

ТЕОРИЯ СВЕРХЗВУКОВОЙ ЧАСТИ БЕЗДИССИПАТИВНОГО КОРОБЧАТОГО УСКОРИТЕЛЯ

А. И. Морозов

(Москва)

В работе произведен расчет двумерного течения двухкомпонентной холодной бездиссипативной плазмы.

Найдено условие, при котором бездиссипативная плазма может выйти из магнитного поля.

Следует различать ускорители плазмы, работающие на большой плотности вещества ($n \geq 10^{16} \text{ см}^{-3}$), и ускорители, работающие на малых плотностях ($n \leq 10^{14} \text{ см}^{-3}$).

В первом случае ускорение ионов может осуществляться не только за счет внутренних электрических полей, но и за счет столкновений ионов друг с другом (обычный тепловой разгон) или столкновений ионов с электронами, движущимися благодаря эффекту Холла¹ вдоль ускорительного канала.

Во втором случае единственным механизмом, способным ускорять ионы, является внутреннее продольное электрическое поле [1,2]. При этом исключаем из рассмотрения системы [3], в которых ускорение ионов происходит за счет кинетических неустойчивостей.

В данной работе будет рассмотрено ускорение плазмы малой плотности. В качестве конкретного примера выбран коробчатый ускоритель, поскольку здесь особенно отчетливо выступают особенности ускоряющих систем малой плотности.

При создании коробчатого ускорителя, работающего при малой плотности, должны быть выполнены три условия.

Во-первых, необходимо использовать секционированные электроды, так как иначе нельзя создать в объеме ускорителя необходимые для ускорения плазмы электрические поля типа (2.11) (см. ниже). При сплошных электродах структура электрического поля в объеме ускорителя будет результатом наложения и взаимодействия друг с другом весьма сложных приэлектродных и краевых процессов.

Во-вторых, если рассматриваемые системы предназначены для получения быстрых скоростей, то необходимо создать условия, при которых отсутствует взаимодействие потока быстрых частиц со стенкой. Иными словами, в системе должно быть осуществлено электромагнитное управление потоком, а не управление при помощи стенок, которое имеет место в обычных газодинамических соплах.

Следует отметить, что в высокоскоростных ускорителях плазмы, дающих ионы с энергией $\geq 100 \text{ эв}$, необходимо устранять взаимодействие потока со стенкой и при более высоких плотностях.

Наконец, в-третьих, должны быть созданы условия, обеспечивающие выход плазмы из магнитного поля.

В работах [4] было показано, что магнитное поле «вморожено» фактически в электронную компоненту плазмы, поэтому необходимым условием выхода компенсированного потока из магнитного поля является большая величина параметра обмена²

$$\xi \gg 1$$

В данной работе будет развита теория сверхзвуковой части коробчатого ускорителя. Следует отметить, что теории коробчатого ускорителя посвящено много работ [5-8]. Однако они выполнены либо в предположении о несжимаемости среды, либо в квазиодномерном приближении с принудительно заданной геометрией потока. Разумеется, эти допущения весьма далеки от действительности, по крайней мере, в том случае, когда речь идет о получении высокоскоростных потоков.

¹ Этот метод разгона естественно назвать омическим, поскольку он обязан омическому сопротивлению плазмы.

² Под параметром обмена, в соответствии с [4], понимается отношение разрядного тока I_0 к ионному потоку I_i , выходящему из ускорителя $\xi = I_0 / I_i$, $I_i = eq/m$, где q — массовый расход рабочего вещества.

1. Исходные уравнения. Если обеспечено отжатие потока плазмы от стенок и плотность его невелика, то диссипативными процессами можно пренебречь. Если к тому же считать течение ионов существенно сверхзвуковым, то стационарное движение ионов будет описываться уравнениями

$$\operatorname{div} n\mathbf{v}_i = 0, \quad m \frac{d\mathbf{v}_i}{dt} = e \left(\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_i \times \mathbf{H} \right) \quad (1.1)$$

Здесь \mathbf{v}_i — скорость ионов, \mathbf{E} , \mathbf{H} — напряженности электрического и магнитного полей, e , m — заряд и масса иона, n — концентрация ионов, которую считаем равной концентрации электронов. Предполагая почти полную ионизацию, наличием нейтралов пренебрегаем.

