

6. Буланин М. О., Бурцев А. П., Коротков С. А. Влияние колебательного и вращательного возбуждения на поляризуемость и рефракцию молекулярных газов // Хим. физика.— 1988.— Т. 7, № 13.— С. 1615—1619.
7. Журавлев В. В., Сорокин А. А., Старик А. М. О механизмах самофокусировки при взаимодействии лазерного излучения с газовой средой // Квант. электроника.— 1990.— Т. 16, № 4.— С. 501—506.
8. Грабовский В. И., Старик А. М. Влияние процессов макропереноса на изменение газодинамических параметров при воздействии импульса резонансного излучения // Докл. РАН.— 1992.— Т. 322, № 4.— С. 674—680.
9. Выслоух В. А., Огнев Л. И. Резонансная самофокусировка в смеси CO₂ и N₂ // ПМТФ.— 1980.— № 4.— С. 50—57.
10. Егоров К. Д., Кандидов В. П., Огнев А. И. Самовоздействие светового пучка в условиях кинетического охлаждения // Квант. электроника.— 1981.— Т. 8, № 5.— С. 1012—1017.
11. Левин В. А., Нетесов В. В., Старик А. М. Численное исследование распространения импульса излучения с $\lambda = 10,6$ мкм через поглощающие среды // ПМТФ.— 1984.— № 3.— С. 14—19.
12. Gebhardt F. C., Smith D. C. Kinetic cooling of a gas by absorption of CO₂ laser radiation // Appl. Phys. Lett.— 1972.— V. 20, N 3.— P. 129—132.
13. Гордиенко В. М., Горшков В. А., Панченко В. Я., Сухоруков А. П. Кинетическое охлаждение смеси газов CO₂—N₂ излучением CO₂-лазера // ЖЭТФ.— 1977.— Т. 73, № 3.— С. 1396—1399.
14. Смит К., Томсон Р. Численное моделирование газовых лазеров.— М.: Мир, 1981.
15. Бирюков А. С. Кинетика физических процессов в газодинамических лазерах // Тр. ФИАН.— 1975.— Т. 83.— С. 13—99.
16. Гордиец Б. Ф., Осипов А. И., Шелепин Л. А. Кинетические процессы в газах и молекулярные лазеры.— М.: Наука, 1980.
17. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей.— М.: ИЛ, 1961.
18. Ритынь Е. Н., Рубиков Ю. А., Слободская П. В., Соснов Е. Н. Коэффициенты диффузии колебательно-возбужденных молекул // Хим. физика.— 1988.— Т. 7, № 5.— С. 703—710.
19. Гордеев Е. П., Уманский С. Я. Диффузия колебательно-возбужденных молекул // Хим. физика.— 1991.— Т. 10, № 10.— С. 1435—1437.
20. Ahtye W. F. Thermal conductivity in vibrationally excited gases // J. Chem. Phys.— 1972.— V. 57, N 12 (II).— P. 5542—5555.
21. Булдаков М. А., Королев В. В., Матросов И. И., Павлова Т. Н. Поляризуемость молекул N₂ и O₂ // Оптика и спектроскопия.— 1987.— Т. 62, № 3.— С. 519—523.

г. Москва

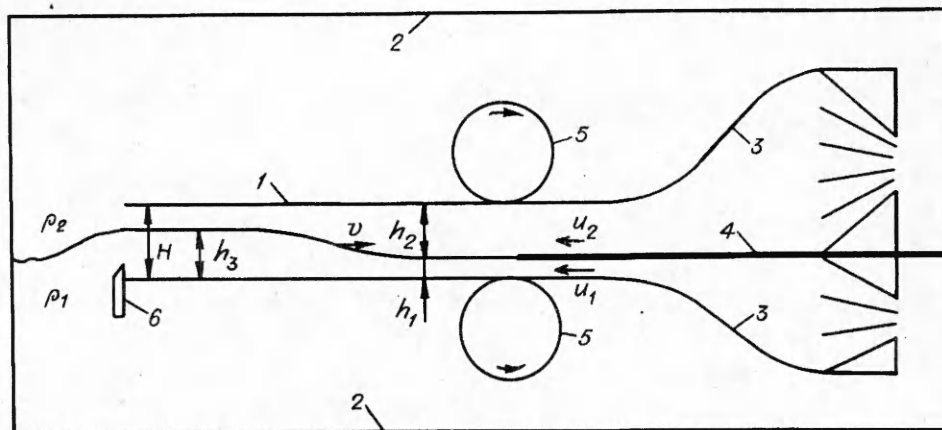
Поступила 3/XI 1992 г.,
в окончательном варианте — 2/III 1993 г.

