

на единицу для скорости  $v = 3,5 \cdot 10^6$  см/сек, на разных расстояниях от пушки. Из фиг. 8 видно, что по мере движения сгустка функция распределения также мало меняется, т. е. и быстрые и медленные частицы теряются почти в равной мере (медленных частиц теряется все-таки немного больше). Тот факт, что при движении сгустка функция распределения  $f(v)$  практически не меняется, соответствует интуитивному качественному утверждению, что сгусток движется как единое целое с постоянной средней скоростью. Изучались также зависимости  $N = N(z, I)$  магнитных мультиполей с  $2s=6$  и 8. Из фиг. 9 видно, что в таких полях получаются промежуточные результаты по отношению к случаям  $2s = 4$  и  $2s = 12$ .

Итак, приведенные выше результаты показывают возможность использования двумерных мультиполюсных магнитных полей для транспортировки плазмы.

Поступила 18 I 1966

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Делоне Г. А., Савченко М. М. Движение плазменных сгустков во внешних магнитных полях. Ж. техн. физ., 1964, т. 34, № 8, стр. 1409.
2. Подгорный И. М., Сумароков В. И. Захват плазмы в ловушку с магнитным полем, нарастающим к периферии. Nucl. Fusion, 1962, Supplement, pt. 1, p. 87.
3. Vostic W. H. Experimental study of ionized matter projected across a magnetic field. Phys. Rev., 1956, vol. 104, № 2, p. 292.
4. Koji Uo, Adiabatic compression of plasma by a cylindrical multipolar cusp magnetic field. Phys. Fluids, 1963, vol. 6, № 4, p. 596.
5. Арцимович Л. А. Управляемые термоядерные реакции. Изд. 2-е, Физматгиз, 1963, стр. 458.
6. Беркович, Фридрикс, Герцель, Град, Киллин, Рубин. Осесимметричная геометрия. Физика горячей плазмы и термоядерные реакции. Главатомиздат, 1959, стр. 146.

#### ОСОБЕННОСТИ Вихревой стабилизации электропроводного газа в радиальном электрическом поле

Г. Ю. Даутов, Г. М. Мустафин  
(Новосибирск)

В работе [1] была исследована неустойчивость поверхности раздела тяжелой электропроводной и расположенной над ней более легкой неэлектропроводной жидкости в сильном электрическом поле плоского электрода. Там же было показано замыкание электропроводной жидкости с электродом в результате развития неустойчивости поверхности. В данной работе математический подход и результаты [1] применены к расчету вихревой стабилизации плазменного шнура в радиальном электрическом поле. Получены формулы для расчета минимальной скорости вращения среды, необходимой для стабилизации шнура, и критического потенциала, при котором поверхность шнура становится неустойчивой (не связанная с электрическим полем гидродинамическая неустойчивость не рассматривается и не учитывается). Показано, что в определенных условиях этот критический потенциал значительно меньше потенциала лавинного пробоя и механизм замыкания плазмы с электродом может играть важную роль в условиях вихревой стабилизации.

**Постановка задачи.** Пусть длинный плазменный шнур с радиусом  $R_1$  расположен внутри цилиндрической трубки с радиусом  $R$ , представленной на фиг. 1, где 1 — плазменный шнур, 2 — стабилизирующая среда, 3 — электрод, 4 — трубка. Трубка состоит из двух половин, между которыми расположен цилиндрический электрод с внутренним радиусом  $R$  и закругленными концами, длина электрода значительно больше  $R$ . Потенциалы трубки и плазмы равны нулю, потенциал электрода равен  $U_p$ . Осесимметричное положение плазменного шнура стабилизируется благодаря вращательному движению плазмы и более плотной неэлектропроводной среды между плазмой и электродом. Плотности плазмы и этой среды соответственно равны  $\rho_1$  и  $\rho_2$  и их скорости вращения  $v$  при  $r \gg R_1$  подчиняются закону

