а также гиротропии плазмы. Заметим, что учет этих членов позволяет рассмотреть область частот

$$\omega \gtrsim \omega_{Hi}$$

Обычная магнитная гидродинамика «работает» в области частот

$$\omega \ll \omega_{Hi}.$$

Рассмотрим на основании системы уравнений (1.4) одномерные нестационарные цилиндрические волны, распространяющиеся строго поперек магнитного поля. Соответствующая задача ставится следующим образом. В начальный момент времени однородная холодная плазма с плотностью N_0, состоящая из электронов и однократно ионизованных ионов, заполняет бесконечно длинный цилиндр радиуса a, и вдоль оси цилиндра (оси z) имеется однородное магнитное поле $\mathbf{H}_0$. Затем магнитное ноле на границе плазма — вакуум начинает возрастать по некоторому определенному закону. Под действием увеличивающегося на границе давления магнитное возмущение распространяется к оси цилиндра и плазменной шнур начинает сжиматься.

В рассматриваемых здесь цилиндрических волнах отличны от нуля только компонента магнитного поля H_z, направленная вдоль начального поля H_0, и компонента скорости U_r, направленная перпендикулярно фронту волны.

Тогда система уравнений (1.4) приводится к виду

$$\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial r} = -\frac{1}{4\pi NM}H\frac{\partial H}{\partial r} + \frac{m_i m_e c^2}{(4\pi e M)^2}\frac{1}{r}\left(\frac{1}{N}\frac{\partial H}{\partial r}\right)^2, \qquad \frac{\partial N}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(NU) + \frac{NU}{r} = 0$$

$$\frac{\partial H}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial r}(UH) + \frac{UH}{r} = \frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{\partial H}{\partial r}\right) + \frac{c^2}{4\pi\sigma}\frac{1}{r}\frac{\partial H}{\partial r} + \tag{1.6}$$

$$+\frac{m_i m_e c^2}{4\pi e^2 M}\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{r}{N}\frac{\partial H}{\partial r}\right) \qquad (H = H_z, \ U = U_r)$$

Дисперсионные эффекты описываются последним членом в правой части уравнения индукции и обусловливаются инерцией электронов.

Для решения системы уравнений (1.6) удобно перейти к лагранжевым координатам r_0, t ($N_0 r_0 dr_0 = N r dr$, N_0 — плотность в начальный момент времени, r_0 — начальная координата частицы плазмы) и безразмерным переменным

$$h = \frac{H}{H_0}, \quad V = \frac{N_0}{N}, \quad u = \frac{U}{V_A}, \quad x = \frac{r\omega_{0e}}{c}, \quad \tau = \frac{V_A\omega_{0e}}{c}t \quad (\text{или } \tau = \omega^\circ t) \tag{1.7}$$

$$\left(\omega_{0e} = \left(\frac{4\pi N_0 e^2}{m_e}\right)^{1/2}, \; V_A = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi N_0 M}}, \; \omega^\circ = \frac{eH_0}{\sqrt{m_i m_e}\, c}\right)$$

Подставляя (1.7) в (1.6), получим

$$\frac{\partial V}{\partial \tau} = \frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}(xu), \qquad \frac{\partial u}{\partial \tau} = -\frac{1}{2}\frac{x}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}(h^2) + \frac{1}{x}\left(\frac{x}{x_0}\frac{\partial h}{\partial x_0}\right)^2$$

$$\frac{\partial}{\partial \tau}\left\{Vh - \frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x^2}{x_0}\frac{\partial h}{\partial x_0}\right)\right\} = \frac{\nu}{\omega^\circ}\frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x^2}{x_0}\frac{\partial h}{\partial x_0}\right) \tag{1.8}$$

В случае бесконечной проводимости последнее уравнение системы (1.8) можно один раз проинтегрировать, в результате чего получим

$$Vh = 1 + \frac{1}{x_0}\frac{\partial}{\partial x_0}\left(\frac{x^2}{x_0}\frac{\partial h}{\partial x_0}\right) \tag{1.9}$$

Это уравнение можно назвать уравнением состояния с дифференциальной связью, поскольку оно дает соотношение между плотностью плазмы V^{-1} и магнитным полем h (а стало быть, и магнитным давлением).