УДК 532.59

Н. В. Гаврилов

НЕПОДВИЖНЫЕ В ЛАБОРАТОРНОЙ СИСТЕМЕ КООРДИНАТ ВНУТРЕННИЕ УЕДИНЕННЫЕ ВОЛНЫ И ПЛАВНЫЕ БОРЫ

Уединенные волны и плавные боры являются объектом интенсивных теоретических и экспериментальных исследований в современной гидродинамике [1—8]. В результате лабораторного моделирования [5—8] достигнута определенная ясность относительно достоинств и недостатков теоретических подходов к описанию этих волн. Однако некоторые вопросы остались открытыми. В частности, в опытах [5—8] волны перемещались относительно наблюдателя с медленно меняющейся скоростью, т. е. были нестационарными. Эта нестационарность могла быть обусловлена двумя причинами: тем, что в пределах экспериментальной установки еще продолжалось формирование стационарной волны из начального возмущения, или тем, что происходила диссипация энергии из-за вязкости. Какая из



Р и с. 1

двух причин определяет нестационарность в опытах с движущимися относительно лабораторной системы координат волнами, однозначно выяснить нельзя.

Цель данной работы — реализовать и экспериментально изучить уединенные волны и плавные боры, покоящиеся относительно лабораторной системы координат. Теоретический анализ волн на границе раздела сдвигового потока двухслойной жидкости «под крышкой», выполненный на основе [1], показал, что неподвижные волны могут существовать только в случае, когда в исходном состоянии оба слоя движутся относительно стенок канала.

Опыты проводились на лабораторной установке замкнутого типа, в которой в пределах рабочего канала два слоя несмешивающихся жидкостей двигались в одном направлении. Установка спроектирована и изготовлена на основании предсказаний теории [1] о длине изучаемых волн и скоростях движения слоев, при которых волны должны покоиться. Длина установки (рис. 1) 220 см, ширина $B = 15$ см и высота 40 см. Она включает в себя рабочий канал 1 длиной 120 см и глубиной $H = 6$ см, возвратные каналы 2, поворотные устройства с плавными входами 3, разделительную пластину 4, два оригинальных насоса 5, изготовленных специально для этой установки, и волнопродуктор 6. Насосы представляли собой вращающиеся вокруг своей оси цилиндры, расположенные несимметрично между дном и крышкой возвратных каналов* [9]. В качестве рабочих жидкостей использовались вода с плотностью $\rho_1 = 1$ г/см³ и керосин с $\rho_2 = 0,8$ г/см³. Глубина h_1 и скорость u_1 нижнего слоя менялись в пределах $1,5 \div 2$ см и $20 \div 25$ см/с, а глубина $h_2 = H - h_1$ и скорость u_2 верхнего слоя $4 \div 4,5$ см и $15 \div 20$ см/с. Расходы жидкостей в слоях Q_i ($i = 1, 2$; 1 соответствует нижнему слою, 2 — верхнему) менялись в пределах $300 \div 1200$ см³/с. Генерация плавного бора осуществлялась барьером, расположенным на выходе из рабочего канала. Он мог перемещаться по вертикали в нужное положение [7].

Изучаемые волны регистрировались фото- и киносъемкой сквозь толщу жидкости матового светящегося экрана, расположенного за установкой. Для визуализации границы раздела нижняя жидкость окрашивалась чернилами. Глубины слоев, амплитуды и профили волн определялись по фотографиям, погрешность измерений была порядка 5%. Чтобы найти скорости слоев в рабочем канале, киносъемкой медленно погружающейся твердой частицы измерялись профили скорости и расходы жидкостей в возвратных каналах $q_i = Q_i/B$ в зависимости от подаваемых на насосы напряжений E_i . Полученные экспериментальные данные аппроксимировались степенными функциями $q_i = \alpha_i E_i^{n_i}$ (рис. 2). Кривая 1, описывающая расход нижнего слоя, рассчитывалась по трем тарировочным

* Идея использования насосов такой конструкции принадлежит В. И. Букрееву.