$$vr = A, \quad A = \text{const} \quad (1)$$

Под действием электрического поля радиус шнура внутри электрода увеличивается до  $a$ . В этих условиях до появления неустойчивости поле между цилиндрическими поверхностями  $r = a$  и  $r = R$  внутри электрода далеко от его концов можно считать цилиндрически симметричным. Требуется определить наименьший потенциал  $U_p$ , при котором наступает неустойчивость плазменного шнура, и необходимую для стабилизации минимальную циркуляцию  $2\pi A$ . С целью определения этих величин рассматривается равновесие границы плазмы и изолирующей среды в двух случаях.

Случай 1. Изолирующей средой является жидкость с коэффициентом поверхностного натяжения  $\Omega$ . Пусть на поверхность плазмы наложено малое возмущение, слабо изменяющее кривизну поверхности  $r = a$ , возмущенная поверхность  $f$  описывается функцией  $r = f(z)$  и удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2}{dz^2} \ln \frac{f}{a} + \lambda^2 \ln \frac{f}{a} = 0 \quad \left( \begin{array}{l} f = a(1 + \psi) \\ \psi \ll 1 \end{array} \right) \quad (2)$$

Распределение потенциала внутри изолирующей жидкости удовлетворяет уравнению Лапласа

$$\Delta U(r, z) = 0 \quad (3)$$

В этой области  $U$  представим в виде

$$U = \frac{U_p}{\ln k} \left[ \ln \frac{r}{a} - \frac{I_0(\lambda r) K_0(\lambda R) - I_0(\lambda R) K_0(\lambda r)}{m} \ln \frac{f}{a} \right] \quad \left( k = \frac{R}{a} \right) \quad (4)$$

$$m = I_0(\lambda a) K_0(\lambda R) - I_0(\lambda R) K_0(\lambda a) \quad (5)$$

Здесь  $I_\nu$  и  $K_\nu$  — функции Бесселя мнимого аргумента порядка  $\nu$ .

Функция (4) удовлетворяет уравнению (3), граничному условию  $U(R, z) = U_p$  и приближенно граничному условию  $U(f, z) = 0$ . На единицу поверхности плазмы действуют электрическая сила  $F_e$ , сила поверхностного натяжения  $F_\Omega$  и разность статических давлений в жидкости и плазме  $F_p$ . Условием равновесия будет

$$F_e = F_\Omega + F_p \quad (6)$$

Электрическая сила определяется из уравнения

$$F_e = \frac{\epsilon}{8\pi} (\text{grad } U)_f^2 \quad (7)$$

где  $\epsilon$  — диэлектрическая постоянная жидкости. Учитывая (2), из (4) и (7) получаем

$$F_e \approx \frac{\epsilon U_p^2}{8\pi \ln^2 k} \left( \frac{1}{f^2} - \frac{2\lambda n}{fm} \ln \frac{f}{a} \right) \quad (8)$$

$$n = I_1(\lambda a) K_0(\lambda R) + I_0(\lambda R) K_1(\lambda a)$$

Составляющая  $F_p$  определяется как

$$F_p = (p_3 - p_2) - (p_1 - p_0) - \frac{\Omega}{R_1} \quad (9)$$

Здесь  $p_0$  и  $p_1$  — статические давления в плазме соответственно при  $r = (R_1 - 0)$  и  $r = (f - 0)$ ,  $p_2$  и  $p_3$  — статические давления в жидкости при  $r = (R_1 + 0)$  и  $r = (f + 0)$ .

