ПМТФ, № 4, 1963

РАСЧЕТ НАЧАЛЬНОЙ СТАДИИ ТОЧЕЧНОГО ВЗРЫВА В РАЗЛИЧНЫХ ГАЗАХ

В. П. Коробейников, П. И. Чушкин

(*Москва*)

Одномерная автомодельная задача о сильном точечном взрыве в газе была решена аналитически Л. И. Седовым [1] (см. также [2,3]). При этом предполагалось, что можно пренебречь начальным давлением газа по сравнению с давлением непосредственно за фронтом ударной волны. Решение неавтомодельной задачи о взрыве с учетом противодавления можно найти численными методами с помощью электронных вычислительных машин. Для сферически-симметричного течения совершенного газа с показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ такое решение было получено, например, в [4].

В начальной стадии, когда взрывная волна является еще достаточно сильной, решение задачи о взрыве с противодавлением можно определять методом линеаризации относительно известного автомодельного решения. Линеаризированные решения, построенные для различных совершенных газов с постоянным γ, помимо непосредственного применения для расчета начальной стадии взрыва, имеют еще и другие приложения. Они позволяют просто проводить обобщения на случаи, когда линеаризация осуществляется по другим параметрам (переменная плотность, магнитное поле, изменение уравнения состояния и т. д.), входя в соответствующие решения в виде слагаемых. Линеаризированная теория взрыва может применяться также для аналитического или численного расчета взаимодействия ударных волн с преградами и для расчета гиперзвукового обтекания тонких затупленных тел. Наконец, результаты линеаризированного решения можно использовать для задания начальных данных при расчете полной неавтомодельной задачи приближенными аналитическими или численными методами.

В линеаризированной постановке задача о взрыве с противодавлением в газе с постоянной плотностью и показателем адиабаты $\gamma = 1.4$ была рассмотрена в работах [2,5,6] [1]. Линеаризированная одномерная задача о взрыве в газе с переменной плотностью изучена в [3,7].

Ниже рассматривается численное решение линеаризированной задачи о взрыве с учетом противодавления для широкого диапазона значений γ в случаях плоских, цилиндрических и сферических волн. Результаты проведенных расчетов подготовлены в виде соответствующих таблиц, содержащих как автомодельные, так и линеаризированные функции. Кроме того, в работе дается приложение рассчитанных линеаризированных решений теории взрыва к вопросам гиперзвукового обтекания затупленных тонких тел газами с различными значениями γ.

1. Основные уравнения задачи. В задаче о взрыве с противодавлением определяющими параметрами являются начальные плотность и давление газа ρ_1 и p_1, выделившаяся при взрыве энергия E_0, показатель адиабаты γ, координата r и время t. Эти параметры показывают, что при заданной симметрии решение будет зависеть только от γ и от двух безразмерных переменных, за которые примем

$$x = \frac{r}{r_2}, \qquad y = \frac{a_1^2}{c^2} \qquad \left(c = \frac{dr_2}{dt}, \; \begin{matrix} 0 \leqslant x \leqslant 1 \\ 0 \leqslant y \leqslant 1 \end{matrix}\right) \tag{1.1}$$

где r_2 — радиус ударной волны, c — ее скорость, a_1 — скорость звука в невозмущенном газе.

В качестве искомых функций будем рассматривать безразмерные скорость f, плотность g и давление h

$$f = \frac{v}{c}, \qquad g = \frac{\rho}{\rho_1}, \qquad h = \frac{yp}{p_1} \tag{1.2}$$

---

[1] В работе [2] приводится решение Н. С. Мельниковой.

Иногда [2, 3] вводят иные безразмерные функции, относя их к величинам на ударной волне v_2, ρ_2, p_2. Такие функции связаны с функциями (1.2) через соотношения на ударной волне

$$\frac{v_2}{c} = \frac{2}{\gamma+1}(1-y), \qquad \frac{\rho_2}{\rho_1} = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2y}, \qquad \frac{p_2}{p_1} = \frac{2\gamma-(\gamma-1)y}{(\gamma+1)y} \tag{1.3}$$

Кроме того, искомыми функциями являются еще безразмерный радиус ударной волны R_2 и безразмерное время τ

$$R_2 = \frac{r_2}{r^\circ}, \qquad \tau = \frac{t}{t^\circ}, \qquad r^\circ = \left(\frac{E_0}{p_1}\right)^{1/\nu}, \qquad t^\circ = r^\circ\left(\frac{\rho_1}{p_1}\right)^{1/2}$$

Здесь r° и t° соответственно динамические длина и время, причем $\nu = 1, 2, 3$ соответственно для плоского, цилиндрического и сферического случаев.