экспериментам (светлые точки) при $\alpha_1 = 0,0158$, $n_1 = 1,6$, кривая 2, описывающая расход верхнего слоя (керосина), — по четырем экспериментам (темные точки) при $\alpha_2 = 0,0221$, $n_2 = 1,6$. При проведении основных опытов фиксировалось рабочее напряжение E_r , а затем по измеренным глубинам невозмущенных слоев h_1 и h_2 и полученным по рис. 2 расходам жидкостей вычислялись среднерасходные скорости движения слоев в рабочем канале u_1 и u_2 . Погрешность измерения скорости не превышала 8 %.

Согласно теории [1], при заданном отношении плотностей $\lambda = \rho_2/\rho_1$ плавный бор реализуется при определенном соотношении безразмерных скоростей невозмущенных слоев $F_i = u_i/\sqrt{gH}$, а безразмерная глубина нижнего слоя за фронтом волны $y_3 = h_3/H$ определяется только скоростью нижнего слоя:

$$(1) \quad |F_1 - V| + \sqrt{\lambda} |F_2 - V| = \sqrt{1 - \lambda};$$

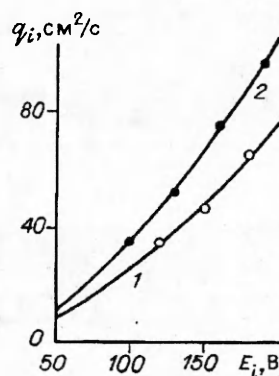
$$(2) \quad y_3 = (F_1 - V)/\sqrt{1 - \lambda}.$$

Здесь $V = v/\sqrt{gH}$; v — скорость движения бора; g — ускорение силы тяжести. В данных опытах $V = 0$, и упрощенные уравнения (1), (2) позволяют найти скорости слоев и глубину за фронтом волны для неподвижного плавного бора. В принципе верхняя жидкость может и покоиться. Но тогда из (1) при $V = 0$ следует, что $F_1 = \sqrt{1 - \lambda}$, а из (2), что $y_3 = 1$. При $H = 6$ см (как в данных опытах) $u_1 = 34$ см/с, а такое сдвиговое течение неустойчиво по Кельвину — Гельмгольцу [6, 7]. Уместно отметить, что скорость движения бора не зависит от его амплитуды ($y_3 - y_1$) [5], так как не зависит от $y_1 = h_1/H$.

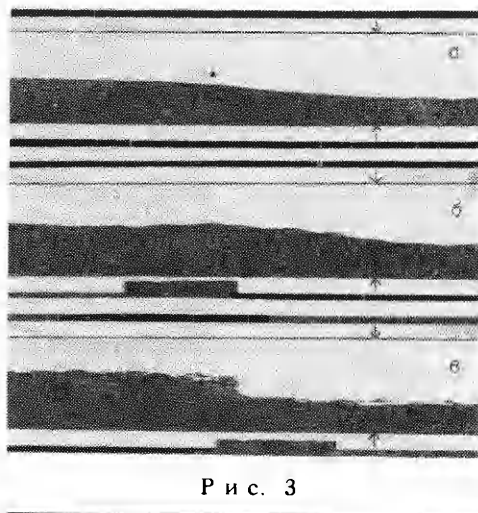
Из серии волн, полученных при разных режимах течения жидкости в рабочем канале, для сравнения с теорией выбирались плавные монотонные волны (рис. 3, а), которые имели место лишь при скоростях движения слоев, определяемых уравнением (1). При несовпадении теоретических и экспериментальных параметров течения наблюдались боры с ондуляциями или гидравлические прыжки (рис. 3, б, в). Стрелками показаны дно и крышка рабочего канала. Сопоставление зарегистрированных в опытах волн с теоретическими борами проводилось по трем признакам: монотонности волны, глубине нижнего слоя за фронтом волны и профилю плавного бора. Удалось реализовать свободные неподвижные плавные боры повышения уровня, параметры которых удовлетворительно совпадают с теоретическими по всем указанным признакам.