Аналогично, если электронная температура, измеренная в эв, мала по сравнению с разностью потенциалов, приложенной к ускорителю, то, за исключением приэлектродных слоев, в качестве хорошего приближения для электронной компоненты можно взять систему уравнений:

$$\operatorname{div} n\mathbf{v}_e = 0, \quad \mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v}_e \times \mathbf{H} = 0 \quad (1.2)$$

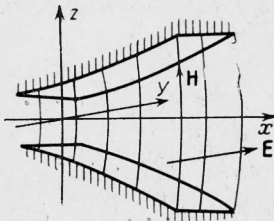
Учет эффекта Холла состоит в том, что во второе уравнение (1.2) вместо \mathbf{v}_i входит \mathbf{v}_e . Из второго уравнения (1.2) следует, что, во-первых, силовые линии γ магнитного поля являются эквипотенциалами электрического поля

$$\varphi = \varphi(\gamma) \quad (1.3)$$

и, во-вторых, что дрейф электронов происходит по эквипотенциальным поверхностям (фиг. 1). Задача состоит в том, чтобы рассчитать движение ионов и электронов, описываемое уравнениями (1.1) и (1.2) в условиях коробчатого ускорителя.

В коробчатом ускорителе (фиг. 2) магнитное поле можно считать заданным, т. е. можно пренебречь собственным магнитным полем токов, текущих в плазме. Если ограничиться случаем плоских магнитных полей, когда все силовые линии лежат в плоскостях $y = \text{const}$, то они могут быть описаны одной компонентой векторного потенциала

$$A_y(x, z) = \int_0^x H_0(x) dx - H_0'(x) \frac{z^2}{2} \quad (1.4)$$



Фиг. 2

Здесь $H_0(x)$ — напряженность поля в плоскости симметрии $z = 0$.

В частном случае, когда магнитное поле H_0 спадает по линейному закону

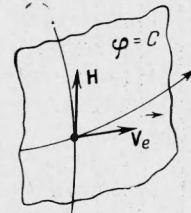
$$H_0 = H_{00} (1 - x/L) \quad (1.5)$$

компонента A_y равна

$$A_y = -\frac{1}{2} H_{00} L \psi, \quad \psi \equiv (1 - x/L)^2 - z^2/L^2 \quad (1.6)$$

Уравнение силовых линий имеет вид [9]

$$\psi = \text{const}, \quad y = \text{const}$$



Фиг. 1

Следовательно, в данном случае уравнение (1.3) может быть записано в виде

$$\varphi = \varphi(\psi, y) \quad (1.7)$$

Зависимость $\varphi(x, y, 0)$ при заданном магнитном поле может быть произвольной. Однако в дальнейшем будет видно, что удобно задавать лишь зависимость $\varphi(x, 0, 0)$, тогда как зависимость φ от y при $z = 0$ следует подобрать такой, чтобы течение плазмы имело желаемый характер.

Для того чтобы решить достаточно сложную систему (1.1), (1.2), (1.7), прибегнем к приближению ионной оптики, т. е. зададим одну «основную» траекторию с известным законом изменения на ней скорости ионов и будем искать все величины в виде рядов по степеням удаления от основной траектории. Это кажется оправданным, потому что поперечные размеры коробчатого ускорителя малы по сравнению с его длиной. В качестве такой основной траектории возьмем ось x . Тогда для величин можно написать разложения

$$(\mathbf{v} \equiv \mathbf{v}_i, \mathbf{u} \equiv \mathbf{v}_e)$$

$$\begin{aligned} v_x &= v_1(x) + yv_{12}(x) + zv_{13}(x) + \dots \\ u_x &= u_1(x) + yu_{12}(x) + zu_{13}(x) + \dots \\ v_y &= yv_{22}(x) + zv_{23}(x) + \dots \\ u_y &= u_2(x) + yu_{22}(x) + zu_{23}(x) + \dots \\ v_z &= yv_{32}(x) + zv_{33}(x) + \dots \\ u_z &= yu_{32}(x) + zu_{33}(x) + \dots \\ n &= n_1(x) + yn_2(x) + zn_3(x) + \dots \end{aligned} \quad (1.8)$$

Аналогично разложим по степеням y соотношение (1.7)

$$\varphi = \varphi_0(\psi) + y\varphi_1(\psi) + \frac{1}{2}y^2\varphi_2(\psi) + \dots \quad (1.9)$$

Подставляя разложения (1.8), (1.9) в уравнения (1.1), (1.2), получим систему уравнений для коэффициентов разложения.