Система дифференциальных уравнений, описывающих одномерные неустановившиеся движения совершенного газа, в безразмерных переменных (1.1) и (1.2) имеет вид [2, 3]

$$(f-x)\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{1}{\gamma g}\frac{\partial h}{\partial x} - \frac{\eta f}{2y} = 0 \qquad \left(\eta = R_2\frac{dy}{dR_2}\right)$$

$$g\frac{\partial f}{\partial x} + (f-x)\frac{\partial g}{\partial x} + \eta\frac{\partial g}{\partial y} + \frac{(\nu-1)gf}{x} = 0 \tag{1.4}$$

$$\gamma h\frac{\partial f}{\partial x} + (f-x)\frac{\partial h}{\partial x} + \eta\frac{\partial h}{\partial y} - h\left[\frac{\eta}{y} - \frac{(\nu-1)\gamma f}{x}\right] = 0$$

Эта система служит для определения функций $f(x,y)$, $g(x,y)$, $h(x,y)$. Для системы (1.4) имеют место следующие краевые условия:

на ударной волне (при $x = 1$) (1.5)

$$f(1,y) = \frac{2}{\gamma+1}(1-y), \qquad g(1,y) = \frac{\gamma+1}{\gamma-1+2y}, \qquad h(1,y) = \frac{2\gamma-(\gamma-1)y}{\gamma+1}$$

в центре симметрии (при $x = 0$)

$$f(0,y) = 0 \tag{1.6}$$

Начальные условия (при $y = 0$) выражаются так:

$$f(x,0) = f_0(x), \qquad g(x,0) = g_0(x), \qquad h(x,0) = h_0(x)$$

где $f_0(x)$, $g_0(x)$, $h_0(x)$ — функции, отвечающие автомодельному решению.

Четвертое краевое условие (1.6) позволяет определить радиус ударной волны $R_2(y)$. Эту функцию можно найти также по интегральному закону сохранения энергии, являющемуся следствием системы уравнений (1.4) и краевых условий (1.5)—(1.6). После этого зависимость $\tau(y)$ вычисляется квадратурой по уравнению

$$\frac{d\tau}{dy} = \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{1/2}\frac{dR_2}{dy}$$

Для начальной стадии взрыва с противодавлением (т. е. для малых y) решение можно представить в такой форме:

$$f(x,y) = f_0(x) + yf_1(x) + \ldots, \qquad g(x,y) = g_0(x) + yg_1(x) + \ldots \tag{1.7}$$

$$h(x,y) = h_0(x) + yh_1(x) + \ldots, \qquad \frac{R_2}{y}\frac{dy}{dR_2} = \frac{\nu}{1 + A_1 y + \ldots}$$

где A_1 — постоянная, подлежащая определению. Если разложения (1.7) подставить в систему уравнений (1.4) и в краевые условия (1.5)—(1.6), пренебречь членами порядка y^2 и выше, а затем приравнять нулю члены при одинаковых степенях y, то получим системы обыкновенных дифференциальных уравнений и краевые условия для автомодельной и линеаризированной задач.

В работе [8] был проведен учет членов порядка y^2. По этому поводу можно заметить следующее. Область сходимости представлений (1.7), рассматриваемых как ряды по y, еще не выяснена. Во всяком случае, можно определенно сказать, что решение в виде такого ряда будет расходиться при $y \geqslant (\gamma - 1) / 2$. Последнее следует из того, что разложение для функции $g(y, 1)$ сходится лишь при $y < (\gamma - 1) / 2$. Таким образом, при $\gamma < 2$ такие представления для функций можно использовать только при малых значениях y. Но при малых значениях y учет членов порядка y^2 вряд ли позволит существенно улучшить линеаризированное решение.

Система дифференциальных уравнений для автомодельных функций имеет следующий вид:

$$\Omega f_0' + \frac{1}{\gamma g} h_0' - \frac{\nu}{2} f_0 = 0, \qquad f_0' + \frac{\Omega}{g_0} g_0' + \frac{\nu - 1}{x} f_0 = 0 \qquad (1.8)$$

$$\gamma f_0' + \frac{\Omega}{h_0} h_0' + \frac{(\nu - 1)\gamma}{x} f_0 - \nu = 0 \qquad (\Omega = f_0 - x)$$

Здесь, как и всюду в дальнейшем, штрихом обозначены производные по x. Систему (1.8) можно получить также из системы (1.4) предельным переходом при $y \to 0$. Краевые условия для системы (1.8) будут

$$f_0(1) = \frac{2}{\gamma + 1}, \qquad g_0(1) = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1}, \qquad h_0(1) = \frac{2\gamma}{\gamma + 1}, \qquad f_0(0) = 0$$

Введем вместо x новую независимую переменную μ, такую, что

$$x = \mu^{-\delta} u_1^{\beta_2} u_2^{-\beta_1} \qquad \left(\mu = \mu_0 = \frac{\gamma + 1}{2\gamma} \text{ при } x = 0, \ \ \mu = 1 \text{ при } x = 1\right) \qquad (1.9)$$

Как известно [1-3], для $\gamma \neq 2$ решение системы (1.8), т. е. решение автомодельной задачи для сильного взрыва, можно с помощью параметрической переменной μ записать в форме

$$f_0 = \frac{2}{\gamma + 1} \mu x, \qquad g_0 = \frac{\gamma + 1}{\gamma - 1} u_1^{\beta_3} u_2^{\beta_4} u_3^{-\beta_5}, \qquad h_0 = \frac{2\gamma}{\gamma + 1} \mu^{\nu\delta} u_2^{\beta_4 - 2\beta_1} u_3^{1 - \beta_5} \qquad (1.10)$$

Случай $\gamma = 2$ является специальным, и здесь для g_0 и h_0 имеем

$$g_0 = 3\varkappa u_1^{\delta\nu/2} u_3^{\delta(\nu - 2)/2}, \qquad h_0 = \frac{4}{3} \varkappa \mu^{\delta\nu} u_3^{\delta(\nu - 2)} \qquad (1.11)$$

