

УДК 534.42

ДИНАМИЧЕСКАЯ ЖЕСТКОСТЬ БАЛКИ В ДВИЖУЩЕМСЯ КОНТАКТЕ

С. Н. Веричев, А. В. Метрикин*

Нижегородский филиал Института машиноведения РАН, 603024 Нижний Новгород

* Делфтский технологический университет, 2628 GN Делфт, Нидерланды

Изучается эквивалентная динамическая жесткость балки Тимошенко, лежащей на упруговязком основании и взаимодействующей с равномерно движущимся по ней точечным объектом. Получено и проанализировано общее выражение для эквивалентной жесткости балки. Исследуется эквивалентная жесткость как функция скорости движения объекта. Проведен сравнительный анализ эквивалентных жесткостей балок Тимошенко и Бернулли — Эйлера.

Введение. Понятие динамической жесткости используется при анализе динамического отклика механических систем, состоящих из сосредоточенных элементов (масс, пружин и вязких демпферов). По определению динамическая жесткость системы есть отношение амплитуды приложенной к ней гармонической силы к комплексной амплитуде колебаний в возбуждаемой точке. Очевидно, что при анализе установившихся откликов сложной линейной системы поведение любой ее части можно описать динамической жесткостью, являющейся функцией физических параметров системы и частоты колебаний.

В данной работе исследуется динамическая жесткость распределенной упругой системы в движущемся контакте. Ранее этому вопросу уделялось недостаточно внимания, хотя он, безусловно, интересен. С практической точки зрения этот интерес обусловлен бурным развитием скоростных поездов, при анализе колебаний которых важно знать динамическую жесткость рельсов в областях контакта с движущимися колесами поезда [1, 2]. Исследование эквивалентной динамической жесткости распределенной системы в движущемся контакте важно по следующим причинам: 1) для обеспечения заданного закона движения объекта, контактирующего с распределенной системой, необходимо (за исключением некоторых случаев) приложить внешнюю силу, которая будет “закачивать” дополнительную энергию в распределенную систему; 2) колебания движущейся точки контакта могут возбуждать в распределенной системе распространяющиеся волны, в том числе аномальные по Доплеру [3]. С излучением этих волн связана основная особенность эквивалентной жесткости в движущемся контакте. Как показано в данной работе, она может иметь мнимую часть, соответствующую “отрицательной вязкости”, которая может вызвать неустойчивость колебаний движущегося по распределенной системе объекта [4–6].

Постановка задачи и общее выражение для динамической жесткости. Рассмотрим безотрывное движение с постоянной скоростью точечной массы вдоль балки Тимошенко, лежащей на вязкоупругом основании, жесткость которого равномерно распределена вдоль балки (рис. 1, а). На рис. 1, б приведена эквивалентная модель балки Тимошенко.

Уравнения малых колебаний рассматриваемой системы имеют вид [7, 8]

$$\rho F U_{tt} - \chi G F U_{xx} + \chi G F \varphi_x + kU + \nu U_t = -\delta(x - Vt)m \frac{d^2 U^0}{dt^2}, \quad (1)$$

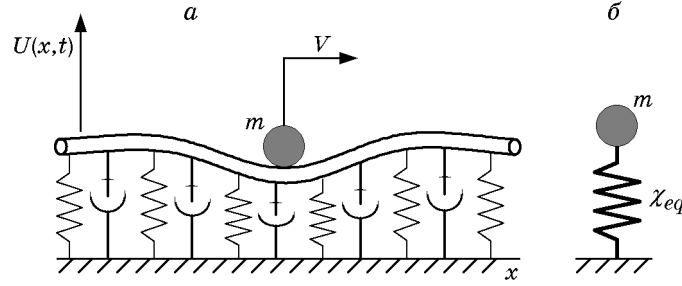


Рис. 1

$$\rho I \varphi_{tt} - IE \varphi_{xx} + \chi GF (\varphi - U_x) = 0, \quad U^0(t) = U(Vt, t),$$

где $U(x, t)$, $U^0(t)$ — вертикальные отклонения балки и массы m соответственно; $\varphi(x, t)$ — угол поворота поперечного сечения балки; E , G — модули растяжения и сдвига; ρ , I — плотность и момент инерции сечения; F — площадь поперечного сечения балки; $\chi \approx 0,82$ — коэффициент Тимошенко; k , ν — погонные жесткость и вязкость основания.