2. Результаты и их обсуждение. Система уравнений (1.8) решалась численно на ЭВМ путем сведения ее к уравнениям в конечных разностях при следующих начальных и граничных условиях:

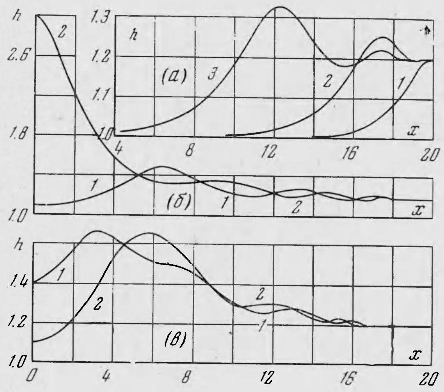
$$u(x_0, 0) = 0, \quad V(x_0, 0) = h(x_0, 0) = 1 \tag{2.1}$$

$$u(0, \tau) = 0, \qquad \frac{\partial h}{\partial x_0}(0, \tau) = 0$$

$$h(a^\circ, \tau) = 1 + A(1 - e^{-\omega\tau}) \tag{2.2}$$

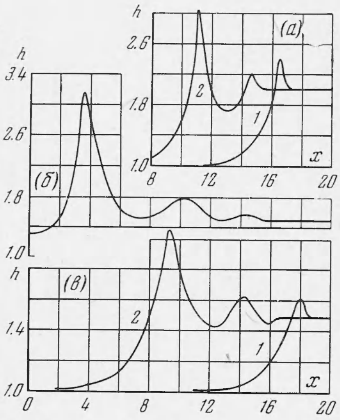
$$(a^\circ = a\omega_{0e} / c)$$

Здесь a° — безразмерный радиус плазменного шнура.



Фиг. 1

На фиг. 1 *а* приведен профиль магнитного поля в зависимости от эйлеровой координаты x в различные моменты времени, которые относятся к наиболее характерным стадиям рассматриваемого процесса (где кривые *1*, *2*, *3* соответствуют значениям $\tau = 2, 5, 10$). На движущейся (в эйлеровых координатах) поверхности плазменного шнура задано магнитное поле сравнительно небольшой амплитуды: $h^\circ = 1 + 0.2\,(1 - e^{-10\tau})$. Начальный радиус цилиндра выбран равным 20 в единицах c / ω_{0e}. Кроме того, пренебрегается диссипацией (т. е. этот расчет проводился при условии $\nu = 0$). При малых временах профиль магнитного поля не отличается от профиля, получающегося в обычной магнитной гидродинамике. Возмущение от границы шнура начинает распространяться к оси со скоростью, примерно равной альфвеновской скорости $H / \sqrt{4\pi NM}$. Поскольку давление магнитного поля на границе сравнительно невелико, то эта граница медленно движется, шнур сжимается. В последующие моменты времени профиль волны начинает становиться круче, так как участки с бо́льшим значением магнитного поля распространяются быстрее участков с меньшим значением поля. В обычной магнитной гидродинамике затем образуется разрыв — ударная волна. В нашем случае, когда размер области, в которой происходит заметное изменение параметров течения, становится по порядку величины равным длине дисперсии c / ω_{0e}, в игру вступают дисперсионные эффекты, приводящие при определенных условиях к компенсации нелинейного укручения профиля волны, и образуется гладкое течение без разрывов. Профиль волны приобретает осцилляторный характер: в соответствии с отрицательным законом дисперсии за передним фронтом волны появляются «возвышения» и «впадины» магнитного поля, которые постепенно переводят значения поля от уровня, поддерживаемого на границе, до невозмущенного. Линейная ширина этих «возвышений» магнитного поля, которые можно интерпретировать как цуг уединенных волн с увеличивающейся амплитудой, равна примерно $2\,c/\omega_{0e}$. По мере продвижения фронта волны к оси его скорость возрастает вследствие увеличения магнитного поля. Передний фронт за время ≈ 19 достигает оси шнура. В этот момент происходит кумуляция, при которой магнитное поле на оси достигает значения $h \approx 3$, и плотность плазмы возрастает в три раза (фиг. 1 *б*, где кривые *1*, *2* соответствуют значениям $\tau = 15, 19$). После этого начинается существенно нестационарное отражение цилиндрической волны от оси; как видно из фиг. 1 *в* (кривые *1*, *2* соответствуют значениям $\tau = 21, 22$), максимум магнитного поля быстро движется от оси по направлению к границе плазменного шнура, а поле на оси убывает. В последующие моменты времени происходит взаимодействие отраженной «части» возмущения с волнами, продолжающими идти от границы, так как на границе поддерживается некоторый постоянный уровень магнитного поля, и картина становится сложной для интерпретации.