Для определения  $(p_3 - p_2)$  и  $(p_1 - p_0)$  используем уравнение импульсов

$$\frac{dp}{dr} = \frac{\rho v^2}{r} \quad (10)$$

Интегрируя (10) с учетом (1), из (9) находим

$$F_p = \frac{(\rho_2 - \rho_1) A^2}{2f^2} \left( \frac{f^2}{R_1^2} - 1 \right) - \frac{\Omega}{R_1} \quad (11)$$

Сила поверхностного натяжения определяется из уравнения

$$F_\Omega = \Omega (c_1 + c_2) \quad (12)$$

Здесь  $c_1$  и  $c_2$  — наибольшая и наименьшая кривизны поверхности. Кривизну будем считать положительной, если вогнутость обращена в сторону оси плазменного шнура. Малость изменения кривизны поверхности позволяет пренебрегать величиной  $f_z^2$  по сравнению с единицей. С учетом этого получаем

$$c_1 + c_2 = \frac{1}{f} - f_{zz} \quad (13)$$

Учитывая малость  $\psi$ , разложим  $\ln(f/a)$  в ряд и ограничимся первым членом

$$\ln \frac{f}{a} = \psi, \quad f_{zz} = a\psi_{zz} \quad (14)$$

Подставляя (14) в (13) и учитывая (2), получаем

$$F_\Omega = \Omega (1/f + a\lambda^2\psi). \quad (15)$$

Подставляя (8), (11) и (15) в (6), получаем линейризованное уравнение

$$\frac{\varepsilon U_p^2}{8\pi \ln^2 k} \left(1 - \frac{2a\lambda n}{m} \psi\right) = \frac{(\rho_2 - \rho_1) A^2}{2} \left[\frac{a^2}{R_1^2} (1 + 2\psi) - 1\right] + \Omega \left[a(1 + \psi) + a^2 \lambda^2 \psi - \frac{a^2}{R_1} (1 + 2\psi)\right] \quad (16)$$

Уравнение (16) удовлетворяется, если

$$\frac{\varepsilon U_p^2}{8\pi \ln^2 k} = \frac{(\rho_2 - \rho_1) A^2}{2} \left(\frac{a^2}{R_1^2} - 1\right) + a\Omega \left(1 - \frac{a}{R_1}\right) \quad (17)$$

$$- \frac{\varepsilon U_p^2}{4\pi \ln^2 k} \frac{a\lambda n}{m} = (\rho_2 - \rho_1) A^2 \frac{a^2}{R_1^2} + a\Omega \left(1 + a^2 \lambda^2 - \frac{2a}{R_1}\right) \quad (18)$$

Введем безразмерные величины

$$u = \frac{\varepsilon U_p^2}{4\pi (\rho_2 - \rho_1) A^2}, \quad w = \frac{a\Omega}{(\rho_2 - \rho_1) A^2}, \quad x = a\lambda, \quad y = \frac{a}{R_1}, \quad \varphi_1 = \frac{m}{a\lambda n} \quad (19)$$

С учетом (19) уравнения (17) и (18) перепишем в виде

$$u = [(y^2 - 1) + 2w(1 - y)] \ln^2 k, \quad u = -\varphi_1 [y^2 + w(1 + x^2 - 2y)] \ln^2 k \quad (20)$$

Комбинируя эти соотношения, находим

$$y^2 - 2wy = \frac{1 - 2w - w\varphi_1(1 + x^2)}{1 + \varphi_1}, \quad u = \varphi_1 \frac{w - 1 - wx^2}{1 + \varphi_1} \ln^2 k \quad (21)$$

На фиг. 2 для значения  $w = 10^{-2}$  приведена зависимость  $u$  от  $x$ : кривая 1 — для  $\kappa = 10^5$ ,  $k = 1.01$ ; кривая 2 — для  $\kappa = 10^4$ ,  $k = 1.05$ ; кривая 3 — для  $\kappa = 10^3$ ,  $k = 1.1$ ; кривая 4 — для  $\kappa = 10^2$ ,  $k = 1.2$ ; кривая 5 — для  $\kappa = 10$ ,  $k = 1.5$ .