В формулах (1.9) — (1.11) приняты следующие обозначения:

$$u_1 = \frac{2\gamma}{\gamma - 1}\left(\mu - \frac{\gamma + 1}{2\gamma}\right), \qquad u_2 = \frac{\nu\gamma - \nu + 2}{3\nu - 2 - \gamma(\nu - 2)}\left[\frac{(\gamma + 1)(\nu + 2)}{\nu\gamma - \nu + 2} - 2\mu\right]$$

$$u_3 = \frac{2}{\gamma - 1}\left(\frac{\gamma + 1}{2} - \mu\right), \qquad \varkappa = \exp\left(6\delta \frac{\mu - 1}{3 - 2\mu}\right), \qquad \delta = \frac{2}{\nu + 2}$$

$$\beta_1 = \beta_2 + \frac{\gamma + 1}{\nu\gamma - \nu + 2} - \delta, \qquad \beta_2 = \frac{\gamma - 1}{2\gamma - 2 + \nu}, \qquad \beta_3 = 1 - 2\beta_2$$

$$\beta_4 = \frac{\nu + 2}{2 - \gamma} \beta_1, \qquad \beta_5 = \frac{2}{2 - \gamma}$$

Величины же $R_2(y)$ и $\tau(y)$ в автомодельной задаче находятся по выражениям

$$R_{20}^{\nu} = \frac{\delta^2}{\gamma\alpha} y, \qquad \tau_0 = \left(\frac{y}{\gamma}\right)^{1/2} R_{20}\delta$$

где постоянная α определяется по формуле

$$\alpha = \frac{8[2\pi(\nu-1)+(\nu-2)(\nu-3)]}{(\nu+2)^2(\gamma-1)} \int_0^1 \frac{h_0 \mu x^{\nu-1} dx}{u_3}$$

Эта формула следует из интегрального закона сохранения энергии в автомодельном случае.

Система линейных дифференциальных уравнений для определения функций $f_1(x)$, $g_1(x)$, $h_1(x)$ и постоянной A_1 в линеаризированной задаче имеет следующий вид:

$$g_0\Omega f_1' + \frac{h_1'}{\gamma} + \left(\frac{\nu}{2} + f_0'\right) g_0 f_1 - \left[\frac{\nu f_0}{2} - \Omega f_0'\right] g_1 + \frac{\nu}{2} g_0 f_0 A_1 = 0$$

$$g_0 f_1' + \Omega g_1' + \left(g_0' + \frac{\nu-1}{x} g_0\right) f_1 + \left(f_0' + \frac{\nu-1}{x} f_0 + \nu\right) g_1 = 0 \quad (1.12)$$

$$\gamma h_0 f_1' + \Omega h_1' + \left(h_0' + \frac{\nu-1}{x} \gamma h_0\right) f_1 - \left(f_0' + \frac{\nu-1}{x} f_0\right) \gamma h_1 + \nu h_0 A_1 = 0$$

Краевые условия для этой системы будут (1.13)

$$f_1(1) = -\frac{2}{\gamma+1}, \qquad h_1(1) = -\frac{\gamma-1}{\gamma+1}, \qquad g_1(1) = -\frac{2(\gamma+1)}{(\gamma-1)^2}, \qquad f_1(0) = 0$$

Последнее из этих условий служит для нахождения постоянной A_1. Для функций $R_2(y)$ и $\tau(y)$ в линеаризированной задаче получим

$$R_2^{\nu} = R_{20}^{\nu} \exp(A_1 y), \qquad \tau = \tau_0 \left[1 + \frac{\nu\delta + 2}{2\nu\delta(\nu\delta+1)} A_1 y\right] \quad (1.14)$$

Эти соотношения дают в параметрической форме закон движения ударной волны, т. е. функцию $R_2(\tau)$. Пользуясь уравнениями (1.14) и соотношениями на ударной волне (1.3), можно определить зависимость всех характеристик на фронте ударной волны от радиуса или времени. Например, для отношения давлений p_2 / p_1 в функции от R_2 имеем

$$\frac{p_2}{p_1} = \frac{\gamma-1}{\gamma+1} + \frac{2\gamma}{\gamma+1}\left(A_1 + \frac{\delta^2}{\gamma\alpha} R_2^{-\nu}\right)$$

2. Решение линеаризированной задачи. Решение сводится к численному интегрированию системы (1.12) при условиях (1.13). Рассмотрим лишь случаи, когда γ находится в пределах $1 < \gamma < 7$. Заметим, что при $\gamma = 7$ задача имеет точное аналитическое решение [3].

Чтобы придать системе (1.12) вид, удобный для численных расчетов, введем новые искомые функции $F(x)$, $G(x)$ и $H(x)$, связанные с функциями $f_1(x)$, $g_1(x)$ и $h_1(x)$ соотношениями

$$f_1 = \Omega F, \qquad g_1 = g_0 G, \qquad h_1 = h_0 H$$

После преобразований система (1.12) примет вид

$$\Omega F' - \frac{h_0}{\gamma g_0 \Omega} H' + \left(2f_0' + \frac{\nu-2}{2}\right) F - \left(f_0' - \frac{\nu}{2}\frac{f_0}{\Omega}\right)(G - H) - \frac{\nu}{2}\frac{f_0}{\Omega} A_1 = 0$$

$$\Omega(F' - G') - \nu(F + G) = 0 \quad (2.1)$$

$$\Omega(\gamma F' - H') - \nu[(\gamma-1)F + H + A_1] = 0$$

Условия же (1.13) запишутся так: (2.2)

$$F(1) = -\frac{2}{\gamma-1}, \qquad G(1) = -\frac{2}{\gamma-1}, \qquad H(1) = -\frac{\gamma-1}{2\gamma}, \qquad F(0) = F_0$$

где постоянная F_0 зависит только от γ и ν (см. ниже формулы (2.5)).