На рис. 4, а сопоставляются расчетный по модели [1] (сплошная линия 1) и экспериментальный (светлые точки) профили плавного бора, представленного на рис. 3, а, при $y_1 = 0,310$, $F_1 = -0,219$, $F_2 = -0,252$. Во всех экспериментах $V = 0$, $\lambda = 0,8$. На рис. 4, б по оси абсцисс отложена безразмерная продольная координата x/H , отсчитываемая от точки, в которой $y = (y_1 + y_3)/2$ для плавного бора и $y = y_3$ для уединенной волны, а по оси ординат — безразмерная глубина нижнего слоя $y = h/H$, отсчитываемая от дна рабочего канала. Видно, что экспериментальный профиль монотонен. При указанных скоростях слоев формулы (1) и (2) дают $V = 0,001$ и $y_3 = 0,494$. Отклонение от экспериментальной скорости гораздо меньше погрешности ее измерения. Теоретическая глубина нижнего слоя за фронтом волны всего на 2 % меньше экспериментальной $y_3 = 0,506$. Такое отклонение y_3 лежит в пределах погрешности измерения глубины. Для детального сравнения измеренного и рассчитанного профилей использовалась и экспериментальная глубина нижнего слоя за волной ($y_3 = 0,506$). В этом случае расчетный профиль (штриховая линия 1 на рис. 4, а) особенно хорошо совпадает с полученным в опыте.

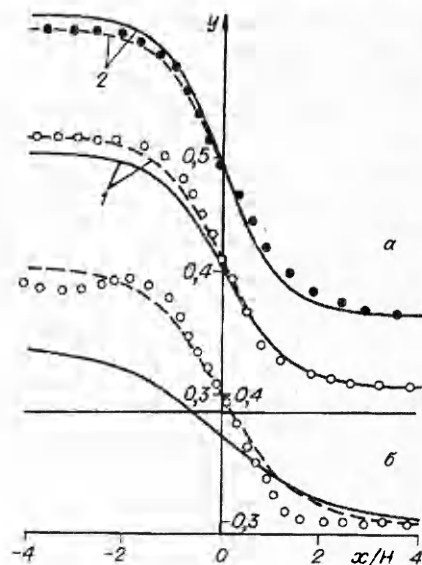
В опытах можно реализовать ситуацию, когда скорости слоев удовлетворяют уравнению (1), а глубина нижней жидкости за фронтом волны отлича-



Р и с. 2



Р и с. 3



Р и с. 4→

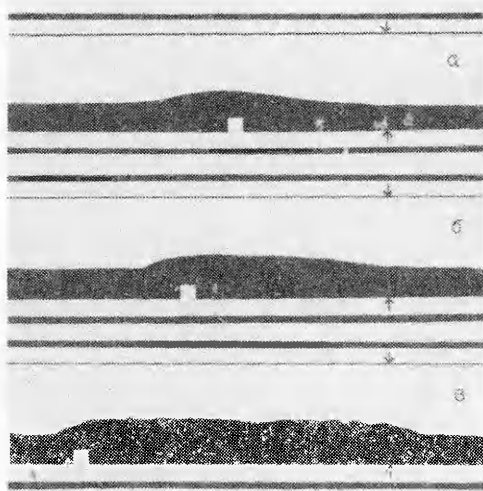
ется от рассчитываемой по формуле (2). В этом случае всегда наблюдаются неплавные боры. На рис. 4, б приведен профиль (светлые точки) одного из зарегистрированных ондуляционных боров при $y_1 = 0,300$, $F_1 = -0,196$, $F_2 = -0,281$; по формулам (1) и (2) $V = 0$, $y_3 = 0,437$. В эксперименте параметр $y_3 = 0,500$ почти на 15 % превышал теоретическое значение. Расчетный плавный бор при указанных параметрах описывается сплошной линией (рис. 4, б). Штриховая линия — расчетный профиль, для построения которого использовалась измеренная глубина $y_3 = 0,500$. Видно, что он также сильно отличается от экспериментального.