Введем безразмерные переменные и параметры: $c_p^2 = E/\rho$, $c^2 = G/\rho$, $c_s^2 = \chi c^2$, $\eta = c_s^2 F/(\omega^2 I)$, $\gamma = c_p^2/c_s^2$, $\alpha = V/c_s$, $\nu_1 = \nu/(\rho F \omega)$, $M = m\omega/(\rho F c_s)$, $U = U\omega/c_s$, $\tau = \omega t$, $y = x\omega/c_s$.

Из (1) получим

$$U_{\tau\tau} - U_{yy} + \varphi_y + U + \nu_1 U_\tau = -M \delta(y - \alpha\tau) \frac{d^2 U^0}{d\tau^2},$$

$$\varphi_{\tau\tau} - \gamma \varphi_{yy} + \eta(\varphi - U_y) = 0, \quad U^0(\tau) = U(V\tau, \tau). \quad (2)$$

Для дальнейшего анализа удобно ввести движущуюся систему отсчета ($\xi = y - \alpha\tau$, $\tau = \tau$), в которой уравнения (2) примут вид

$$U_{\tau\tau} - 2\alpha U_{\tau\xi} + (\alpha^2 - 1)U_{\xi\xi} + \varphi_\xi + U + \nu_1 U_\tau - \nu_1 \alpha U_\xi = -M \delta(\xi) U_{\tau\tau}(0, \tau),$$

$$\varphi_{\tau\tau} - 2\alpha \varphi_{\tau\xi} + (\alpha^2 - \gamma) \varphi_{\xi\xi} + \eta(\varphi - U_\xi) = 0. \quad (3)$$

Как следует из (3), совершив переход в движущуюся систему координат, мы исключили из уравнений смещение массы U^0 . Дельта-функция зависит только от пространственной переменной ξ , что позволяет проанализировать устойчивость системы в пространстве изображений по Лапласу без осуществления обратного преобразования.

Применяя преобразования Фурье по переменным ξ и τ

$$\{\tilde{U}_\omega(\xi, \omega), \tilde{\varphi}_\omega(\xi, \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{U(\xi, \tau), \varphi(\xi, \tau)\} \exp(-i\omega\tau) d\tau,$$

$$\{\tilde{U}_{k,\omega}(k, \omega), \tilde{\varphi}_{k,\omega}(k, \omega)\} = \int_{-\infty}^{\infty} \{\tilde{U}_\omega(\xi, \omega), \tilde{\varphi}_\omega(\xi, \omega)\} \exp(-ik\xi) d\xi,$$

перейдем от системы дифференциальных уравнений в частных производных (3) к системе алгебраических уравнений относительно $\tilde{U}_{k,\omega}$ и $\tilde{\varphi}_{k,\omega}$, исключая из которой $\tilde{\varphi}_{k,\omega}$, получим

$$\tilde{U} D_T(k, \omega) = M \omega^2 \tilde{U}(0, \omega), \quad D_T(k, \omega) = [A(k, \omega) B(k, \omega) - \eta k^2] / A(k, \omega),$$

$$A(k, \omega) = -\omega^2 + 2\alpha k \omega - k^2(\alpha^2 - \gamma) + \eta, \quad (4)$$

$$B(k, \omega) = -\omega^2 + 2\alpha k \omega - k^2(\alpha^2 - 1) + \nu_1 i \omega - \nu_1 \alpha i k + 1.$$

Для нахождения замкнутого уравнения относительно фурье-образа смещения массы $\tilde{U}(0, \omega)$ применим к (4) обратное преобразование Фурье по волновому числу k . Полагая в полученном уравнении $\xi = 0$, получим уравнение, описывающее вертикальные колебания массы, безотрывно движущейся по балке:

$$\tilde{U}(0, \omega)(-M\omega^2 + \chi_{eq}(\omega, V)) = 0, \quad \chi_{eq}(\omega, V) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{D_T(k, \omega)} \right)^{-1}. \quad (5)$$

Уравнение $-M\omega^2 + \chi_{eq}(\omega, V) = 0$ представляет собой характеристическое уравнение колебаний массы, равномерно движущейся вдоль балки. Очевидно, что второе слагаемое в этом уравнении является динамической вертикальной жесткостью балки Тимошенко в точке контакта (см. рис. 1, б).

