УДК 539.3

АНАЛИЗ ПРОЦЕССА ВЫПУЧИВАНИЯ СТЕРЖНЕЙ ПРИ УДАРЕ

В. М. Корнев

(*Новосибирск*)

В настоящее время уделяется много внимания изучению процесса выпучивания упругих систем при действии сжимающих нагрузок большой интенсивности. В работе [1] М. А. Лаврентьевым и А. Ю. Ишлинским дано объяснение экспериментально обнаруженного явления, показано, что наиболее интенсивно (экспоненциально) растет некоторая высшая форма потери устойчивости. Так как М. А. Лаврентьев и А. Ю. Ишлинский при теоретических построениях использовали простейшую модель изгиба стержней, то было естественным появление исследований [2—9], в которых проведен численный и теоретический анализ процесса выпучивания стержней, когда применялись более точные теории, учитывающие сдвиг, инерцию вращения и конечность скорости распространения продольных возмущений. Отметим экспериментальные результаты [10, 11], выявившие влияние волнового характера распространения продольных возмущений на распределение прогибов вдоль стержня. Все исследователи [2—11] пришли к выводу, что номер наиболее интенсивно растущей формы либо совпадает, либо незначительно отличается от номера формы, определенного в работе [1]. В работах [6—8] получены асимптотики нормального прогиба стержня при больших временах с учетом продольных колебаний, в пределе при бесконечной скорости распространения продольных возмущений скорость нарастания прогибов [6—8] не согласуется с выводами работы [1].

Ниже уточняются номер наиболее интенсивно растущей формы и скорость нарастания прогибов. Получено распределение прогибов вдоль стержня при конечной скорости распространения продольных возмущений, причем в пределе, когда упомянутая скорость стремится к бесконечности, скорость нарастания прогибов согласуется с результатами, полученными в [1].

1. Система уравнений, учитывающая сдвиг, инерцию вращения и влияние продольных колебаний на поперечные движения стержней, имеет вид (см., например, [2, 12])

$$kFG\,(w_x-\psi)_x+EF\left[u_x\left(w_x+w_x^0\right)\right]_x+p\,(x,t)=\rho F w_{tt}; \tag{1.1}$$

$$EI\psi_{xx}+kFG(w_x-\psi)=\rho I\psi_{tt}; \tag{1.2}$$

$$EFu_{xx}=\rho F u_{tt}, \tag{1.3}$$

где $u(x, t)$, $w(x, t)$ — продольные и поперечные смещения; $\psi(x, t)$— угол наклона касательной к кривой изгиба; x и t — продольная координата и время; E и G — модули упругости и сдвига; F и I — площадь и момент инерции поперечного сечения стержня; k — коэффициент формы сечения; ρ — плотность материала; p — поперечная нагрузка; w^0 — начальный прогиб.

Пусть к шарнирно-опертому стержню, находящемуся в покое при $t=0$, приложена сжимающая нагрузка — N_0, которая существенно выше нагрузки Эйлера. Для системы (1.1)—(1.3) ставится следующая начально-краевая задача (l_0 — длина стержня):

$$w=0,\ \psi_x=0 \text{ при } x=0,\ l_0,\ t\geqslant 0; \tag{1.4}$$

$$w(x,0)=0,\ w_t(x,0)=0,\ \psi(x,0)=0,\ \psi_t(x,0)=0; \tag{1.5}$$

$$EFu_x(0,t)=-N_0,\ u(l_0,t)=0 \text{ или } u_x(l_0,t)=0; \tag{1.6}$$

$$u(x,0)=0,\ u_t(x,0)=0. \tag{1.7}$$

Рассмотрим промежуток времени до первого отражения продольных волн от опоры $x=l_0$. В этом случае продольные усилия определяются (см. задачу (1.3), (1.6), (1.7)) в виде