Для реализации покоящихся волн слои должны двигаться со скоростями ~ 20 см/с. Поверхностное натяжение на границе раздела между водой и керосином препятствует развитию неустойчивости Кельвина — Гельмгольца до разности скоростей между слоями 19 см/с [6, 7]. Однако и при существенно меньшем сдвиге скорости граница раздела сильно возмущена. Поэтому в опытах удалось получить плавные боры относительно малой амплитуды ($h_3 - h_1 \approx 1,5$ см при сдвиге скорости $(u_2 - u_1) = 10$ см/с. Согласно формуле (2), глубина нижнего слоя за фронтом волны тем больше, чем больше его скорость F_1 . При увеличении F_1 , согласно формуле (1), должна уменьшаться скорость F_2 и увеличиваться сдвиг скорости $(F_1 - F_2)$. Это приводит к усилению нежелательных трехмерных возмущений границы раздела, которые провоцируют развитие гидравлического прыжка. Рис. 3, в иллюстрирует такую ситуацию при $y_1 = 0,333$, $F_1 = -0,389$, $F_2 = -0,082$. При этом на основе (1) и (2) $V = -0,01$, $y_3 = 0,870$, в эксперименте $y_3 = 0,673$. При меньшем сдвиге скорости наблюдаются плавные боры с коротковолновыми (по сравнению с длиной основной волны) возмущениями, сравнение которых с теоретическими вполне допустимо. На рис. 4, а сопоставляются рассчитанный (сплошная линия 2) и измеренный (темные точки) профили при $y_1 = 0,366$, $F_1 = -0,269$, $F_2 = -0,199$; формулы (1) и (2) дают $V = 0$, $y_3 = 0,601$. Наблюдаемая в эксперименте глубина $y_3 = 0,590$ всего на 1,5 % отличается от теоретической. Штриховая линия 2 — расчет профиля, когда использовалось экспериментальное значение параметра $y_3 = 0,590$.

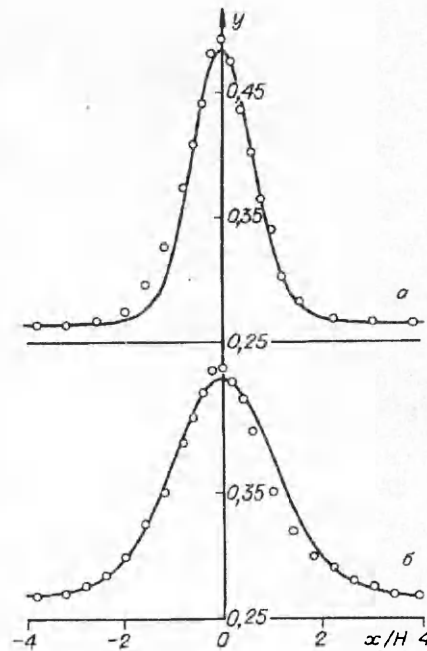
Амплитуда движущейся уединенной волны является свободным параметром, и, согласно [1], скорость волны V и y_3 (максимальное расстояние от границы раздела до дна канала) связаны соотношением

$$(3) \quad \frac{(F_1 - V)^2}{\mu y_3} + \frac{(F_2 - V)^2}{\mu (1 - y_3)} = 1, \quad \mu = 1 - \lambda.$$

Для неподвижной волны $V = 0$. Тогда параметр y_3 , а вместе с ним и амплитуда волны $y_3 - y_1$ перестают быть свободными. Они задаются только скоростями



Р и с. 5



Р и с. 6→

невозмущенных слоев F_1 и F_2 . Поэтому должен быть какой-то механизм, позволяющий поддерживать неизменной амплитуду волны. В опытах на дне канала устанавливалось небольшое препятствие (светлые квадраты на рис. 5), которое при определенных скоростях слоев F_1 и F_2 порождало над собой уединенную волну в виде бугра и обеспечивало компенсацию потерь на трение за счет основного течения.

Из серии волн, полученных при разных скоростях слоев, для сравнения с теорией выбирались плавные почти симметричные волны (рис. 5, а). По измеренным глубинам и скоростям невозмущенных слоев рассчитывались амплитуда и профиль волны, которые и сравнивались с экспериментальными. При несовпадении режимов течения в опыте с теоретическими наблюдались существенно несимметричные возмущения или знакопеременные волны (рис. 5, б, в).

На рис. 6, а сопоставляются расчетный по [1] (сплошная линия) и экспериментальный (точки) профили неподвижной уединенной внутренней волны при $y_1 = 0,264$, $V = 0$, $F_1 = -0,276$, $F_2 = -0,166$. При таких скоростях слоев формула (3) дает $y_3 = 0,484$, что всего на 1,5 % меньше наблюдаемой в эксперименте глубины $y_3 = 0,491$. Уместно заметить, что для генерации неподвижной уединенной волны сдвиг скорости между слоями не является необходимым условием. Поэтому наряду с генерацией волн на сдвиговом течении были реализованы покоящиеся волны, когда невозмущенные слои двигались с одинаковыми скоростями. На рис. 6, б одна из таких волн (точки) сопоставляется с расчетом (сплошная линия) при $y_1 = 0,268$, $F_1 = F_2 = -0,233$. При таких скоростях формула (3) дает глубину $y_3 = 0,441$, которая всего на 2 % меньше наблюдаемой в опыте $y_3 = 0,450$. Видно, что рассчитанные профили достаточно хорошо согласуются с измеренными.