В дальнейшем при анализе динамической жесткости балки Тимошенко будем сравнивать ее с жесткостью балки Бернулли — Эйлера, что позволит оценить применимость этой более простой модели при изучении динамического поведения объектов, движущихся по балке.

Уравнения колебаний балки Бернулли — Эйлера, взаимодействующей с безотрывно движущейся по ней массой, имеют вид [8]

$$\rho F U_{tt} + E I U_{xxxx} + k U + \nu U_t = -\delta(x - Vt) m \frac{d^2 U^0}{dt^2}, \quad U^0(t) = U(Vt, t). \quad (6)$$

Выражение для динамической жесткости балки можно записать следующим образом:

$$\chi_{eq}(\omega, V) = \left(\frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dk}{D_{БЭ}(k, \omega)} \right)^{-1}, \quad (7)$$

$$D_{БЭ}(k, \omega) = \gamma k^4 / \eta - \alpha^2 k^2 - (\nu_1 i \alpha - 2\alpha \omega) k + \nu_1 i \omega - \omega^2 + 1.$$

Сравнение динамических жесткостей балок Тимошенко и Бернулли — Эйлера. Исследуя выражения (5) и (7), вычислим входящие в них интегралы методом контурного интегрирования. Подынтегральные функции в этих выражениях представляют собой дроби (в знаменателе стоит полином четвертой степени), корни которого являются простыми полюсами. Согласно теории вычетов [9] результат вычисления интегралов может быть записан в виде

$$\chi_{eq}^T(\omega, V) = \left(i \sum_{j=1}^4 \frac{A(\omega, k_j)}{\partial(A(k, \omega)B(k, \omega) - \eta k^2) / \partial k |_{k=k_j}} \right)^{-1},$$

$$\chi_{eq}^{БЭ}(\omega, V) = \left(i \sum_{n=1}^4 \frac{1}{\partial D_{БЭ}(k, \omega) / \partial k |_{k=k_n}} \right)^{-1},$$

где k_j и k_n — корни уравнений $A(k, \omega)B(k, \omega) - \eta k^2 = 0$ и $D_{БЭ}(k, \omega) = 0$ соответственно, лежащие в верхней полуплоскости комплексного переменного k .

Таким образом, для построения зависимости динамических жесткостей балок от частоты нужно знать только корни данных уравнений, которые могут быть найдены численно с помощью стандартной программы отыскания комплексных корней полинома.

На рис. 2, а, б изображены соответственно зависимости действительных и мнимых частей $\chi_{eq}^T(\omega)$ и $\chi_{eq}^{БЭ}(\omega)$ для случая неподвижной нагрузки ($\alpha = 0$). При расчетах использованы безразмерные параметры $\gamma = 2,89$, $\eta = 200$, $\nu_1 = 0,05$. На рис. 2 видно, что суще-