Как известно (см., например, [3]), система (2.1) имеет интеграл, который с учетом условий (2.2) можно представить в форме

$$F + (2\gamma - 1)\, G - 2H - 2A_1 = -\left(2A_1 + \frac{3\gamma-1}{\gamma}\frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) J(\mu) \qquad (2.3)$$

где

$$J(\mu) = \frac{2\gamma}{(\gamma+1)\, h_0}\left(\frac{\gamma-1}{\gamma+1} g_0\right)^{\gamma}$$

Перейдем теперь в системе (2.1) к независимой переменной μ, определенной равенством (1.9). Полученная в результате система уравнений может быть приведена к следующему виду:

$$\frac{dF}{d\mu} = \left[(\gamma - 1)\, F + H - \frac{\gamma\lambda\omega}{\nu}\, \Phi_1 + \left(1 + \frac{\gamma}{\gamma+1}\lambda\mu\right) A_1\right] \frac{\nu\Phi_2}{\gamma\omega\, (\lambda\omega - 1)}$$

$$\frac{dG}{d\mu} = \frac{dF}{d\mu} + \frac{\nu\Phi_2}{\omega}(F + G) \qquad (2.4)$$

$$\frac{dH}{d\mu} = \gamma\frac{dF}{d\mu} + \frac{\nu\Phi_2}{\omega}\left[(\gamma - 1)\, F + H + A_1\right]$$

Здесь

$$\lambda = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\left(\mu - \frac{\gamma+1}{2\gamma}\right)\frac{1}{\mu^2}, \qquad \omega = 1 - \frac{2\mu}{\gamma+1}$$

$$\Phi_1 = -\left[\frac{4}{\gamma+1}\left(\mu + \frac{1}{\Phi_2}\right) + \frac{\nu-2}{2}\right] F + \left[\frac{2}{\gamma+1}\left(\mu + \frac{1}{\Phi_2}\right) + \frac{\nu}{\gamma+1}\frac{\mu}{\omega}\right](G - H)$$

$$\Phi_2 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\frac{\beta_2}{\lambda\mu^2} - \frac{\delta\beta_1}{\delta\,(\mu-1) - \beta_1 + \beta_2} - \frac{\delta}{\mu}$$

В окрестности центра взрыва для искомого решения системы (2.4) могут быть указаны [3, 5] следующие асимптотические формулы:

$$F = F_1 + B\,(a_{01} + a_{11} x^k) + O\,(x^{2k})$$

$$G = G_1 + \frac{B\,[2 - a_{01} + (2b_{11} - a_{11})\, x^k]}{2\gamma - 1} - \left(\frac{2A_1}{2\gamma-1} + \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\right) J(\mu_0) - O\,(x^{2k})$$

$$H = H_1 + B\,(1 + b_{11} x^k) + O\,(x^{2k}) \qquad (2.5)$$

где F_1, G_1, H_1 не зависят от x и представляют собой частное решение системы (2.4), B — произвольная постоянная, $k = 1/\beta_2$. При $1 < \gamma < 7$ (исключая случай $\gamma = 2$) постоянные, входящие в (2.5), имеют вид

$$a_{01} = -\frac{1}{\gamma-1}, \qquad a_{11} = \frac{(\gamma - 1 - n)\, b_{11}}{(\gamma-1)(\gamma+n)}, \qquad b_{11} = [m\,(\gamma - 1) + l]\,\frac{D_0}{\gamma h(\mu_0)}$$

$$n = \nu\gamma\beta_2, \qquad m = \beta_2\frac{3-2\gamma}{2\gamma-1}\left(1 + \frac{\nu}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)$$

$$l = \beta_2\left[2 + \frac{\nu-2}{2}\gamma + \frac{1}{2\gamma-1}\left(1 + \frac{\nu}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\right]$$

$$D_0 = \frac{\gamma+1}{\gamma-1}\,[u_2(\mu_0)]^a\,[u_3(\mu_0)]^{-\beta_5}\,\mu_0{}^b \qquad \left(a = \frac{\beta_1}{\beta_2\,(2-\gamma)},\ b = \frac{\delta\beta_3}{\beta_2}\right)$$

$$F_1 = -G_1 = \left[2 + \frac{\nu-2}{2}\gamma - (\gamma - 2)\left(1 + \frac{\nu}{2}\frac{\gamma}{\gamma-1}\right)\right]^{-1} A_1$$

$$H_1 = -A_1 - (\gamma - 1)\, F_1$$

При $\gamma = 2$ изменится лишь формула для D_0

$$D_0 = 3\varkappa(\mu_0)\,[u_2(\mu_0)]^{a'}\,[u_3(\mu_0)]^{c'}\,\mu_0^{b'}$$

$$\left(a' = \frac{\nu}{\nu+2}\frac{\beta_1}{\beta_2},\quad c' = \frac{\nu-2}{\nu+2},\quad b' = \frac{\delta\nu}{\beta_2(\nu+2)}\right)$$

