

Получим выражения для главных напряжений σ_1 , σ_2 и σ_3 в случае сплошного диска через компоненты t^{mn} по формулам $\sigma_1 = t^{11}G_{11}$, $\sigma_2 = t^{22}G_{22}$, $\sigma_3 = t^{33}$ в форме

$$\sigma_1 = \frac{2\mu(\rho^{\kappa-1} - 1)}{(1-2\nu)\rho^{\kappa-1} + 1}, \quad \sigma_2 = \frac{2\mu(\kappa\rho^{\kappa-1} - 1)}{(1-2\nu)\kappa\rho^{\kappa-1} + 1},$$

$$\sigma_3 = \frac{2\mu\nu(1-\nu)(1+\kappa)(2\kappa\rho^{\kappa-1} - \kappa - 1)}{\kappa[(1-2\nu)\kappa\rho^{\kappa-1} + 1][(1-2\nu)\rho^{\kappa-1} + 1]}.$$

Видно, что главные напряжения не имеют особенности на оси дисклинации.

Полученные результаты о поведении напряжений и деформаций вблизи оси дефекта при строгом учете геометрической нелинейности качественно отличаются от результатов линейной теории упругости [9, 11], согласно которой поля деформаций и напряжений имеют логарифмическую особенность на оси дисклинации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мухелишвили Н. И. Некоторые основные задачи математической теории упругости.— М.: Наука, 1966.
2. Лурье А. И. Нелинейная теория упругости.— М.: Наука, 1980.
3. Грин А., Адкинс Дж. Большие упругие деформации и нелинейная механика сплошных сред.— М.: Мир, 1965.
4. Черных К. Ф. Обобщенная плоская деформация в нелинейной теории упругости // ПМ.— 1977.— Т. 13, № 1.
5. Зубов Л. М. Теория кручения призматических стержней при конечных деформациях // ДАН СССР.— 1983.— Т. 270, № 4.
6. Годунов С. К. Элементы механики сплошной среды.— М.: Наука, 1978.
7. Седов Л. И. Введение в механику сплошной среды.— М.: Физматгиз, 1962.
8. Зубов Л. М. Методы нелинейной теории упругости в теории оболочек.— Ростов н/Д: Рост. ун-т, 1982.
9. Де Вит Р. Континуальная теория дисклинаций.— М.: Мир, 1977.
10. Работнов Ю. Н. Механика деформируемого твердого тела.— М.: Наука, 1979.
11. Лурье А. И. Теория упругости.— М.: Наука, 1970.

Поступила 30/VII 1986 г.

УДК 539.3

ВНУТРЕННИЙ ИСТОЧНИК КОНЕЧНЫХ РАЗМЕРОВ В ОДНОРОДНОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

В. А. БАБЕШКО, Е. В. ГЛУШКОВ,
Н. В. ГЛУШКОВА, А. А. ЕВДОКИМОВ

(Краснодар)

Использование методов неразрушающего контроля конструкций и материалов связано с построением и расшифровкой волновых полей, создаваемых в среде включениями и неоднородностями различного типа. К подобным задачам сводится и моделирование сейсмических очагов [1]. Задача об излучении в безграничную среду цилиндром конечных размеров и радиуса r_0 впервые, по-видимому, исследовалась в [2]. В этой работе стенки цилиндра подвергались нестационарным (продольному и двум видам срезающих) давлениям. С учетом такого рода нагрузок получены представления для амплитуд продольных и поляризованных поперечных волн. Кроме того, изучен вопрос распределения энергии между указанными типами волн. Показано, что при действии лишь продольного давления от источника выходит SV -волна, амплитуда которой в 1,6 раза больше P -волны и которая направлена под углом в 45° . В последнее время основной упор все больше делается не на изучение излучаемого поля (задачи для безграничной среды), а на учет отражений от поверхности и внутренних неоднородностей (см., например, [1, 3, 4]).