Оказывается, что эта система, наряду с весьма сложными решениями, имеет, с точностью до членов первого порядка малости включительно, следующее простое решение:

$$\begin{aligned} v_x &= v_1 + y \frac{e}{mc} H_0(x) + 0 + \dots, & u_x &= v_1 + y \frac{e}{mc} H_0(x) + 0 + \dots \\ v_y &= 0 + 0 + 0 + \dots, & u_y &= \frac{c}{H_0} \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \Big|_{z=0} - y \frac{(H_0 v_1)'}{H_0} + 0 + \dots \\ v_z &= 0 + 0 + z v_{33} + \dots, & u_z &= 0 + 0 + z v_{33} + \dots \end{aligned} \quad (1.10)$$

$$\frac{m}{e} \frac{v_1^2}{2} + \varphi_0 \Big|_{z=0} \equiv \varphi_{00} = \text{const}, \quad \varphi_1 \Big|_{z=0} = - \frac{v_1 H_0(x)}{c}$$

$$n_3 = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x} n_1 v_1 + n_1 v_{33} = 0, \quad n_2 u_2 + n_1 u_{22} = 0$$

Величина v_{33} определяется уравнением типа Риккати

$$\frac{m}{e} (v_1 v_{33}' + v_{33}^2) = H_0' \frac{d\varphi_0}{d\psi} \Big|_{z=0} \quad (1.11)$$

Найденное частное решение интересно тем, что оно описывает такое течение плазмы, при котором скорость ионов имеет лишь продольные компоненты v_x , v_z и плотность тока $\mathbf{j} = en(\mathbf{v} - \mathbf{u})$ имеет только одну компоненту j_y .

2. Исследование решения (1.10) Прежде всего обращает на себя внимание то обстоятельство (см. (1.10)), что плазменный поток расширяется вдоль оси z . Этот эффект обязан выпуклости магнитных силовых линий. Однако в одномерных теориях он не учитывался и формально «подавлялся», например, стенками $z = \text{const}$, ограничивающими поток по z . Такого рода «подавление» приемлемо лишь при ускорении до небольших скоростей плотной плазмы и непригодно при ускорении до высоких скоростей редкой плазмы. Расширение потока просто рассчитать в том случае, когда магнитное поле изменяется по линейному закону (1.5), а потенциал φ_0 (ψ) является линейной функцией ψ

$$\varphi_0 = \varphi_{00}\psi, \quad \varphi_0|_{z=0} = \varphi_{00} \left(1 - \frac{x}{L}\right)^2 \quad (2.1)$$

Тогда изменение скорости v_1 вдоль оси x на основании (1.10) дается формулой

$$v_1 = v_m \sqrt{1 - (1 - x/L)^2}, \quad \max v \equiv v_m \equiv \left(\frac{2e\varphi_{00}}{m}\right)^{1/2} \quad (2.2)$$

Подставляя (2.1) и (2.2) в (1.11), находим выражение для v_z

$$v_z = z \frac{v_m \exp(2 \arccos \zeta) - 1}{L \exp(2 \arccos \zeta) + 1} \quad \zeta \equiv 1 - \frac{x}{L} \quad (2.3)$$

а тем самым при помощи уравнения

$$dz / dx = v_z / v_1 \quad (2.4)$$

определяем границу пучка в плоскости xz

$$z_s = z_0 \operatorname{ch}(\arccos \zeta) \quad (2.5)$$

Здесь z_0 — ширина пучка на входе в канал ускорителя. Ширина пучка на выходе, т. е. при $x = L$ ($\zeta = 0$), равна

$$(z_s)_{\max} = z_0 \operatorname{ch} \frac{1}{2}\pi \approx 2.63z_0 \quad (2.6)$$

