

О КРУТИЛЬНОЙ ПОТЕРЕ УСТОЙЧИВОСТИ ПРИ ПЛАСТИЧЕСКИХ ДЕФОРМАЦИЯХ

В. Д. Ключников (Москва)

Задаче о крутильной потере устойчивости иногда приписывают роль критерия для оценки приемлемости той или иной теории пластичности. Это объясняется тем, что в условиях пластичности при обычном статическом анализе, где об устойчивости судят по тому, найдется ли в непосредственной близости к исходному состоянию хотя бы одно-другое равновесное состояние, получается, что критическая сила определяется таким же, как в упругости, соотношением, но с заменой упругого модуля сдвига G на мгновенный пластический

$$G_i = \lim_{\gamma \rightarrow 0} \tau / \gamma \quad (1)$$

где τ — касательная напряжения, γ — сдвиг. Поэтому любая теория пластичности с гладкой поверхностью нагружения, где всегда $G_i = G$ приводит к расхождению с экспериментом [1], и на этом основании иногда подвергается сомнению. С другой стороны, в большинстве опытов (см., например, [2, 3]) по непосредственному определению G_i было выяснено, что G_i близко к G .

Чтобы разрешить получающийся парадокс, были сделаны попытки [1, 4] изменить подход к задаче и рассматривать не устойчивость, а скручивание при наличии малых начальных отклонений.

Обычно задача о крутильной неустойчивости рассматривается на основе следующей модели. Длинная полоса, закрепленная шарнирно вдоль одной длинной стороны, сжимается по коротким сторонам равномерно распределенной нагрузкой. При этом приходится делать некоторые, не относящиеся к существу проблемы, предположения, как, например, предположение о форме возмущенной поверхности.

В настоящей заметке предлагается применять для изучения вопроса о крутильной потере устойчивости более простую и чистую модель¹, в которой роль основного элемента может выполнять обычный тонкостенный трубчатый образец, используемый в экспериментах на сложное нагружение, в частности для определения модуля G_i .

Модель состоит в следующем (фигура 1). Тонкостенная вертикальная труба длиной L , средним радиусом r и толщиной стенки h верхним концом прочно соединена с горизонтальным жестким рычагом длиной R , который может вращаться в сферическом шарнире A . Нижний конец трубы посредством цилиндрического шарнира B с осью, параллельной оси рычага, соединен с основанием. К верхнему торцу трубы, в котором, по предположению, сосредоточена вся масса системы μ , приложена вертикальная сжимающая сила P .

В дальнейшем исследуются некоторые свойства возмущенных движений данной системы при постоянной силе P , а значит², при постоянном осевом напряжении σ .

В исходном состоянии оси цилиндрического шарнира, трубы и рычага лежат в одной плоскости. В отклоненном состоянии положение системы определяется углом φ поворота рычага (который равен углу скручивания трубы) так, что уравнение движения рычага будет

$$\mu R^2 \ddot{\varphi} + M_c = M \quad (2)$$

Здесь M_c и M — моменты внутренних и внешних сил в трубе, взятые относительно вертикальной оси. Дифференцирование ведется по времени t . Легко видеть, что

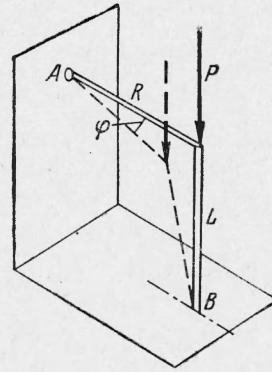
$$M_c = 2\pi r^2 h \tau, \quad M = \frac{R^2}{L} \varphi P, \quad \gamma = \frac{r}{L} \varphi \quad (3)$$

Вводя теперь новые обозначения и время

$$T = \frac{P}{P_0}, \quad P_0 = \frac{2\pi r^3 h}{R^2}, \quad \theta = \sqrt{\frac{P_0}{L\mu}} t \quad (4)$$

¹ При чтении корректуры Ю. Н. Работнов обратил мое внимание, что весьма близкая модель предложена Чильвером, см. сборник [3].