В настоящей работе рассматривается задача, возникающая при изучении волновых полей, возбуждаемых в упругом однородном полупространстве заглубленным бесконечно тонким источником конечных размеров, например свайным фундаментом виброустановок. Решение задачи представляет суперпозицию волнового поля, излучаемого непосредственно источником и отраженного от поверхности полупространства. Вертикальные и горизонтальные колебания свай моделируются гармонической объемной силой, распределенной под поверхностью упругого полупространства вдоль конечного отрезка. Получены аналитические представления для амплитуды продольных, поперечных и рэлеевских волн в дальней от источника зоне.

1. Рассматривается однородное упругое полупространство ($-\infty \leq x, y \leq \infty$, $-\infty \leq z \leq 0$). Установившиеся гармонические колебания среды $\mathbf{v} = \text{Re}[\mathbf{u}e^{i\omega t}]$, возбуждаемые бесконечно тонким заглубленным источником конечной длины, описываются динамическими уравнениями Ламэ

$$(1.1) \quad (\lambda + 2\mu)\text{grad div } \mathbf{u} - \mu \text{rot rot } \mathbf{u} + \mathbf{f} + \rho\omega^2\mathbf{u} = 0$$

с граничными условиями

$$(1.2) \quad \tau_{xz} = \tau_{yz} = \sigma_{zz} = 0, \quad -\infty \leq x, y \leq \infty, \quad z = 0.$$

На бесконечности требуется обращение перемещений $\mathbf{u} = \{u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)\}$ в нуль и выполнение условий излучения, вытекающих из принципа предельного поглощения [5]. В соотношениях (1.1) ω — циклическая частота колебаний источника; λ, μ — коэффициенты Ламэ; ρ — плотность среды; $\mathbf{f} = \{f_1, f_2, f_3\}$ — вектор объемных сил, моделирующих воздействие на среду вертикально ориентированного источника; $f_i(x, y, z) = f_i(z) \delta(x - x_m, y - y_m)$, $-h \leq z \leq -h_0$. Все физические величины приведены к безразмерному виду. Коэффициенты Ламэ отнесены к некоторому характерному значению модуля сдвига среды $\mu_0 = 10^9$ Н/м², плотность ρ — к плотности $\rho_0 = 10^3$ кг/м³, линейные размеры — к характерному линейному размеру $l_0 = 1$ м. В этом случае в качестве частоты используется обобщенная частота $\omega = 2\pi\nu l_0 \times \sqrt{\rho_0/\mu_0} = 6 \cdot 10^{-3}\nu$, где ν — частота, Гц.

После применения преобразования Фурье с параметрами α_1, α_2 по координатам x и y исходная краевая задача сводится к решению систем обыкновенных дифференциальных уравнений

$$(1.3) \quad \mathbf{Y}' = A\mathbf{Y} + \mathbf{H};$$

$$(1.4) \quad T\mathbf{Y}|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{Y} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty;$$

$$(1.5) \quad \mathbf{X}' = B\mathbf{X} + \mathbf{P};$$

$$(1.6) \quad (\mathbf{L} \cdot \mathbf{X})|_{z=0} = 0, \quad \mathbf{X} \rightarrow 0, \quad z \rightarrow -\infty.$$

Здесь A, B и T — матрицы с постоянными коэффициентами

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & 0 & 0 & a_{24} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a_{42} & a_{43} & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ b_{21} & 0 \end{pmatrix},$$

$$T = \begin{pmatrix} -\lambda\alpha^2 & 0 & 0 & \lambda + 2\mu \\ 0 & -i\mu\alpha^2 & -i\mu\alpha^2 & 0 \end{pmatrix},$$

$$b_{21} = (\mu\alpha^2 - \rho\omega^2)/\mu, \quad a_{21} = [\alpha^2(\lambda + 2\mu) - \rho\omega^2]/\mu,$$

$$a_{24} = -(\lambda + \mu)/\mu, \quad a_{42} = \alpha^2(\lambda + \mu)/(\lambda + 2\mu),$$

$$a_{43} = (\alpha^2\mu - \rho\omega^2)/(\lambda + 2\mu), \quad \alpha^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2.$$