Для численного интегрирования системы дифференциальных уравнений (2.4) применялся следующий метод. Задавалось некоторое начальное значение постоянной A_1 (практически это значение принималось близким к 2). Далее дифференциальные уравнения (2.4) интегрировались численно методом Рунге — Кутта с переменным шагом от $\mu = 1$ до некоторого $\mu = \mu_1$ ($\mu_0 < \mu_1 < 1$). Это значение μ_1 выбиралось как граница применимости асимптотических формул (2.5). Условием для выбора величины μ_1 служило постоянство (с нужной точностью) констант, входящих в асимптотические формулы (2.5), при уменьшении μ_1. При значении $\mu = \mu_1$, которому соответствует $x = x_1$, вычислялась постоянная B из асимптотической формулы для F. Если эту величину обозначить через B_1, то тогда из (2.5) имеем

$$B_1 = \frac{F - F_1}{a_{01} + a_{11}x_1^k}$$

Одновременно при $\mu = \mu_1$ вычислялась постоянная B по асимптотической формуле для H

$$B_2 = \frac{H - H_1}{1 + b_{11}x_1^k}$$

Затем определялась разность величин $B_2 - B_1$ и проводилось исправление принятого начального значения A_1 таким образом, чтобы удовлетворялось условие

$$\left|\frac{B_2 - B_1}{B_1}\right| < \Delta$$

где Δ — заданное малое число. Процесс подбора величины A_1 легко автоматизируется при машинных расчетах и происходит очень быстро. В расчете с окончательно подобранным значением A_1 определялись наряду с функциями F, G, H также функции f_1, g_1, h_1 и все другие характеристики течения. Кроме того, во всех расчетах проводился контроль точности вычислений по выполнению интеграла (2.3).

Описанный численный метод решения линеаризированной задачи о взрыве с противодавлением отличается от методов, применявшихся в работах [2,5,6], и удобен при машинных расчетах.

3. **О результатах расчетов.** По изложенному выше методу была составлена программа для электронной вычислительной машины БЭСМ-2, позволяющая рассчитывать решение линеаризированной задачи о взрыве с противодавлением, в газах при различных значениях показателя адиабаты γ ($1<\gamma<7$) в плоском, цилиндрическом и сферическом случаях.

По этой программе была проведена большая серия расчетов для $\nu = 1, 2, 3$ и значений $\gamma = 1.1;\ 1.2;\ 1.3;\ 1.4;\ ^5/_3;\ 2;\ 3$. В этих расчетах помимо функций f_1, g_1, h_1 и постоянных A_1 определялись еще автомодельные функции f_0, g_0, h_0, а также функции:

$$e_0 = \frac{\gamma}{2} f_0^2 g_0 + \frac{h_0}{\gamma - 1}, \qquad e_1 = \gamma f_0 g_0 f_1 + \frac{\gamma}{2} f_0^2 g_1 + \frac{h_1}{\gamma - 1}$$

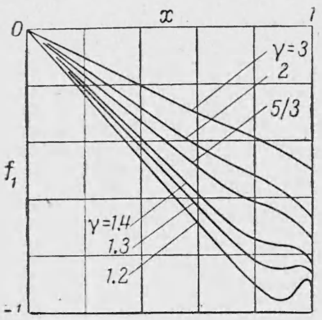
$$\theta_0 = \frac{h_0}{g_0}, \qquad \theta_1 = \frac{h_1 - \theta_0 g_1}{g_0}, \qquad \sigma_0 = \frac{h_0}{g_0^{\gamma}}, \qquad \sigma_1 = \frac{h_1 - \gamma\theta_0 g_1}{g_0^{\gamma}}$$

Последие функции служат для вычисления полной энергии, температуры и энтропии газа в линеаризированном приближении. Кроме того, рассчитанные данные позволяют определить импульс давления и другие интегральные характеристики, а также найти связь между эйлеровой и лагранжевой координатами (при помощи σ_0 и σ_1). Все указанные функции и константы, входящие в асимптотические формулы для определения этих функций вблизи центра взрыва (в окрестности $x = 0$), рассчитывались с точностью до пяти значащих цифр.

Таблица

ν	γ	1.1	1.2	1.3	1.4	$^5/_3$	2	3
1	α	4.5071	2.2392	1.4684	1.0775	0.60294	0.36499	0.14192
	A_1	2.3257	2.2437	2.1862	2.1433	2.0683	2.0143	1.9407
2	α	4.0007	2.0052	1.3280	0.98408	0.56429	0.35188	0.14440
	A_1	2.0866	2.0424	2.0092	1.9836	1.9374	1.9043	1.8632
3	α	3.4196	1.7198	1.1436	0.85108	0.49359	0.31200	0.13252
	A_1	2.0010	1.9666	1.9396	1.9182	1.8785	1.8496	1.8141

Ниже приводятся для иллюстрации лишь некоторые графики, содержащие отдельные результаты. На фиг. 1 дан график функции $f_1(x)$ для различных значений γ в сферическом случае, а на фиг. 2 — соответствующий график для $h_1(x)$. Изменение функций $h_1(x)$ при $\gamma = {}^5/_3$ в зависимости от ν представлено на фиг. 3. На фиг. 4 построены кривые относительного давления p/p_1 при $y = 0.1$ для различных γ и $\nu = 3$. В таблице приводятся значения постоянных α и A_1, найденные с точностью до пяти значащих цифр для ряда показателей адиабаты γ и $\nu = 1, 2, 3$.