Из графиков видно, что функция  $u = u(x)$  имеет минимум. Минимальное значение  $u$ , при котором возможно нейтральное равновесие, соответствует этому минимуму. Значение  $x$ , при котором достигается минимум, определяется из равенства

$$\frac{d}{dx} \ln \frac{\varphi_1}{1 + \varphi_1} = \frac{2wx}{w - 1 - wx^2} \quad (22)$$

Порядок расчета искомых величин следующий. При заданных  $k$  и  $w$  из (22) находим  $x$ . Затем из уравнений (21) определяем  $y$  и  $u$ . Далее по заданным  $R$  и  $\Omega$  находим

$$a = \frac{R}{k}, \quad R_1 = \frac{a}{y}, \quad A^2 = \frac{a\Omega}{(\rho_2 - \rho_1)w}, \quad U_p^2 = \frac{4\pi (\rho_2 - \rho_1) A^2 u}{\varepsilon}$$

Графики и полученные формулы показывают, что с уменьшением  $k$  и  $A$  величина  $U_p$  быстро уменьшается.

*Случай 2.* Непроводящей средой является газ, плотность которого линейно возрастает от  $\rho_1$  при  $r = R_1$  (далеко от электрода) до  $\rho_R$  при  $r = R$ . Если далеко от электрода, где можно пренебречь влиянием электрического поля, плотность непроводящего газа меняется по закону

$$\rho_2 = \rho_1 [1 + \beta(r - R_1)], \quad \beta = \frac{\rho_R - \rho_1}{\rho_1(R - R_1)} \quad (23)$$

то для  $F_p$ , используя уравнения (1) и (10), получаем формулу

$$F_p = \frac{\beta \rho_1 A^2}{2j^2} \left[\frac{j}{R_1} - 2j + R_1\right] \quad (24)$$

Подставляя (8) и (24) в (6) и вводя безразмерную величину

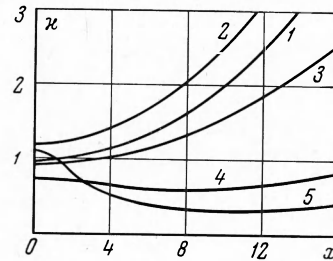
$$\theta = \frac{\varepsilon U_p^2}{4\pi \beta \rho_1 A^2 a} \quad (25)$$

получаем

$$a\theta \left(1 - \frac{2\lambda na}{m} \psi\right) = \left[\frac{a^2}{R_1^2} (1 + 2\psi) - 2a(1 + \psi) + R_1\right] \ln^2 k \quad (26)$$

Линейризованное уравнение (26) удовлетворяется, если

$$\theta = \frac{(y - 1)^2}{y} \ln^2 k, \quad \theta = (1 - y) \varphi_1 \ln^2 k \quad (27)$$



Фиг. 2

График ранее введенной функции

$$\Phi_1 = \frac{I_0(x) K_0(kx) - I_0(kx) K_0(x)}{x [I_1(x) K_0(kx) + I_0(kx) K_1(x)]} \quad (28)$$

показан на фиг. 3 при  $k = 1,05$ .

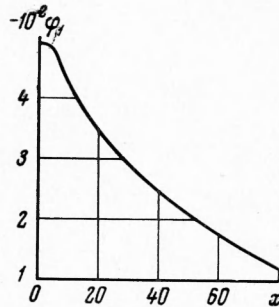
Приводим ряд величин  $\Phi_1$  для некоторых значений  $x$ :

$x = 0$	0.5	1	2	5	10	20	30	40	60
$-10^2 \Phi_1 = 4.88$	4.94	4.87	4.85	4.78	4.50	3.34	2.95	2.40	1.65