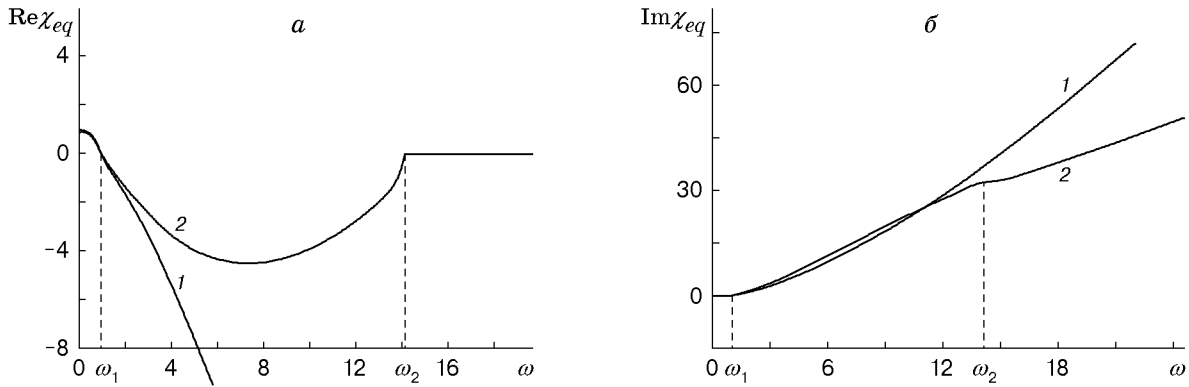


Рис. 2

ствует два критических значения частоты ω_1, ω_2 , при переходе через которые поведение $\chi_{eq}^T(\omega)$ (кривые 2) меняется (для $\chi_{eq}^{B\Theta}(\omega)$ (кривые 1) бифуркационной частотой является только ω_1 , равная единице при стремлении вязкости основания к нулю). В интервале частот $\omega < \omega_1$ мнимая часть жесткостей близка к нулю, а действительная положительна, т. е. реакция балки близка к чисто упругой. При переходе через частоту ω_1 мнимая часть эквивалентных жесткостей быстро растет, а действительная меняет знак, т. е. данные функции становятся существенно комплекснозначными, причем их мнимые части отражают диссипативный характер реакции балки, а действительные, являясь отрицательными, — инерционный. Достигнув частоты ω_2 , действительная часть $\chi_{eq}^T(\omega)$ обращается в нуль, а мнимая продолжает расти. Следовательно, в этом интервале частот реакция балки Тимошенко является чисто вязкой в том смысле, что контактная сила эквивалентна реакции демпфера с частотно-зависимой вязкостью.

Физический смысл критических значений частоты ω_1 и ω_2 легко понять, если рассмотреть кинематику волн, возбуждаемых нагрузкой вида $P \exp(i\omega t)$, движущейся по балке со скоростью V [10]. Как известно, волновые числа k и частоты ω_B возбуждаемых такой нагрузкой волн удовлетворяют соотношению $\omega_B - kV = \omega$, называемому кинематическим инвариантом [10] и означающему равенство фаз излучаемых волн фазе колебаний нагрузки. Кроме того, k и ω_B связаны дисперсионным соотношением, которое можно получить, подставляя в уравнения (1) и (6) с нулевыми правыми частями вертикальное отклонение балки и угол поворота ее сечения в виде $U(x, t) = A \exp[i(\omega_B t - kx)]$, $\varphi(x, t) = B \exp[i(\omega_B t - kx)]$. Для балок Бернулли — Эйлера и Тимошенко соответственно имеем

$$k^4 \gamma - \eta \omega_B^2 + \eta = 0, \quad \omega_B^4 + (-\gamma k^2 - \eta - 1 - k^2) \omega_B^2 + \gamma k^4 + \gamma k^2 + \eta = 0.$$

На плоскости (k, ω_B) дисперсионные уравнения определяют некоторые кривые, а кинематическому инварианту соответствует прямая, пересекающая ось ω_B в точке $\omega_B = \omega$. При этом угол между этой прямой и осью волновых чисел определяется скоростью движения объекта $V = \tan \alpha$. Фиксируя скорость движения V (наклон прямой) и варьируя частоту колебаний нагрузки ω , можно проанализировать зависимость кинематических характеристик излучаемых волн от частоты колебаний нагрузки. Такой анализ позволит понять поведение динамических жесткостей $\chi_{eq}^T(\omega)$ и $\chi_{eq}^{B\Theta}(\omega)$, представляющих собой отношение амплитуды нагрузки к комплексной амплитуде смещения балок в точке контакта.

На рис. 3 представлены дисперсионные кривые для балки Бернулли — Эйлера (кривые 1), балки Тимошенко (кривые 2) при различных частотах ω и прямые, соответствующие кинематическому инварианту для $\alpha = 0$. Можно показать, что при критических значениях частоты ω_1 и ω_2 прямые, соответствующие кинематическому инварианту, касаются одной из дисперсионных кривых. При $0 < \omega < \omega_1$ эти дисперсионные кривые и