² Как видно, возможным движением в осевом направлении пренебрегаем; это есть следствие того, что осевая жесткость трубы значительно превосходит крутильную, и в этих условиях учет продольных колебаний не приведет к существенному изменению результата.



и обозначая дифференцирование по θ тем же символом, что и раньше, приведем уравнение (2) к виду

$$\gamma'' + \frac{\tau}{G} \gamma' - T\gamma = 0 \quad (5)$$

Если пользоваться статическим критерием устойчивости, смысл которого указан выше, то из уравнения (5) для критического параметра T_* получим

$$T_* = \frac{1}{G} \lim_{\gamma \rightarrow 0} \frac{\tau}{\gamma} = \frac{G_i}{G} \quad (6)$$

и, следовательно, как в теории упругости, так и в теориях с гладкими поверхностями нагружения имеем $T_* = 1$, т. е. критическая сила определяется второй из формул (4).

Обратимся теперь к динамическому анализу. В рассматриваемой задаче отличными от нуля напряжениями являются σ и τ . Так как $\sigma = \text{const}$, то как бы ни была сложена связь (не зависящая от времени) между напряжениями и упруго-пластическими деформациями, принципиально можно всегда считать, что γ является функцией τ . Но тогда уравнение (5) можно легко проинтегрировать. Принимая в качестве начальных данных следующие:

$$\gamma = \tau = 0, \quad \gamma' = \gamma_0' \text{ при } \theta = \theta_0 \quad (7)$$

и интегрируя один раз уравнение (5), получим

$$\delta = \gamma'^2 - \gamma_0'^2 = \frac{T}{4} \gamma'^2 - \frac{1}{2G} \tau \gamma' + \frac{1}{2G} \int_0^\tau \gamma(\tau) d\tau \quad (8)$$

Для наиболее распространенных теорий (см. ниже) связь между γ и τ можно представить в виде полинома

$$\gamma = \sum_{k=1}^n a_k \tau^k \quad (9)$$

и, следовательно, будем иметь

$$\delta = \frac{\tau^2}{4G} \left[\sum_{k=1}^{2n} \left(GT b_k - 2a_k \frac{k}{k+1} \right) \tau^{k-1} \right] \quad \left(b_k = \sum_{l=1}^k \sum_{m=1}^k a_l a_m \right) \quad (10)$$

По знаку δ в определенном смысле можно судить о свойствах возмущенных движений. Если во все время движения $\delta > 0$, то возмущенное движение не будет ограниченным, и надо признать, что равновесие системы неустойчиво. Может, однако, случиться, что в начале движения δ было отрицательным, но затем при некотором значении τ переменило знак на положительный и в последующем знака не меняло. Это положение вполне аналогично тому, которое имеет место в случае, когда шарик лежит в небольшом углублении на выпуклой поверхности. Равновесие шарика устойчиво по отношению к достаточно малым возмущениям, но неустойчиво по отношению к большим.

Иследуем знак δ применительно к трем простейшим теориям. В упругости $\gamma = \tau/G$ и, следовательно, все коэффициенты a_k , за исключением $a_1 = 1/G$, равны нулю. Поэтому

$$\delta = \frac{\tau^2}{4G^2} (T - 1) \quad (11)$$

так, что во время движения δ не меняет знака. При $T > 10\delta > 0$ и равновесии системы неустойчиво.

В случае упруго-пластических деформаций будем считать материал несжимаемым и ограничимся рассмотрением движения только на таком отрезке, где

$$\tau^2 \ll \sigma^2 = \text{const} \quad (12)$$

и, следовательно, когда можно принять (S_{lm} — девиатор напряжений)

$$\sigma_i = \sqrt{3/2} \sqrt{S_{lm} S_{lm}} = \sigma, \quad d\sigma_i = \frac{3\tau d\tau}{\sigma} \quad (13)$$

По теории малых упруго-пластических деформаций имеем

$$\gamma = \tau / G_s \quad (14)$$

где $G_s = G_s(\sigma_i) = G_s(\sigma) = \text{const}$ есть секущий модуль на кривой сдвига. Поэтому

$$\delta = \frac{\tau^2}{4G_s^2} \left(T - \frac{G_s}{G} \right) \quad (15)$$

Как видно, положение то же, что и в упругости, но теперь неустойчивость наступает при $T > G_s / G$.