Зная, как расширяется пучок, можно найти изменение плотности в плоскости $y = 0$. Из решения (1.10) для v_z следует

$$n_1 v_1 z_s = \text{const} \quad (2.7)$$

Поэтому

$$n_1 = \frac{\text{const}}{z_0 [\operatorname{ch}(\arccos \zeta)] v_m \sqrt{1 - \zeta^2}} \quad (2.8)$$

Последнее уравнение (1.10) указывает, что плотность плазмы зависит от y . В частности, если поле спадает по линейному закону

$$n = n_1 \left[1 + y \frac{eH_{00}}{v_m mc} \frac{(1 - 2\zeta^2)}{\zeta(1 - \zeta^2)^{1/2}} \right] \quad (2.9)$$

Выше отмечено, что полученное решение описывает течение плазмы, при котором существует только одна y -компонента тока. Этот ток обязан дрейфу электронов в y -направлении под действием продольного электрического поля E_x . Зависимость (1.10) скорости дрейфа u_y от y и приводит к изменению плотности плазмы в направлении оси y (см. (2.9)).

Величина плотности тока в сечении $y = 0$ для случая (1.5), (2.1), как нетрудно видеть, равна

$$j = e \frac{v_m^2 mc}{LeH_{00}} n_1 = e n_1 v_m \frac{R_{i0}}{L}, \quad R_{i0} \equiv \frac{v_m mc}{eH_{00}} \quad (2.10)$$

Если учесть, что $n_1 \rightarrow \infty$ при $x \rightarrow 0$, то на входе $j \rightarrow \infty$.

Электрический потенциал в канале описывается выражением

$$\varphi = \varphi_0(x, 0) - \frac{1}{c} y v_1 H_0(x) + \dots \quad (2.11)$$

Первый член этого выражения описывает продольное электрическое поле, обеспечивающее разгон ионов. Второй член — поперечное поле, уравнивающее силу Лоренца и обеспечивающее $v_y = 0$, а также равенство продольных скоростей ионов и электронов, т. е. отсутствие продольного тока. Если обозначить через b ширину канала, то напряжение $V(x)$ между электродами будет равно

$$V(x) = b \frac{v_1(x) H_0(x)}{c}$$

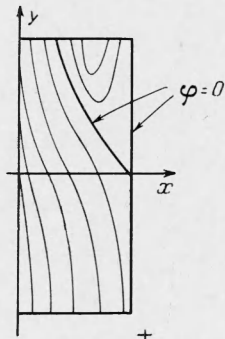
Для случая (1.5), (2.1)

$$V(x) = V_m 2\xi \sqrt{1 - \xi^2}, \text{ где } V_m \equiv \frac{1}{4} b v_m H_{00}$$

— максимальное значение напряжения при

$$x_m = L (\sqrt{2} - 1) / \sqrt{2} \approx 0.3 L$$

Картина распределения потенциала в плоскости xu для случаев, близких к (1.5), (2.1), имеет вид, изображенный на фиг. 3. Немонотонная зависимость φ от x при $y > 0$ объясняется быстрым спадом φ при $x \rightarrow L$. Практически разумно делать системы¹, работающие при $y < 0$.



Фиг. 3

Если рассчитать параметр обмена [4] для данной системы, то в общем случае он равен (см. 1.10)

$$\xi = \frac{I_0}{I_i} = \frac{1}{eN} \int_0^L j_y f dx = \frac{1}{b} \int_0^L \frac{dv}{eH_0/mc} \quad (2.12)$$

Здесь $f(x)$ — высота канала.
В частном случае (1.5) и (2.1)

$$\xi = \frac{1}{b} R_{i0} \frac{\pi}{2}, \quad R_{i0} \equiv \frac{v_m mc}{eH_{00}} \quad (2.13)$$

Для того чтобы при отсутствии диссипации обеспечить выход плазмы из магнитного поля, необходимо сделать $\xi \gg 1$ [4]. Определение теоретическим путем минимального значения ξ для той или иной конкретной системы представляет очень сложную задачу, лежащую за пределами данной работы.