$$N(x,t)=EFu_x=-N_0\ x\leqslant ct,\ N(x,t)\equiv 0 \tag{1.8}$$

при $ct < l_0$, где $c = (E/\rho)^{1/2}$ — скорость звука. Переходим к задаче (1.1), (1.2), (1.4), (1.5). При решении этой задачи используется теорема из работы [6], теорема позволяет рассматривать вместо нелинейной исходной системы линейную. Для этой линейной системы уравнений относительно w и ψ после введения функции $\Phi = \Phi(x, t)$

$$w = EI\Phi_{xx} - kFG\Phi - \rho I\Phi_{tt}, \quad \psi = -kFG\Phi_x \tag{1.9}$$

получаем разрешающее уравнение

$$EI\Phi_{xxxx} - \rho I\frac{E+kG}{kG}\Phi_{xxtt} + N\left(\Phi_{xx} - \frac{EI}{kFG}\Phi_{xxxx} + \right. \tag{1.10}$$
$$\left. + \frac{\rho I}{kFG}\Phi_{xxtt}\right) + \rho F\Phi_{tt} + \frac{\rho^2 I}{kG}\Phi_{tttt} = -\frac{Nw^0_{xx}}{kFG} + \frac{p(x, t)}{kFG}$$

при соответствующих краевых и начальных условиях. Упомянутые условия, полученные из (1.4), (1.5) с учетом (1.9), достаточно громоздки, поэтому здесь не приводятся.

В уравнении (1.10) и краевых и начальных условиях вводятся безразмерные координаты

$$x_1 = x/l_0, \quad t_1 = ct/l_0.$$

Если опустить значок у новых переменных, то имеем окончательно уравнение

$$\Phi_{xxxx} - m_1\Phi_{xxtt} + \pi^2\eta^2\Phi_{xx} - \pi^2 m_2\eta^2(r/l_0)^2\Phi_{xxxx} +$$
$$+ \pi^2 m_2\eta^2(r/l_0)^2\Phi_{xxtt} + (l_0/r)^2\Phi_{tt} + m_2\Phi_{tttt} = f(x,t), \tag{1.11}$$
$$f(x, t) = \frac{l_0^4}{EI}\left(-\frac{Nw^0_{xx}}{kFG} + \frac{p(x, t)}{kFG}\right), \quad \eta^2 = \frac{N}{P_e},$$
$$\eta_0^2 = \frac{N_0}{P_e}, \quad P_e = \frac{\pi^2 EI}{l_0^2}, \quad m_1 = \frac{E+kG}{kG}, \quad m_2 = \frac{E}{kG},$$

где $\eta = \eta(x, t)$ — функция; η_0 — параметр, характеризующий интенсивность нагружения; P_e — нагрузка Эйлера; m_1 и m_2 — параметры, связанные с учетом инерции вращения и сдвига; r — радиус инерции поперечного сечения. Рассматриваются такие задачи, для которых $\eta_0^2 = N_0/P_e \gg 1$. При $m_1 = m_2 = 0$ уравнение (1.11) переходит в классическое уравнение изгиба балки.

2. Проведем вначале асимптотический анализ уравнения (1.11) при соответствующих краевых и начальных условиях для простейшего случая, когда пренебрегается волновыми процессами в продольном направлении, т. е.

$$\eta^2 = \eta_0^2 = N_0/P_e, \quad 0 \leqslant x \leqslant l_0 \quad (c \to \infty). \tag{2.1}$$

Эта задача допускает разделение переменных ($X_n(x)$ — формы потери устойчивости)

$$\Phi = \sum_{n=1}^{\infty} T_n(t)X_n(x), \quad X_n(x) = \sin n\pi x, \quad n = 1, 2, \ldots \tag{2.2}$$