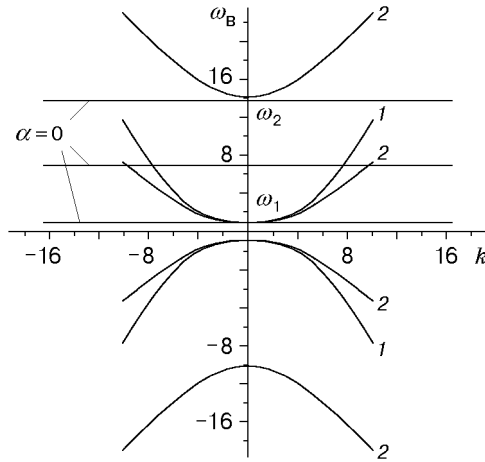


Рис. 3

прямые не имеют общих точек. Следовательно, волны в балках не возбуждаются, и диссипация энергии в точке контакта обусловлена лишь потерями за счет вязкости упругого основания. Полагаем, что эти потери достаточно малы, поэтому и мнимые части эквивалентных жесткостей оказываются практически равными нулю. При $\omega \approx \omega_1$ в системе имеет место резонанс (балка колеблется как твердое тело), т. е. конечным амплитудам возмущений соответствует бесконечно большое смещение (в пренебрежении вязкостью основания). Очевидно, что в этом случае эквивалентная жесткость, представляющая собой отношение силы к перемещению, обращается в нуль. При $\omega_1 < \omega < \omega_2$ в балках возбуждаются две волны, что обуславливает отвод энергии от точки контакта и привносит в эквивалентную жесткость существенную мнимую часть. С дальнейшим ростом частоты ситуация для балки Бернулли — Эйлера качественно не меняется. Для балки же Тимошенко существует еще одна критическая частота ω_2 , при переходе через которую поле смещений балки становится чисто волновым, что обуславливает вязкий характер реакции балки.

На рис. 4, а, б изображены соответственно зависимости действительных и мнимых частей $\chi_{eq}^T(\omega)$ и $\chi_{eq}^{БЭ}(\omega)$ при $\alpha = 0,5$ (остальные параметры здесь и далее такие же, как при $\alpha = 0$). (Обозначения кривых на рис. 4, 5 те же, что на рис. 2.) Различие кривых при $\alpha = 0$ и $\alpha = 0,5$ состоит в том, что при приближении к частоте ω_2 действительная часть кривых $\chi_{eq}^T(\omega)$, соответствующих $\alpha = 0,5$, меняет знак и становится положительной,