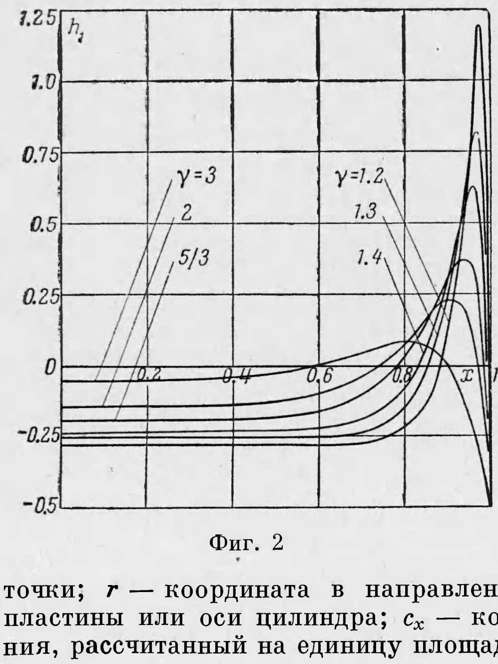
Фиг. 1

Представленные здесь результаты указывают на существенную зависимость решения от величины γ.

Известно, что результаты решения задачи о плоском и цилиндрическом точечном взрыве в газе могут быть использованы для приближенного определения ряда характеристик потока при стационарном гиперзвуковом обтекании тонких затупленных тел [9–11]. Сравнение результатов теории взрыва с численными расчетами обтекания затупленных тел гиперзвуковым потоком воздуха ($\gamma = 1.4$) проводилось, например, в работе [12] для случая автомодельной и линеаризированной задачи с учетом противодавления.

4. Приложение к расчетам обтекания тонких затупленных тел гиперзвуковым потоком газа. Рассмотрим приложение результатов полученного решения линеаризированной задачи о взрыве к расчету гиперзвукового обтекания затупленной пластины и цилиндра в случае различных газов и проведем сравнение с соответствующими данными, рассчитанными численным методом характеристик.

Пусть z — координата вдоль оси тела, измеряемая от его передней



Фиг. 2

Фиг. 3

точки; r — координата в направлении, перпендикулярном плоскости пластины или оси цилиндра; c_x — коэффициент сопротивления затупления, рассчитанный на единицу площади поперечного сечения тела и отнесенный к скоростному напору; d — поперечный размер затупления; U_1 — скорость набегающего потока, направленная вдоль оси z.

В соответствии с работой [9] при переходе от задачи о взрыве к задаче обтекания заменим нестационарные величины на стационарные, т. е. t и E_0 на zU_1 и $^1/_2\, c_x\rho_1 U_1^2\, (\pi/4)^{\nu-1} d^\nu$ соответственно. При этом безразмерные переменные $\zeta = z\,/\,d$, $\xi = r\,/\,d$ и τ, R связаны соотношениями

$$\tau = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \left(\frac{2}{\gamma^{1/\delta} c_x}\right)^{\frac{1}{\nu}} M_1^{-\frac{2}{\nu\delta}} \zeta, \qquad R = \left(\frac{4}{\pi}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \left(\frac{2}{\gamma c_x}\right)^{\frac{1}{\nu}} M_1^{-\frac{2}{\nu}} \xi \tag{4.1}$$

Здесь $M_1 = U_1\,/\,a_1$ — число Маха набегающего потока.

Используя результаты § 2 и 3, можно вывести формулы для распределения давления p_0 на поверхности тела и для формы ударной волны, которая описывается зависимостью $\xi = \xi_2\,(\zeta)$. При выводе этих формул, учитывая инвариантность решения для взрыва относительно преобразования сдвига по времени, будем предполагать, что взрыв произошел не в момент $\tau = 0$, а в момент $\tau = -\tau_*$. Величина τ_* соответствует ζ_* — расстоянию отхода ударной волны от передней точки затупления и вычисляется по формуле (4.1), где берется $\zeta = \zeta_*$.

Тогда в случае гиперзвукового обтекания затупленной пластины ($\nu = 1$) и затупленного цилиндра ($\nu = 2$) из выражений (1.7), (1.14) и (4.1) получим формулы, записанные через параметр y

$$\zeta = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\frac{\nu-1}{\nu}} \left(\frac{c_x}{2}\right)^{\frac{1}{\nu}} \left(\frac{\delta^2 M_1^2}{\alpha^\delta}\, y\right)^{\frac{1}{\nu\delta}} \left[1 + \frac{\nu\delta + 2}{2\nu\delta\,(\nu\delta+1)} A_1 y\right] - \zeta_*$$

$$\frac{p_0}{p_1} = \frac{h_{00}}{y} + h_{10}, \qquad \xi_2^{\,\nu} = \left(\frac{\pi}{4}\right)^{\nu-1} \frac{c_x}{2}\, \frac{\delta^2 M_1^2}{\alpha}\, y \exp\,(A_1 y) \tag{4.2}$$

Здесь p_0 — давление на теле, p_1 — давление в набегающем потоке, ξ_2 — ордината ударной волны, h_{00} и h_{10} — значения функций h_0 и h_1 в центре взрыва.