Для амплитуд $T_n(t)$ после простых преобразований формулируются следующие задачи Коши (f_n — коэффициенты ряда Фурье функции f):

$$m_2^2(r/l_0)^2 T_n^{(4)} + [1 + \pi^2 m_1 n^2(r/l_0)^2 - \pi^6 m_2 n^4\eta^2(r/l_0)^4]\,T_n'' + \tag{2.3}$$
$$+ (r/l_0)^2[\pi^4 n^4 - \pi^4 n^2\eta^2 - \pi^6 m_2 n^4\eta^2(r/l_0)^2]\,T_n = f_n,$$
$$T_n(0) = 0, \quad T_n'(0) = 0, \quad T_n''(0) = 0, \quad T_n'''(0) = 0.$$

Уравнение задачи (2.3) выписано в виде, приспособленном для асимптотического анализа. Заметим, что при использовании простейшей модели изгиба стержня [1] коэффициенты $m_1 = m_2 = 0$. В каждом из членов, который содержит коэффициенты m_1 или m_2, присутствует малый параметр $\varepsilon = r/l_0 \ll 1$, характеризующий относительную длину стержня. В коэффициенты при четвертой, второй и нулевой производных малый параметр ε входит во второй степени, а при второй, кроме того, в четвертой степени. В дальнейшем член, содержащий ε^4, опущен. Итак, уравнение задачи (2.3) отличается от простейшего уравнения членами с малыми параметрами как в основной части (второй и третий члены), так и при старших производных (первый член).

Проведем анализ и построение решения задачи Коши (2.3), которая сингулярно возмущена [13]. Решение задачи (2.3) расчленяется на гладкую часть $q_n(t)$ и быстро осциллирующую добавку $s_n(t)$, так что

(2.4)
$$T_n(t) = q_n(t) + \varepsilon^\alpha s_n(t) = q_n^{(0)} + \varepsilon^2 q_n^{(2)} + \ldots$$
$$\ldots + \varepsilon^\alpha \left[s_n^{(0)}(t) + \varepsilon^2 s_n^{(2)}(t) + \ldots\right].$$

Величина параметра $\alpha = 3$ определяется видом краевых условий задачи (2.3); представления функций $q_n(t)$ с точностью до члена, содержащего ε^4, и функций $s_n(t)$ с точностью до члена, содержащего ε^2, следующие:

(2.5)
$$q_n(t) = -(f_n/a_{0n})[\mathrm{ch}(-a_{0n}/a_{2n})^{1/2}\, t - 1] \text{ при } a_{0n} < 0,$$
$$a_{2n} = 1 + \pi^2 m_1 n^2 (r/l_0)^2,\ q_n(t) \to \infty \text{ при } t \to \infty,$$
$$a_{0n} = (r/l_0)^2[\pi^4 n^4 - \pi^4 n^2 \eta^2 - \pi^6 m_2 n^4 \eta^2 (r/l_0)^2];$$

(2.6)
$$s_n(t)\left[f_n(-a_{0n})^{1/2} m_2^{2/3}/a_{2n}^{3/2}\right] \cos m_2^{-1/2}(l_0/r)\, t.$$

Соотношения (2.5), (2.6) получены для экспонециально возрастающих решений: $T_n(t) \to \infty$ при $t \to \infty$; два других вида решения $T_n(t)$ здесь не приводятся, так как одно из них есть линейная функция времени, а второе описывает колебания с ограниченной амплитудой. Следуя работе [1], определим номер n_* наиболее интенсивно растущей формы движения, который при заданной интенсивности нагружения η с точностью до членов ε^4 равен

(2.7)
$$n_*^2 = \frac{\eta^2}{2} \frac{1}{1 - \pi^2 m_2 \eta^2 (r/l_0)^2}.$$

Итак, когда используются уточненные уравнения типа С. П. Тимошенко, для наиболее интенсивно растущего по времени движения имеем (см. (2.2), (2.4)—(2.7)): номер формы выпучивания и показатель в экспоненте для этого движения несколько больше номера и показателя в экспоненте для движения, предсказываемого простейшей теорией [1], а амплитуда, соответствующая этой форме, кроме экспоненциально растущей составляющей [1], содержит быстро осциллирующую составляющую, малую по абсолютной величине. Полученные в пределе при $r/l_0 \to 0$ в (2.4), (2.7) соотношения совпадают с выражениями, приведенными в работе [1].