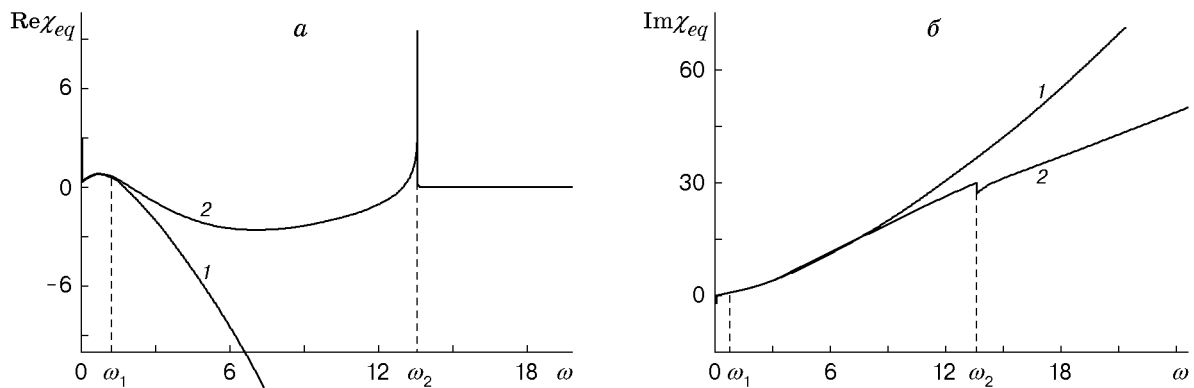


Рис. 4

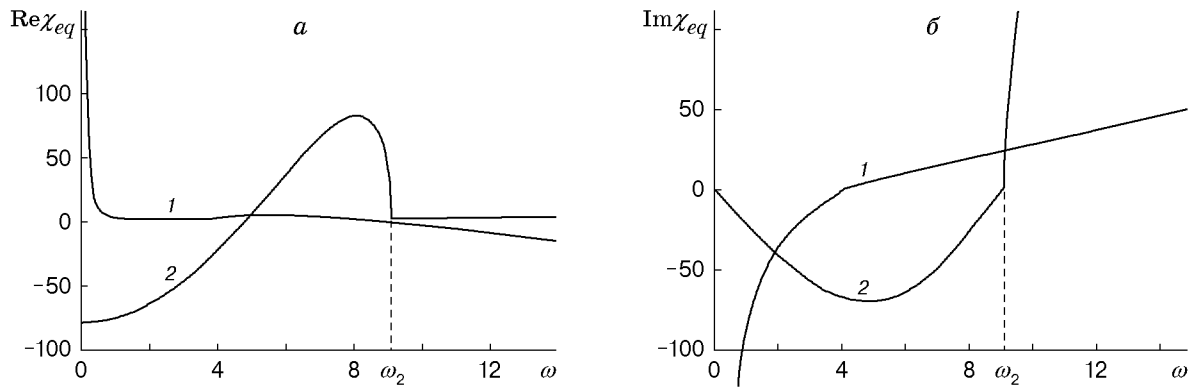


Рис. 5

т. е. появляется узкий интервал частот колебаний, в котором реакция балки Тимошенко имеет вязкоупругий характер. Заметим, что значения ω_1 и ω_2 в случаях $\alpha = 0,5$ и $\alpha = 0$ различны. При $\omega < \omega_1$ волны не возбуждаются, при $\omega_1 < \omega < \omega_2$ излучаются две волны, а при $\omega > \omega_2$ — четыре (только в балке Тимошенко).

На рис. 5, а, б представлены соответственно зависимости действительных и мнимых частей динамических жесткостей балок от частоты для $\alpha = 1,4$. Особенностью этого случая является существование интервала частот $\Delta\omega_{us}$, в котором мнимые части эквивалентных жесткостей отрицательны. Другими словами, реакция балки в движущемся контакте эквивалентна реакции упруговязкого элемента, вязкость которого зависит от частоты и при $\omega \in \Delta\omega_{us}$ отрицательна. С физической точки зрения это означает, что в данном интервале частот реакция балки сонаправлена со скоростью вертикального перемещения объекта. При этом гармонические колебания объекта с частотами $\omega \in \Delta\omega_{us}$ являются неустойчивыми (амплитуда колебаний начинает возрастать). Причиной такой неустойчивости, хорошо известной в физике и акустике [3, 11], а применительно к механическим системам впервые описанной в [4], является излучение аномальных, по Доплеру, волн (волн с “отрицательной частотой”). Эти волны излучаются в случае движения излучателя со скоростью, превышающей наименьшую фазовую скорость волн в среде, и обладают следующей особенностью: тормозя излучатель, они увеличивают его внутреннюю энергию. Для механических систем это означает, что амплитуда колебаний движущегося объекта растет во времени. Механизм этого нарастания подробно объяснен в [5].

Отметим принципиальные моменты, связанные с “отрицательной вязкостью” балки в точке контакта ($\text{Im} \chi_{eq}^T(\omega) < 0$) и неустойчивостью колебаний движущегося объекта.

1. Наличие интервала частот, в котором имеет место “отрицательная вязкость”, является лишь необходимым условием неустойчивости. Достаточным условием неустойчивости служит наличие собственных частот колебаний объекта, мнимая часть которых отрицательна. Эти частоты зависят не только от параметров балки и скорости движения объекта, но и от его упругоинерционных свойств и должны определяться в каждом случае. Наиболее подходящим для анализа собственных частот колебаний объекта, движущегося по распределенной упругой системе, на наш взгляд, является метод D -разбиений [12], примененный к данному классу задач в [4–6].

2. Если неустойчивость имеет место, то энергия, необходимая для “раскачки” колебаний, поступает из источника (горизонтальной силы, приложенной к объекту), поддерживающего равномерное движение объекта. Отметим, что из-за наличия вязкости в основании балки эта сила отлична от нуля при любых скоростях движения объекта. Однако только при превышении объектом минимальной фазовой скорости волн в балке работа этой силы может быть направлена на увеличение вертикальных колебаний объекта.

Re χ_{eq}	Im χ_{eq}	Модель	Re χ_{eq}	Im χ_{eq}	Модель	Re χ_{eq}	Im χ_{eq}	Модель
> 0	> 0		< 0	> 0		0	> 0	
> 0	< 0		< 0	< 0		0	< 0	

Возвращаясь к сравнению жесткостей балок Тимошенко и Бернулли — Эйлера, необходимо отметить, что при $\alpha = 1,4$ они качественно различны. Следовательно, при расчете колебаний “закритически” движущегося объекта более простая модель балки Бернулли — Эйлера не используется.