Штрих означает дифференцирование по z , а векторы $\mathbf{Y}, \mathbf{X}, \mathbf{H}, \mathbf{P}, \mathbf{L}$ имеют вид

$$\mathbf{Y} = \{\Phi, \Phi', W, W'\}, \quad \mathbf{X} = \{\Psi, \Psi'\},$$

$$\mathbf{H} = \left\{0, -\frac{i}{\mu\alpha^2}(\alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2), 0, -\frac{1}{\lambda + 2\mu} F_3\right\},$$

$$\mathbf{P} = \left\{0, -\frac{i}{\mu\alpha^2}(\alpha_2 F_1 - \alpha_1 F_2)\right\}, \quad \mathbf{L} = \{0, -i\mu\alpha^2\},$$

где $F_i = f_i(z) e^{i(\alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m)}$, $\Phi, \bar{\Psi}, \bar{W}(\alpha_1, \alpha_2, z) = \int_{-\infty}^{+\infty} \{\varphi, \psi, w(x, y, z) e^{i(\alpha_1 x + \alpha_2 y)} dx dy$,

а функции $\varphi(x, y, z)$ и $\psi(x, y, z)$ связаны с перемещениями $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ следующими соотношениями: $u = \partial\varphi/\partial x + \partial\psi/\partial y$, $v = \partial\varphi/\partial y - \partial\psi/\partial x$.

Решение неоднородных систем (1.3), (1.5) ищется в виде суммы частного решения, определенного методом вариации постоянных, и общего решения соответствующей однородной системы:

$$(1.7) \quad \mathbf{Y} = \sum_{k=1}^4 d_k e^{\gamma_k z} \mathbf{m}_k + \sum_{k=1}^4 t_k(z) e^{\gamma_k z} \mathbf{m}_k;$$

$$(1.8) \quad \mathbf{X} = \sum_{k=1}^2 c_k e^{s_k z} \mathbf{n}_k + \sum_{k=1}^2 \tau_k(z) e^{s_k z} \mathbf{n}_k.$$

Здесь $\gamma_{1,2} = \pm \sigma_1 = \pm \sqrt{\alpha^2 - \kappa_1^2}$, $\gamma_{3,4} = \pm \sigma_2 = \pm \sqrt{\alpha^2 - \kappa_2^2}$; $\kappa_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}$; $\kappa_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$;

$s_k = \pm \sigma_2$; m_k , \bar{m}_k — собственные значения и собственные векторы матриц A и B . Однозначная ветвь радикалов σ_1, σ_2 определяется условием $\text{Re } \sigma \geq 0, \text{Im } \sigma \leq 0$. Такой выбор ветви удовлетворяет принципу излучения [5]. Коэффициенты $t_k(z), \tau_k(z)$ имеют вид

$$\begin{aligned} t_k(z) &= q_1 \left(\pm \frac{i\alpha_1}{\sigma_1} I_{11}^{\pm}(z) \pm \frac{i\alpha_2}{\sigma_1} I_{21}^{\mp}(z) - I_{31}^{\mp}(z) \right), \\ t_{k+2}(z) &= q_1 \left(-\frac{i\alpha_1}{\alpha^2} I_{12}^{\mp}(z) - \frac{i\alpha_2}{\alpha^2} I_{22}^{\mp}(z) \pm \frac{1}{\sigma_2} I_{32}^{\mp}(z) \right), \\ \tau_k(z) &= \pm q_2 (\alpha_2 I_{12}^{\mp}(z) - \alpha_1 I_{22}^{\mp}(z)), \\ I_{ln}^{\mp}(z) &= \int_0^z f_l(\xi) e^{\mp \sigma_n \xi} d\xi, \\ q_1 &= e^{i(\alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m)} / 2\rho\omega^2, \\ q_2 &= e^{i(\alpha_1 x_m + \alpha_2 y_m)} / 2\mu\sigma_2\alpha^2, \end{aligned}$$

где верхний знак отвечает $k = 1$, нижний $k = 2$. Неизвестные коэффициенты d_k, c_k решений однородных систем определяются из граничных условий при $z = 0$ и на бесконечности. Для удовлетворения условий при $z \rightarrow -\infty$ необходимо в решениях (1.7), (1.8) положить

$$(1.9) \quad d_2 = -t_2(-h), \quad \bar{d}_4 = -t_4(-h), \quad c_2 = -\tau_2(-h).$$