3. Переходим к анализу процесса выпучивания, когда принимается во внимание волновой процесс распространения продольных колебаний $c \neq \infty$, но только до первого отражения от опоры $x = 1$. В разрешающем уравнении (1.11) с учетом построенного решения о распространении краевого режима (1.8) имеем для безразмерных координат

(3.1)
$$\eta^2 = \eta_0^2 = N_0/P_e \text{ при } x \leq t; \quad \eta^2 \equiv 0 \text{ при } x > t.$$

Если поперечная нагрузка $p(x, t)$ такова, что $p(x, t) \equiv 0$ при $x > t$, то максимальная скорость распространения возмущений для системы, описываемой уравнением (1.11) с учетом (3.1), совпадает со скоростью продольных волн в стержне, а потому на фронте выполняются условия

$$\Phi - m_2(r/l_0)^2\Phi'' = 0, \ \Phi' = 0 \text{ при } x = t. \tag{3.2}$$

После добавления к условиям (3.2) краевых условий при $x = 0$ (например, условия шарнирного опирания) для уравнения (1.11) получается задача на переменном интервале [14]. Для анализа процесса выпучивания стержня при интенсивном продольном ударе исследуется асимптотика X_n собственных форм потери устойчивости стержня (модель С. П. Тимошенко)

$$\{(\,)'' + \lambda_n^2 [1 - m_2 (r/l_0)^2 (\,)'']\} \Phi'' = 0, \tag{3.3}$$

$$\Phi = \Phi'' = 0 \text{ при } x = 0, \ \Phi - m_2(r/l_0)^2\Phi'' = \Phi' = 0 \text{ при } x = 1.$$

Если

$$1 - m_2 (r/l_0)^2 \lambda_n^2 > 0, \tag{3.4}$$

то асимптотика собственных функций задачи (3.3) при $n \to \infty$ совпадает с собственными формами потери устойчивости шарнирно-опертого стержня $X(x) = \sin n\,\pi x$. Ограничение (3.4) возникает из-за некоторой несогласованности модели С. П. Тимошенко для очень коротких волн [5].

Проводим далее анализ движений стержня на переменном интервале [5]. Установлено, что наиболее интенсивно развиваются такие формы выпучивания, которые соответствуют соотношению (2.7). Введем следующее преобразование для уравнения (1.11) с учетом (3.1):

$$\tau = t - x. \tag{3.5}$$

Временная координата преобразована так, что превратилась в истинное время действия сжимающей нагрузки в фиксированном сечении стержня. После преобразований (3.5) уравнение (1.11) содержит члены с малыми множителями, которые в дальнейшем опустим. Ограничимся построением решения системы с «одной» степенью свободы, которая наиболее быстро растет [5],

$$\Phi(x, \tau) = T(\tau)X(x),$$

$$X(x) = \sin \pi x/l_* \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant t, \ X(x) = 0 \text{ при } x > t \ (x < 1).$$

Здесь l_* — длина полуволны, соответствующая соотношению (2.7). Уравнение для амплитуды $T(\tau)$ имеет вид (2.3) с нулевыми начальными условиями, вид решения этой задачи совпадает с выражениями (2.5), (2.6), если в последних t заменить на τ и опустить значок n. Переходим к старым координатам (см. (3.5)).