Фиг. 2

На фиг. 2*в* приведен профиль магнитного поля для случаев, когда амплитуда магнитного поля A на границе имеет большую величину, а именно $A = 0.5$ (фиг. 2*в*, где кривые *1*, *2* соответствуют значениям $\tau = 3, 9.5$), а также на фиг. 2*б*, где кривая $\tau = 13$ и $A = 1$ (фиг. 2*а*, где кривые *1*, *2* соответствуют значениям $\tau = 3, 6$). Скорость распространения волны становится, естественно, больше; также возрастают и максимумы осцилляций магнитного поля. Цилиндрическая волна в случае $A = 0.5$ за время ~ 13 проходит расстояние $x = 16$ и величина магнитного поля возрастает до $h \approx 3$. При этом удельный объем V стремится к нулю (плотность сильно возрастает), а значения эйлеровых координат, соответствующих соседним «лагранжевым точкам», становятся почти совпадающими. Это обстоятельство указывает на то, что при $h \gtrsim 3$ происходит «пересечение траекторий» частиц, так как при таких амплитудах магнитного поля дисперсионные эффекты не могут скомпенсировать нелинейное укручение; поэтому волна, по-видимому, «опрокидывается» и образуется область многопотокового движения [1]. Дальнейший ход процесса уже нельзя проследить при помощи уравнений (1.6) или (1.8), которые не описывают многопотоковое течение, и нужно строить другую модель. Такая же ситуация имеет место для случая с $A = 1$ (фиг. 2*а*), когда магнитное поле нарастает до утроенного значения невозмущенного поля за время $\tau = 6$. Вопрос о расчете течения в разреженной плазме после «опрокидывания» волны (когда амплитуда магнитного поля в волне становится больше $3H_0$) остается пока открытым, поскольку обычно используемый в гидродинамике для расчета разрывов метод искусственной вязкости здесь неприменим ввиду того, что он в данной ситуации не отвечает существу дела.

Были проведены также расчеты с конечной величиной проводимости ($\nu \neq 0$, $\sigma \neq \infty$), что соответствует введению в уравнения некоторых малых диссипативных членов. Эти расчеты показывают, что характер распространения цилиндрических и плоских волн конечной амплитуды остается в основном таким же, как в случае идеальной плазмы (при $\sigma = \infty$). Отличие заключается лишь в том, что амплитуда волн «сжатия» несколько уменьшается, а профиль несколько больше «размазывается».

Автор благодарит Р. З. Сагдеева и Н. Н. Яненко за ценные консультации и обсуждения, а также Г. А. Максимей и Е. А. Цветову за помощь в работе.

Поступила 22 III 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З. Нелинейные колебания разреженной плазмы. Ядерный синтез, 1961, т. I, № 1.
2. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. Сб. Вопросы теории плазмы, Атомиздат, 1964.
3. Adlam J., Allen J. Collision-free hydromagnetic disturbances of large amplitude in a plasma. Proc. Phys. Soc., 1960, vol. 75, No. 485.
4. Auer P. L., Hurwitz H., Kilb R. W. Low Mach number magnetic compression waves in a collision-free plasma. Phys. Fluids, 1961, vol. 4, No 9.
5. Morton K. W. Finite amplitude compression waves in a collision-free plasma. Phys. Fluids, 1964, vol. 7, No. 11.
6. Искольдский А. М., Куртмуллаев Р. Х., Нестерихин Ю. Е., Пономаренко А. Г. Эксперименты по бесстолкновительной ударной волне в плазме. Ж. эксперим. и теор. физ., 1964, т. 46, № 8.
7. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Гостехиздат, 1957.