Коэффициенты $t_2(-h), t_4(-h), \tau_2(-h)$ отличаются от $t_2(z), t_4(z), \tau_2(z)$ тем, что в выражениях, их определяющих, вместо $I_{ln}^{\pm}(z)$ взяты $I_{ln}^{\mp}(-h) = \int_{-h_0}^{-h} f_l(\xi) e^{\mp \sigma_n \xi} d\xi$. Выбор

коэффициентов d_2, d_4, c_2 в виде (1.9) оправдан тем, что, решив две однородные задачи типа (1.3), (1.5) для областей $-h_0 \leq z \leq 0, -\infty \leq z \leq -h$ и одну неоднородную для области $-h \leq z \leq -h_0$, а затем осуществив стыковку решений на основании условий равенства перемещений и напряжений на границах областей, придем к соотношениям (1.9). Оставшиеся неизвестными коэффициенты d_1, d_3 определяются из условий (1.4), (1.6) при $z = 0$.

Найдя решения краевых задач (1.3)–(1.6) и применив обратное преобразование Фурье к равенствам

$$\begin{aligned} U(\alpha_1, \alpha_2, z) &= -i\alpha_1 \Phi(\alpha_1, \alpha_2, z) - i\alpha_2 \Psi(\alpha_1, \alpha_2, z), \\ V(\alpha_1, \alpha_2, z) &= -i\alpha_2 \Phi(\alpha_1, \alpha_2, z) + i\alpha_1 \Psi(\alpha_1, \alpha_2, z), \\ W(\alpha_1, \alpha_2, z) &= \bar{W}(\alpha_1, \alpha_2, z), \end{aligned}$$

получим решение исходной задачи (1.1), (1.2)

$$\begin{aligned} (1.10) \quad u(x, y, z) &= \frac{1}{4\pi^2} \int_{\Gamma_1} \int_{\Gamma_2} \sum_{k=1}^2 (Q_k e^{\sigma_k z} + G_k e^{-\sigma_k z}) e^{-i[\alpha_1(x-x_m) + \alpha_2(y-y_m)]} d\alpha_1 d\alpha_2, \\ Q_k &= \begin{pmatrix} -i\alpha_1 & 0 \\ -i\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} J_k^1 - (D_1 P_k + D_2 M_k) \\ J_k^2 - (D_1 R_k + D_2 S_k) \end{pmatrix} + (k-1) \begin{pmatrix} -i\alpha_2 \\ i\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} (\tau_1(z) - D_3 N), \\ G_k &= \begin{pmatrix} -i\alpha_1 & 0 \\ -i\alpha_2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} H_k^1 \\ H_k^2 \end{pmatrix} + (k-1) \begin{pmatrix} -i\alpha_2 \\ i\alpha_1 \\ 0 \end{pmatrix} (\tau_2(z) - \tau_2(-h)), \\ D_k &= -t_2(-h) \{Tm_2\}_k - t_4(-h) \{Tm_4\}_k, \quad k = 1, 2, \\ D_3 &= -\tau_2(-h) i\mu\alpha^2\sigma_2, \\ J_k^p &= t_{2k-1}(z) m_{2k-1}^{2p-1}, \quad p, k = 1, 2, \\ H_k^p &= [t_{2k}(z) - t_{2k}(-h)] m_{2k}^{2p-1}, \quad p, k = 1, 2. \end{aligned}$$

Явный вид функций M, N, P, R, S приведен в [5], контуры интегрирования выбираются в соответствии с принципом предельного поглощения.

2. Проанализируем волновое поле в дальней зоне. Применяя к (1.10) метод стационарной фазы [6], получим

$$(2.1) \quad u_R(x, y, z) = \frac{i \cos \theta}{2\pi R} \sum_{n=1}^2 Q_n(\alpha_{1n}, \alpha_{2n}) \kappa_n e^{i\bar{n}\kappa_n} (1 + O(R^{-2})), \quad R \rightarrow \infty.$$

Здесь использована сферическая система координат $x = R \cos \varphi \cdot \sin \theta$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, $y = R \sin \varphi \cdot \sin \theta$, $\pi/2 \leq \theta \leq \pi$, $z = R \cos \theta$ и $\alpha_{1n} = -\kappa_n \sin \theta \cdot \cos \varphi$, $\alpha_{2n} = -\kappa_n \times \sin \theta \cdot \sin \varphi$ — стационарные точки. Первое и второе слагаемые выражения (2.1) описывают продольную и поперечную волны соответственно.