Для случая затупленного цилиндра формулы (4.2) при малых y можно записать в явном виде

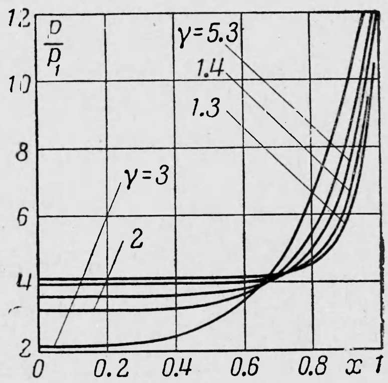
$$\frac{p_0}{p_1} = k_1 \frac{c_x^{1/2} M_1^2}{\zeta + \zeta_*} \left(1 + k_2 \frac{\zeta + \zeta_*}{c_x^{1/2} M_1^2}\right)$$

$$\xi_2 = k_3 c_x^{1/4}\, (\zeta + \zeta_*)^{1/2} \left(1 + k_4 \frac{\zeta + \zeta_*}{c_x^{1/2} M_1^2}\right)$$

где (4.3)

$$k_1 = \frac{h_{00}}{4} \left(\frac{\pi}{8\alpha}\right)^{1/2}, \quad k_2 = \frac{1}{k_1} \left(\frac{3}{4} A_1 h_{00} + h_{10}\right)$$

$$k_3 = \left(\frac{\pi}{8\alpha}\right)^{1/4}, \qquad k_4 = A_1 \left(\frac{2\alpha}{\pi}\right)^{1/2}$$



Фиг. 4

В соответствии с рассчитанным линеаризированным решением задачи о взрыве коэффициенты k_i имеют следующие значения:
для воздуха ($\gamma = 1.4$)

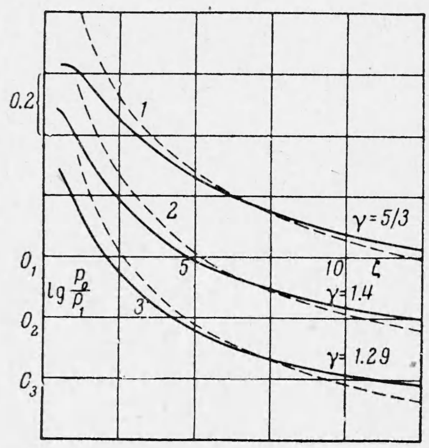
$$k_1 = 0.06871, \quad k_2 = 5.7871, \quad k_3 = 0.7948, \quad k_4 = 1.5700$$

для одноатомного газа ($\gamma = {}^5/_3$)

$$k_1 = 0.08382, \quad k_2 = 4.6305, \quad k_3 = 0.9134, \quad k_4 = 1.1612$$

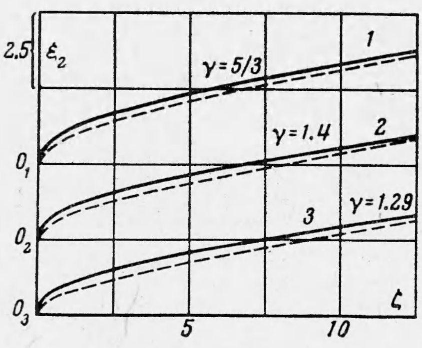
Чтобы установить границу применимости формул (4.2)—(4.3), надо сравнить полученные по ним результаты с данными точных численных расчетов задач обтекания. С этой целью были проведены расчеты течения около пластины и цилиндра, имевших затупление с круговым контуром, при различных значениях M_1 и γ. Смешанное течение перед носовой частью тела рассчитывалось по первому приближению метода интегральных соотношений [13], а сверхзвуковая часть области течения определялась численным методом характеристик [14].

Результаты сравнения представлены в виде графиков на фиг. 5—9, где пунктирной линией изображено линеаризированное решение теории взрыва (при этом значения c_x и ζ_* были взяты из численных расчетов), сплошной линией —численные расчеты обтекания тел, а точками — экспериментальные данные. На фиг. 5 и 6 соответственно показано распределение давления p_0/p_1 (в логарифмическом масштабе) и ударные волны для цилиндра с полусферической носовой частью при $M_1=10$ и различных значениях γ. Поскольку в этом случае кривые при различных γ оказались очень близки друг к другу, они построены со сдвигом начала координат. Аналогичные зависимости (но давление на этот раз отнесено к давлению торможения в передней точке тела p_*) для того же цилиндра при фиксированном значении $\gamma = {}^5/_3$ и значениях $M_1 = 10{,}18$ и ∞ приводятся на фиг. 7 и 8. На этих же графиках нанесены экспериментальные данные [15] для $M_1 = 18.1$ (распределение давления) и $M_1 = 21$ (ударная волна). Наконец, на фиг. 9 построено по переменной подобия $\chi = \zeta/c_x M_1^3$ распределение давления на затупленной плоской пластине в случае обтекания гелием ($\gamma = {}^5/_3$). Сравнение теории проводится здесь с экспериментальными данными [16].