При скорости движения объекта, превышающей скорость продольных волн в балке Тимошенко ($V > c_p \Leftrightarrow \alpha > \sqrt{7} = \sqrt{2,89}$), эквивалентная жесткость балки Бернулли — Эйлера качественно не меняется, а жесткость балки Тимошенко обращается в бесконечность. Это связано с тем, что при $V > c_p$ все излучаемые движущимся объектом волны распространяются за ним. При этом балка перед объектом и под ним не возмущена. Следовательно, ненулевой силе, действующей со стороны объекта на балку, соответствует ее нулевое смещение, что равносильно $\chi_{eq}^T(\omega) \rightarrow \infty$.

Из проведенного анализа следует, что реакция балки на гармоническое воздействие, осуществляемое в точке контакта, эквивалентна реакции сосредоточенного элемента, динамическая жесткость которого является комплекснозначной функцией частоты возмущения и скорости движения этой точки. Действительная часть динамической жесткости определяет упругоинерционные свойства реакции балки, а мнимая — вязкостные. В таблице представлены возможные эквивалентные модели реакции балки в зависимости от знака Re χ_{eq} и Im χ_{eq} . Положительная действительная часть жесткости моделируется пружиной, отрицательная — массой. Наличие мнимой части динамической жесткости моделируется демпфером. Для того чтобы подчеркнуть возможность появления “отрицательной вязкости”, при Im $\chi_{eq} < 0$ демпфер изображен перевернутым. Заметим, что свойства каждого элемента зависят от частоты колебаний и скорости движения точки контакта.

Один из основных выводов работы заключается в том, что динамическая вязкость балки в движущейся точке контакта может быть отрицательной. Наличие интервала частот колебаний, в котором вязкость отрицательна, является необходимым условием возникновения неустойчивости колебаний движущегося по балке объекта. Следовательно, зная динамическую жесткость балки, можно априори утверждать, возможна ли неустойчивость (нежелательный для практики режим) в таких системах, как движущееся колесо поезда — рельсовый путь или движущийся пантограф — контактная подвеска.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Knothe K., Grassie S. L.** Modeling of railway track and vehicle. Track interaction at high frequencies // Vehicle System Dynamics. 1993. V. 22. P. 209–262.
2. **Popp K., Kruse H., Kaiser I.** Vehicle-track dynamics in the mid-frequency range // Vehicle System Dynamics. 1999. V. 31. P. 423–464.

3. **Гинзбург В. Л.** Теоретическая физика и астрофизика. М.: Наука, 1975.
4. **Денисов Г. Г., Новиков В. В., Кугушева Е. К.** К задаче об устойчивости одномерных безграничных систем // Прикл. математика и механика. 1985. Т. 49. С. 691–696.
5. **Метрикин А. В.** Неустойчивость поперечных колебаний объекта, равномерно движущегося вдоль упругой направляющей как следствие аномального эффекта Доплера // Акуст. журн. 1994. Т. 40, № 1. С. 99–103.
6. **Metrikine A. V., Popp K.** Instability of vibrations of an oscillator moving along a beam on an elastic half-space // European J. Mech. Solids. 1999. V. 18, N 3. P. 331–349.
7. **Achenbach J. D.** Wave propagation in elastic solids. Amsterdam; L.: North-Holland Publ. Co, 1973.
8. **Dean G. D.** The response of an infinite railroad track to a moving vibrating mass // Trans. ASME. J. Appl. Mech. 1990. V. 57. P. 66–73.
9. **Лаврентьев М. А., Шабат Б. В.** Методы теории функций комплексного переменного. М.: Наука, 1973.
10. **Весницкий А. И.** Волновые эффекты в упругих системах // Волновая динамика машин. М.: Наука, 1991.
11. **Гапонов-Грехов А. В., Долина И. С., Островский А. А.** Аномальный эффект Доплера и радиационная неустойчивость движения осцилляторов в гидродинамике // Докл. АН СССР. 1983. Т. 268. С. 827–831.
12. **Неймарк Ю. И.** Динамические системы и управляемые процессы. М.: Наука, 1978.

*Поступила в редакцию 8/XII 1999 г.,
в окончательном варианте — 12/IV 2000 г.*