Аналитическое представление решения, отвечающего слабозатухающим поверхностным волнам, определяется вычетами в вещественных полюсах подынтегральной функции и в случае однородного полупространства имеет вид

$$u_r(x, y, z) = i \operatorname{res} \sum_{k=1}^2 (Q_k e^{\sigma_k z} + G_k e^{-\sigma_k z}) \alpha \sqrt{\frac{2}{c r \pi}} e^{i\left(\alpha r - \frac{\pi}{4}\right)} \Big|_{\alpha=\eta} (1 + O(r^{-1})), \quad r \rightarrow \infty,$$

где η — рэлеевский полюс; $r = \sqrt{x^2 + y^2}$. Полученные соотношения позволяют определить амплитуды продольных, поперечных и рэлеевских волн в дальней от источника зоне в зависимости от частоты, глубины залегания источника, его линейных размеров, а также от вида прикладываемой нагрузки и ее распределения вдоль размеров источника.

3. Численный анализ на ЭЦВМ проведен для горизонтальной и вертикальной нагрузок при следующих параметрах: $a = 7$ — линейный размер источника, $h = -24, 48, 72$ — глубины его залегания, $j = v_s/v_p = 0,2$ — параметр, характеризующий свойства среды. Здесь $v_s, v_p = 1$ — скорость поперечной и продольной волны.

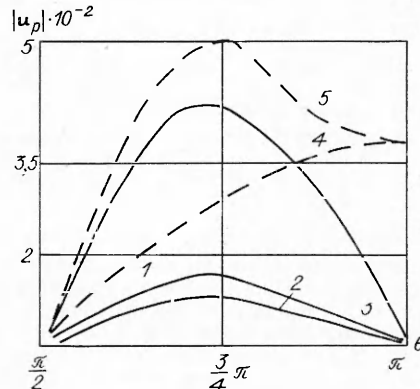
Нагрузка вдоль источника распределена по закону $f(\zeta) = k\zeta + b$. При этом $\int_0^a f(\zeta) d\zeta = 1$, $f(a)/f(0) = \varepsilon$, $0 \leq \varepsilon \leq 1$, $k = b(\varepsilon - 1)/a$, $b = 2/(a(1 + \varepsilon))$.

На рис. 1 приведены формы диаграмм направленности излучения продольных волн для горизонтальной и вертикальной нагрузок (линии 1—3 и 4, 5 соответственно). Возможность неравномерного распределения нагрузки вдоль размеров источника учитывалась параметром $\varepsilon = 1; 0,5; 0$ (линии 1—3) при $\omega = 0,012$, $h = 24$. Видно, что при стремлении ε к нулю амплитуда P -волн вначале уменьшается, а затем резко возрастает. Однако тенденция этой зависимости такова, что при изменении глубины залегания источника (например, $h = 48$) с уменьшением ε наблюдается только увеличение амплитуды продольных волн. Такие изменения обусловлены взаимодействием волн, излучаемых источником и отраженных от поверхности полупространства. Аналогичные зависимости по ε характерны и для вертикальной нагрузки. Линии 4, 5 отвечают $\omega_1 = 0,012$, $\omega_2 = 0,06$ при $\varepsilon = 1$, $h = 24$. Значения $|u_p|$ на линии 4 уменьшены в 3 раза.

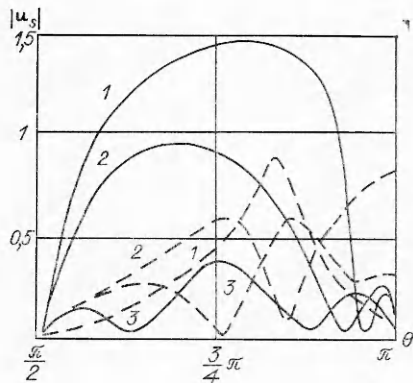
Видно, что с увеличением частоты в прежней каплеобразной форме диаграммы направленности появляются лепестки, максимум излучения в которых приходится теперь уже на направления, отличные от направления строго вниз, и имеет меньшее значение. В случае горизонтальной нагрузки увеличение частоты колебаний источника от ω_1 до ω_2 приводит к тому, что максимум излучения в диаграмме направленности сдвигается в сторону меньших значений угла θ и при этом растет.