Используемые в данных опытах способы генерации волн компенсировали потери на трение за счет энергии основного потока, и реализованные плавный бор и уединенная волна существовали бесконечно долго (по крайней мере, десятки минут), не меняя своей формы. Поэтому можно говорить, что они были стационарными и что нестационарность волн в экспериментах [5—8] обусловлена именно вязкостью реальных жидкостей.

Работа выполнена по гранту Г21-8990 Института гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН.

Автор выражает искреннюю признательность Л. В. Овсянникову и В. И. Букрееву за инициативу постановки данных опытов и полезное обсуждение полученных результатов.

ЛИТЕРАТУРА

1. Овсянников Л. В., Макаренко Н. И., Налимов В. И. и др. Нелинейные проблемы теории поверхностных и внутренних волн.— Новосибирск: Наука, 1985.
2. Long R. R. Solitary waves in one and two-fluid system // *Tellus*.— 1956.— V. 8, N 4.
3. Koop C. G., Bulter G. An investigation of internal solitary waves in a two-fluid system // *J. Fluid Mech.*— 1981.— V. 112.
4. Mirie R. M. An internal solitary waves with bounded amplitude // *J. Phys. Soc. Jap.*— 1985.— V. 54, N 9.
5. Агеев В. А., Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Новый тип плоских стационарных волн в двухслойной жидкости // *Изв. АН СССР. МЖГ.*— 1986.— № 5.
6. Гаврилов Н. В. Уединенные внутренние волны большой амплитуды в двухслойной жидкости // *ПМТФ.*— 1986.— № 5.
7. Гаврилов Н. В. Плавные боры в двухслойной жидкости со сдвигом скорости между слоями // *ПМТФ.*— 1987.— № 3.
8. Гаврилов Н. В. Вязкое затухание уединенных внутренних волн в двухслойной жидкости // *ПМТФ.*— 1988.— № 4.
9. Букреев В. И., Гаврилов Н. В. Экспериментальное изучение возмущений впереди крыла, движущегося в стратифицированной жидкости // *ПМТФ.*— 1990.— № 2.

г. Новосибирск

Поступила 12/11 1993 г.

УДК 532.59

А. М. Франк

ДИСКРЕТНАЯ НЕЛИНЕЙНО-ДИСПЕРСИОННАЯ МОДЕЛЬ МЕЛКОЙ ВОДЫ

В последнее время получил известное распространение дискретный подход к построению численных моделей механики сплошной среды. После первых работ [1, 2] появились дискретные модели газовой динамики, магнитной гидродинамики, идеальной несжимаемой жидкости, твердого деформируемого тела, обладающие основными законами сохранения при любом числе степеней свободы. В основном такие модели построены для достаточно общих случаев движения среды, скажем, в случае несжимаемой жидкости они являются дискретными аналогами полных уравнений Эйлера. Исключением является работа [3], где построена дискретная нелинейная модель мелкой воды без дисперсии. Для двумерной дискретной модели несжимаемой жидкости, предложенной в [4], при расчете уединенных волн на грубой сетке отмечалось определенное ее сходство с нелинейно-дисперсионными моделями мелкой воды. Исследование дисперсионного соотношения этой модели на задаче о линейных волнах в жидкости конечной глубины показало, что выбором параметров сетки можно в широких пределах управлять дисперсионными свойствами модели, получая как точный закон $\omega^2 = k \operatorname{th}(k)$ в пределе при шаге сетки $h \rightarrow 0$, так и закон, очень близкий к $\omega^2 = \frac{k^2}{1 + k^2/3}$ при умеренных значениях h . Таким образом, модель [4] дает пример дискретной математической модели, которая при детальной пространственной дискретизации является конечномерным аналогом полных уравнений Эйлера, а при более грубой — нелинейно-дисперсионных уравнений мелкой воды. Оказывается, однако, что в рамках такого дискретного подхода можно непосредственно построить более простую нелинейно-дисперсионную модель мелкой воды, которая, как и в непрерывном случае, имеет меньшую размерность и поэтому более удобна и экономична при моделировании длинных волн.

1. Уравнения движения. Рассмотрим задачу о движении длинных гравитационных волн в вязкой несжимаемой жидкости над неровным дном. Разобьем слой жидкости на элементарные жидкие объемы V_i (рис. 1). Со-