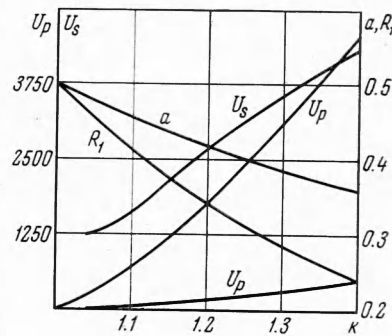
Используя асимптотические разложения функций Бесселя, можно показать, что при очень больших  $x$  эту функцию можно представить в виде

$$\Phi_1 = \frac{\text{th}(1-k)x}{x} \quad (29)$$

Из (29) видно, что если  $x \rightarrow \infty$ , то  $\Phi_1 \rightarrow 0$ . Однако при больших  $x$  (или то же самое, что при больших  $\lambda$ ) линейное приближение недостаточно, так как при больших  $\lambda$  предположение о малости изменения кривизны поверхности не выполняется. Тем не менее, исходя из вида функции  $\Phi_1$ , можно сказать, что в зависимости от формы возмущения поверхности плазменного шнура при относительно больших  $x$  величины



Фиг. 3



Фиг. 4

критического потенциала  $U_p$  могут иметь различные значения. Такое отличие от случая 1 объясняется отсутствием сил поверхностного натяжения, повышающих устойчивость плазменного шнура при его местной деформации.

При  $x \ll 1$  имеем

$$\Phi_1 \approx \left( \frac{2x^2 \ln k}{4 + x^2} - 1 \right)^{-1} \ln k \quad (30)$$

Отсюда видно, что при  $x = 0$  функция, определенная вторым равенством (27), имеет минимум, равный

$$\theta = (y - 1) \ln^2 k \quad (31)$$

Из первого равенства (27) и (31) находим

$$\ln k = (y - 1)y^{-1}, \quad \theta = (y - 1)^4 y^{-3} \quad (32)$$

Порядок расчета искомых величин следующий.

При известном  $R$  задаемся  $y$ , из (32) находим  $k$ . Далее определяем  $a = R/k$ ,  $R_1 = a/y$  и находим  $U_p$  по формуле

$$U_p = \frac{2(a - R_1)^2 A}{a} \left( \frac{\pi \beta \rho_1}{\epsilon R_1} \right)^{0.5} \quad (33)$$

Найденный потенциал представляет собой тот наименьший потенциал, при котором возможно нейтральное равновесие, если возмущенная поверхность будет цилиндрической. Это утверждение вытекает из первого уравнения (27), которое представляет собой условие равновесия цилиндрической поверхности; если в нем ввести новую величину  $\theta_1 = a\theta$  и положить  $d\theta_1/da = 0$ , то получается формула (32), следовательно, и формула (33).

Результаты расчета  $U_p$  и  $a$  по формулам (32) и (33) при  $\epsilon = 1$ ,  $R = 0.5$  см,  $\rho_1 = 1,407 \cdot 10^{-4}$  г см<sup>-3</sup>,  $\rho_R = 8,86 \cdot 10^{-4}$  г см<sup>-3</sup> приведены на фиг. 4, где нижняя и верхняя кривые  $U_p$  соответствуют  $A = 10^2$  и  $A = 10^3$  см<sup>2</sup>сек<sup>-1</sup>. Из этой фигуры видно, что  $U_p$  быстро уменьшается с ростом  $R_1$  до весьма малых значений. Зависимость  $U_p$  от цир-

куляции газа, его плотности и других величин непосредственно видна из формулы (33). Формула (33) показывает, что с уменьшением  $A$ , т. е. скорости вращения газа и радиуса трубки, при прочих постоянных условиях стабилизирующее действие вращательного движения на устойчивость плазменного шнура уменьшается. Как показывают графики, с уменьшением радиуса шнура  $R_1$  стабилизирующее действие газа быстро возрастает, т. е.  $U_p$  резко повышается. Это связано с ростом скорости газа при уменьшении радиуса в соответствии с (1). В реальных случаях вихревой стабилизации плазменного шнура из-за вязкости газа его скорость вблизи оси уменьшается. Поэтому при малых  $R_1$  значение  $U_p$  должно быть меньше, чем это дается вышеприведенными формулами. Кроме того, из-за трения скорость газа вблизи стенки электрода уменьшается и непосредственно у стенки равна нулю. Поэтому стабилизирующее действие газа и величина  $U_p$  должны сильно уменьшаться, если плазменный шнур близок к стенке. Формулы, учитывающие эти особенности, могут быть получены таким же путем, если задан закон изменения скорости газа по радиусу канала.