Получим решение в виде

$$\Phi(x, t) = \left\{-\frac{f}{a_0}\left[\operatorname{ch}\left(-\frac{a_0}{a_2}\right)^{1/2}(t - x) - 1\right] + \right. \tag{3.6}$$

$$\left. + \left(\frac{r}{l_0}\right)^3 \frac{f(-a_0)^{1/2} m_2^{2/3}}{a_2^{3/2}} \cos \frac{1}{m_2^{1/2}} \frac{l_0}{r}(t - x)\right\} \sin \frac{\pi x}{l_*} \quad \text{при} \quad x \leqslant t,$$

$$\Phi(x, t) \equiv 0 \text{ при } x > t \quad (x < 1).$$

Полученное решение несколько отличается от решения, приведенного в работе [5]: длины волн потери устойчивости и скорости нарастания прогибов совпадают с точностью до членов за малыми параметрами, а дополнительное слагаемое в фигурной скобке соотношения (3.6) имеет малый множитель. Амплитуда быстроосциллирующей составляющей решения (3.6) мала. При учете конечности скорости распространения продольных возмущений соседние полуволны растут как бы независимо, а амплитуда прогибов убывает по экспоненциальному закону от ударяемого торца стержня.

Приведенное решение (3.6) хорошо согласуется с натурными экспериментами [10, 11] и с результатами численных расчетов, приведенных в работе [2]. Эти расчеты выявили наличие быстроосциллирующей составляющей решения, амплитуда которой мала. Приведенные в графическом виде результаты расчетов [3,4] сглажены. После возвращения в представлении решения (3.6) к размерным координатам возможен предельный переход при $c \to \infty$. В этом случае получается решение для системы с одной степенью свободы, причем для этой степени свободы длина волны и скорость нарастания прогибов отличаются от таковых из работы [1] только членами с малыми параметрами. Полученное решение (3.6) не согласуется с результатами работ [6—8].

Поступила 25 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лаврентьев М. А., Ишлинский А. Ю.** Динамические формы потери устойчивости упругих систем.— ДАН СССР, 1949, т. 64, № 6.
2. **Huffington N. J. Ir.** Response of elastic columns to axial pulse loading.— AIAA J., 1963, vol. 1, N 9.
3. **Вольмир А. С., Кильдибеков И. Г.** Исследование процесса выпучивания стержней при ударе.— ДАН СССР, 1966, т. 167, № 4.
4. **Гордиенко Б. А.** Выпучивание стержней при ударном нагружении.— Изв. АН СССР. МТТ, 1969, № 1.
5. **Корнев В. М.** О формах потери устойчивости упругого стержня при ударе.— ПМТФ, 1968, № 3.
6. **Малый В. И., Ефимов А. Б.** Потеря устойчивости стержня при продольном ударе.— ДАН СССР, 1972, т. 202, № 4.
7. **Малый В. И.** Выпучивание стержня при продольном ударе. Малые прогибы.— Изв. АН СССР. МТТ, 1973, № 4.
8. **Кирюхин Л. В., Малый В. И.** Выпучивание упругого стержня при продольном ударе.— Вестн. Моск. ун-та, 1974, № 3.
9. **Корнев В. М.** Выпучивание однородного стержня конечной длины при ударе.— В кн.: Динамика сплошной среды. Вып. 30. Новосибирск, изд. Ин-та гидродинамики СО АН СССР, 1977.
10. **Линдберг Г. Е.** Потеря устойчивости тонкого стержня при ударе.— Прикл. механика, 1965, № 2.
11. **Малышев Б. М.** Устойчивость стержней при ударном сжатии.— Инж. журн. МТТ, 1966, № 4.
12. **Тимошенко С. П.** Колебания в инженерном деле. М., Физматгиз, 1959.
13. **Handelman G. H. Jr., Keller J. B.** Loss of boundary conditions in the asymptotic solution of linear ordinary differential equations. II Boundary value problems.— Comm. on pure and appl. math., 1968, vol. 21, N 3.
14. **Слепян Л. И.** Исследование нестационарных деформаций с помощью рядов, определенных на переменном интервале.— Изв. АН СССР. Механика, 1965, № 4.