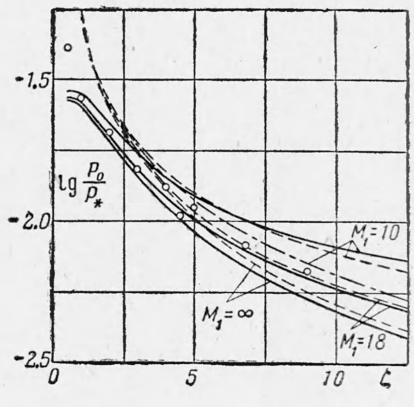


Фиг. 5

На фиг. 5—8 линеаризированное решение теории взрыва (пунктирные кривые) в цилиндрическом случае рассчитывалось по формулам (4.3). Интересно отметить, что этими формулами можно пользоваться для расчетов обтекания не только при малых y, где, строго говоря, лишь и справедливо линеаризированное решение, но также при больших y. Формулы (4.2) и (4.3) для ударных волн дают при этом близкие результаты. Полученное же по формуле (4.2) распределение давления для умеренных значений M_1



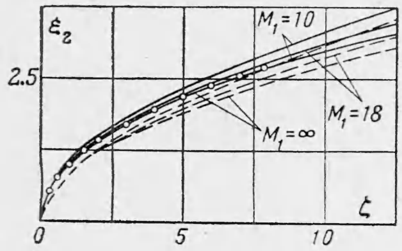
Фиг. 6



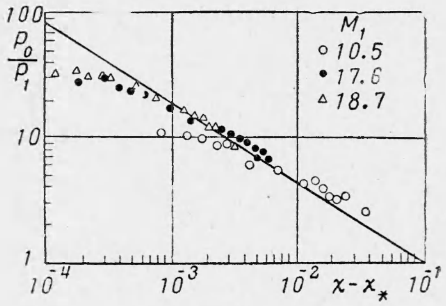
Фиг. 7

(см. на фиг. 7 штрих-пунктирную кривую для $M_1 = 10$) при больших y существенно отличается от результатов, которые дает соответствующая формула (4.3), и численных расчетов обтекания. Однако с ростом M_1 это различие уменьшается, а при $M_1 = \infty$ обе формулы совпадают. Можно расширить область применимости формул (4.3), беря в них эмпирические значения коэффициентов k_i, близкие к теоретическим.

Анализ приведенных графиков показывает, что для больших чисел Маха M_1 линеаризированное решение теории взрыва дает приемлемые результаты при расчете обтекания затупленных тел в определенном диапазоне длин. С увеличением значений M_1 точность и диапазон применимости такого решения возрастают, поскольку нестационарная аналогия при этом выполняется лучше. Надо иметь в виду также, что расхождения между результатами точных численных расчетов обтекания тел и теоретическими зависимостями для взрыва обусловлены еще и тем, что в области, близкой к затуплению, нарушается нестационарная аналогия, а в слое, примыкающем к поверхности тела, поведение энтропии в стационарной и нестационарной задачах различно.



Фиг. 8



Фиг. 9

Проведенное сравнение указывает на возможность применения результатов теории взрыва к расчету гиперзвукового обтекания тонких затупленных тел. С другой стороны, результаты решений задач об обтекании затупленных тел могут быть использованы в задачах теории взрыва.

Авторы приносят глубокую благодарность К. В. Шароватовой и Р. Т. Джаембаеву за проведение расчетов.

Поступила 25 IV 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Седов Л. И. Движение воздуха при сильном взрыве. Докл. АН СССР, 1946, т. 52, № 1.
2. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. Изд. 4. Гостехиздат, 1957.
3. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. Физматгиз, 1961.
4. Охоцимский Д. Е., Кондрашева И. Л., Власова З. П., Казакова Р. К. Расчет точечного взрыва с учетом противодавления. Тр. Матем. ин-та, АН СССР, 1957, т. 50.
5. Sakurai A. On the propagation and structure of the blast wave. J. Phys. Soc. Japan, 1953, vol. 8, No. 5; 1954, vol. 9, No. 2.
6. Брушлинский Д. Н., Соломахова Т. С. Исследование задачи о сильном взрыве с учетом противодавления. Сб. статей № 19, Теоретическая гидромеханика. Оборонгиз, 1956, вып 7.
7. Коробейников В. П., Рязанов Е. В. К теории линеаризированных задач о взрыве с учетом противодавления. ПММ, 1959, т. 23, вып. 2.
8. Swigart R. J. Third-order blast wave theory and its application to hypersonic flow past blunt-nosed cylinders. J. Fluid Mech., 1960, vol. 9, No. 4.
9. Черный Г. Г. Течение газа при больших сверхзвуковых скоростях. Физматгиз, 1959.
10. Cheng H. K., Pallone A. J. Inviscid leading-edge effect in hypersonic flow. J. Aeronaut. Sci., 1956, vol. 23, No. 7.
11. Lees L., Kubota T. Inviscid hypersonic flow over blunt-nosed slender bodies. J. Aeronaut Sci., 1957, vol. 24, No. 3. (Русск. пер.: Сб. «Механика», 1957, № 6 (46)).
12. Чушкин П. И. Исследование обтекания затупленных тел вращения при гиперзвуковой скорости. Ж. вычислит. матем. и матем. физ., 1962, т. 2, № 2.
13. Белоцерковский О. М. О расчете обтекания осесимметричных тел с отошедшей ударной волной на электронной счетной машине. ПММ, 1960, т. 24, вып. 3.
14. Чушкин П. И. Затупленные тела простой формы в сверхзвуковом потоке газа. ПММ, 1960, т. 24, вып. 5.
15. Van Hise V. Analytic study of induced pressure on long bodies of revolution with varying nose bluntness at hypersonic speeds. NASA Tech. Rep., 1961, No. R-78.
16. Bertram M. H., Henderson A. Recent hypersonic studies of wings and bodies. ARS Journal, vol. 31, No. 8.