Если задаться некоторой априорно взятой величиной ξ_0 , например $\xi_0 = 10$, то при заданном расходе N автоматически находим выражение для разрядного тока

$$I_0 = \xi_0 eN$$

Если наряду с этим задать скорость истечения и ширину канала, то при помощи (2.13) находится напряженность поля

$$H_{00} = \frac{v_m \pi}{2eb} \frac{mc}{\xi_0}$$

Рассмотрим теперь вопрос о параметрах малости, по которым производится разложение (1.8).

¹ При данном выборе системы координат и зависимостей (1.5) и (2.1).

Как показывает решение (1.10), всюду, за исключением окрестности особой точки $H = 0$, разложение идет по степеням величин

$$\mu_1 = y \frac{eH_0}{mcv_1}, \quad \mu_2 = \frac{Z}{L}$$

Отсюда видно, что разложение (1.8), очевидно, будет справедливо в основной части канала, т. е. за исключением входа ($v \rightarrow 0$) и выхода ($H \rightarrow 0$), только если $\mu_1 \ll 1$ и $\mu_2 \ll 1$. Однако, как показывают формулы (2.12) (2.13), $\mu_1 \sim 1/\xi$, и, следовательно, плавно меняющегося решения можно ожидать лишь при $\xi \gg 1$. В противоположном случае, т. е. при $\xi \ll 1$, коробчатый ускоритель, по всей вероятности, либо вообще не сможет работать без диссипации, либо поток будет очень сильно деформирован. Условие $\xi \gg 1$ в этой связи естественно понимать как условие бездиссипативного выхода плазмы из магнитного поля. Параметр μ_2 естественным образом связан с геометрией магнитного поля, и требование малости его — вполне очевидное.

В заключение отметим, что сделанное в начале расчета предположение о малости собственного магнитного поля справедливо, если

$$\frac{H_0^2}{4\pi mn} \gg v_m^2$$

Далее важно иметь в виду, что выражение (2.11), описывающее распределение потенциала, в общем случае не удовлетворяет уравнению Лапласа [10]. Поэтому рассчитанный ускоритель является принципиально плазменным. Для его нормальной работы необходимо, чтобы дебаевский радиус был существенно меньше размеров системы. Однако это условие реализуется уже при малых плотностях $\lesssim 10^{10} \text{ см}^{-3}$.

Наконец, отметим, что пренебрежение тепловым давлением и омическим сопротивлением плазмы есть пренебрежение членами $\sim 1/R_m$, $1/M^2$, где R_m — магнитное число Рейнольдса, а M — число Маха.

В заключение автор благодарит А. И. Бугрову, Л. Е. Калихмана, Л. С. Соловьева за обсуждение затронутых вопросов.

Поступила 7 VI 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Морозов А. И. Об ускорении плазмы магнитным полем. Ж. эксперим. и теор. физ., 1957, т. 32, стр. 305.
2. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Плоские течения идеально проводящей сжимаемой жидкости при учете эффекта Холла. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, стр. 1141.
3. Незлин М. В., Солнцев А. М. Ускорение ионов в плазменных пучках. Ж. эксперим. и теор. физ., 1963, т. 45, стр. 840.
4. Морозов А. И., Соловьев Л. С. — Об одном параметре подобия в теории плазменных течений. Докл. АН СССР, 1965, т. 150, стр. 725.
5. Вуд Г., Картер А. Соображения NASA относительно конструкции плазменного ускорителя непрерывного действия. Сб. «Ионные, плазменные и дуговые ракетные двигатели», Госатомиздат, 1961.
6. Ватажин А. Б. Некоторые двумерные задачи о распределении тока в электропроводной среде, движущейся по каналу в магнитном поле. ПМТФ, 1963, № 2, стр. 39.
7. Саттон Г., Карлсон А. Концевые эффекты при течении вязкой жидкости в магнитогидродинамическом канале. Сб. «Магнитогидродинамический метод преобразования энергии», Физматгиз, 1963.
8. Калихман Л. Е. Элементы магнитной газодинамики. Атомиздат, 1964.
9. Морозов А. И., Соловьев Л. С. Геометрия магнитного поля. Сб. «Вопросы теории плазмы», Госатомиздат, 1963, вып. 2.
10. Морозов А. И. Фокусировка холодных квазинейтральных пучков в электромагнитных полях. Докл. АН СССР, 1965, т. 163, стр. 1363.