*Плазменный пробой.* Проводя аналогию с результатами [1], можно ожидать следующее поведение плазменного шнура после появления неустойчивости. В результате деформации поверхности шнура расстояние между ним и электродом уменьшается. Это приводит к дальнейшему росту напряженности электрического поля в зоне деформации, что вызывает прогрессирующее развитие неустойчивости вплоть до замыкания плазмы с электродом. Такое явление можно назвать плазменным пробоем, в отличие от обычного лавинного или стримерного пробоя. Если отсутствуют другие конкурирующие процессы и  $U_p$  меньше потенциала обычного пробоя  $U_s$ , то раньше наступает плазменный пробой, а обычный пробой не реализуется. Для сравнения величин  $U_p$  и  $U_s$  произведем расчет  $U_s$  по теории Таунсенда применительно к случаю, когда электрод служит катодом, а плазма — анодом.

Потенциал пробоя промежутка между цилиндрическими поверхностями  $r = a$  и  $r = R$  определяется по формуле

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = \int_a^R \alpha dr \quad (34)$$

Здесь  $\alpha$  и  $\gamma$  — первый и второй коэффициенты ионизации Таунсенда.

Учитывая зависимости  $\alpha$  от температуры, выражение для  $\alpha$  можно представить в следующем виде:

$$\alpha = \frac{M_1 p}{t} \exp\left(-\frac{B_1 p}{Et}\right) \quad (35)$$

Здесь  $E$  — напряженность электрического поля,  $T$  — температура газа,  $T_0$  — температура, для которой экспериментально определены коэффициенты  $M_1$  и  $B_1$ .

В расчете принималось  $p = 10$  нсм<sup>-2</sup>, температура поверхности шнура  $T = 2500^\circ$  К, температура газа у стенки трубки  $T_R = 400^\circ$  К,  $T_0 = 300^\circ$  К, наконец, изменение температуры по закону

$$t = s_0 - s\xi, \quad s = \frac{T_1 - T_R}{T_0(k-1)}, \quad s_0 = s + \frac{T_1}{T_0}, \quad \xi = \frac{r}{R}$$

что соответствует линейному росту плотности воздуха по радиусу. Используя величины  $M_1$  и  $B_1$ , приведенные в [2], для  $p = 10$  нсм<sup>-2</sup>, получаем  $M = M_1 p = 11400$ ,  $B = B_1 p = 277400$ . Для воздуха [2] можно принять  $\gamma = 10^{-2}$ . С учетом введенных обозначений выражение (34) можно привести к виду

$$\ln\left(1 + \frac{1}{\gamma}\right) = \int_1^k \frac{M}{t} \exp\left(-\frac{\xi B \ln k}{t U_s}\right) d\xi \quad (36)$$

На фиг. 4 приведены результаты расчета  $U_s$  по формуле (36). Как видно, при малых  $k$  и  $A$  величина  $U_p$  значительно меньше  $U_s$ . Поэтому можно ожидать, что в этих условиях до обычного пробоя происходит замыкание плазмы с электродом из-за неустойчивости. При больших скоростях движения газа и больших  $k$  величина  $U_p$  становится больше  $U_s$ . В этом случае более вероятен обычный электрический пробой.

Вышеприведенные расчеты показывают, что в определенных условиях неустойчивость поверхности плазменного шнура может играть важную роль в пробое между плазмой и холодным электродом.

Поступила 2 XII 1965

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Taylor G. J., McEwan A. D. The stability of a horizontal fluid interface in a vertical electric field. J. Fluid Mech., 1965, vol. 22, part 1.
2. Энгель А. Ионизованные газы. Физматгиз, 1959.