Рассмотрим, наконец, изотропную теорию течения

$$d\epsilon_{lm} = ds_{lm} / 2G + F(\sigma_i) d\sigma_i s_{lm} \quad (16)$$

где функция $F(\sigma_i)$ может быть определена из опыта на простое сжатие

$$F(\sigma_i) = \frac{3}{2} \frac{(\eta - 1)}{E\sigma_i} = \frac{\eta - 1}{2G\sigma_i} \quad \left(\eta = \frac{E}{E'} \right) \quad (17)$$

Здесь E и E' — модуль Юнга и касательный модуль, соответственно. С учетом формулы (13) для $d\gamma = 2d\epsilon_{xy}$ получим

$$d\gamma = \frac{1}{G} \left[d\tau + 3(\eta - 1) \left(\frac{\tau}{\sigma} \right)^2 d\tau \right] \quad (18)$$

Так как η и σ постоянны, то это соотношение легко интегрируется, и с учетом начальных данных (17) получим

$$\gamma = \frac{1}{G} (\tau + A\tau^3) \quad \left(A = \frac{\eta - 1}{\sigma^2} \right) \quad (19)$$

так, что в формулах (10) надо положить

$$a_1 = \frac{1}{G}, \quad a_2 = 0, \quad a_3 = \frac{A}{G}, \quad a_k = 0 \quad (k > 3) \quad (20)$$

Тогда для δ получим

$$\delta = \frac{\tau^2}{4G^2} \left[(T - 1) + 2A \left(T - \frac{3}{4} \right) \tau^2 + A^2 T \tau^4 \right] \quad (21)$$

Если $T < 1$, то в начале движения $\delta < 0$. Однако, если начальная скорость больше некоторого положительного числа ϵ , то δ может сменить знак. Это произойдет при таком значении τ , для которого выполняется соотношение

$$T = \frac{1 + \frac{3}{2} A \tau^2}{(1 + G \tau^2)^2} \quad (22)$$

Очевидно, что эта формула справедлива только для таких τ , для которых выполняется условие (12). Если через τ_0 обозначить наибольшее допустимое значение τ , а через T_0 — соответствующее значение T , полученное по формуле (22), то результат можно сформулировать следующим образом. Для T , удовлетворяющего условию

$$1 > T > T_0 \quad (23)$$

всегда найдется такое число ϵ , что если

$$\dot{\gamma}_0 > \epsilon \quad (24)$$

то система, аналогично рассмотренному выше случаю с шариком, будет уходить от положения равновесия.

Поступила 10 V 1964

ЛИТЕРАТУРА

1. Onat E., Drucker D., Inelastic Instability and Incremental Theories of Plasticity. J. Aeronaut. Sci., 1953, v. 20, No. 3 (русск. перевод: О н а т Е., Д р у к е р Д. Неупругая потеря устойчивости и теория течения. Сб. перев. «Механика», 1955, № 3).
2. Naghdi P. M., Essenburg F., Koff W. An Experimental Study of initial and Subsequent Yield Surfaces in Plasticity. J. Appl. Mech., 1958, v. 25, No. 2 (русск. перев.; Н а х д и П., Э с с е н б у р г Ф. и К о ф ф В. Экспериментальное изучение начальной и последующих поверхностей текучести в пластической области. Сб. перев. «Механика», 1958, № 6).
3. Ivey H. I. Plastic Stress-strain relations and Yield Surfaces for Aluminium Alloys. J. Mech. Engng Sci., 1961, v. 3, No. 1 (русск. пер.: А й в и Г. Соотношение напряжение — деформация и поверхности текучести для алюминиевых сплавов. Сб. перев. «Механика», 1962, № 3).
4. Иванов Г. В. Об устойчивости равновесия при неупругих деформациях. ПМТФ, 1961, № 1.
5. Creep in Structures. Ed. by N. J. Hoff. Chilver A. H. Some Simple Models for Torsional Creep Buckling. Berlin. Springer, 1962.