На рис. 2 при $\varepsilon = 1$, $j = 0,2$, $\omega = 0,012$ представлены диаграммы направленности поперечных волн для вертикальной и горизонтальной нагрузок (сплошная и штриховая линии соответственно). В каждом из случаев линиям 1—3 отвечают глубины $h = 24, 48, 72$. Значения $|u_s|$ на линиях 1—3 для горизонтальной нагрузки уменьшены в 3 раза. Из рис. 1, 2 видно, что амплитуда смещений в поперечной волне больше амплитуды смещений в продольной в среднем на 1—2 порядка в зависимости от типа нагрузки. Это обусловлено тем, что рассматриваемый источник работает на сдвиг, а продольные колебания значительной амплитуды возбуждают, как правило, источники, работающие на сжатие — расширение.

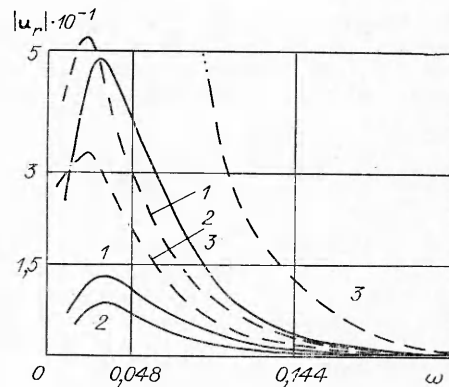
Зависимость амплитуды рэлеевской волны от частоты приведена на рис. 3. Сплош-



Р и с. 1



Р и с. 2



Р и с. 3

ные линии соответствуют горизонтальной нагрузке, штриховые — вертикальной. В обоих случаях линии 1—3 отвечают $\varepsilon = 1; 0,5; 0$ и $h = 24$.

ЛИТЕРАТУРА

1. Аки К., Ричардс П. Количественная сейсмология: Теория и методы.— М.: Мир, 1983.— Т. 1.
2. Neelan P. A. Radiation from a cylindrical source of finite length // Geophys.— 1953.— V. 18, N 3.
3. Luco I., Enrigue J., Apsel Randy J. On the Green's functions for a layerend half-space. Part I—II // Bull. Seismol. Soc. Amer.— 1983.— V. 73, N 4.
4. Chislain R. Franssens. Calculation of the elastodynamic Green's function in layerend media by means of a modified propagator matrix metod // Geophys. J. Roy. Astronom. Soc.— 1983.— V. 75.— P. 669.
5. Ворович И. И., Бабешко В. А. Динамические смешанные задачи теории упругости для неклассических областей.— М.: Наука, 1979.
6. Федорюк М. И. Метод перевала.— М.: Наука, 1977.

Поступила 25/VIII 1986 г.

УДК 539.376

СТРУКТУРНЫЕ ПАРАМЕТРЫ И ДЛИТЕЛЬНАЯ ПРОЧНОСТЬ МЕТАЛЛОВ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ

В. И. АСТАФЬЕВ

(Куйбышев)

1. При описании процесса высокотемпературной ползучести металлов широкое распространение получила концепция механических уравнений состояния [1], согласно которой тензор скоростей деформаций ползучести \dot{p}_{ij} определяется текущими значениями тензора напряжений σ_{ij} , температуры T и совокупности структурных параметров q_1, q_2, \dots, q_n

$$(1.1) \quad \dot{p}_{ij} = \dot{p}_{ij}(\sigma_{kl}, T, q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Изменение структурных параметров q_i , характеризующих текущее внутреннее состояние материала, описывается системой кинетических уравнений вида

$$(1.2) \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i(\sigma_{kl}, T, q_1, q_2, \dots, q_n).$$

Соотношения (1.1), (1.2) при определенной конкретизации параметров q_1, q_2, \dots, q_n позволяют описать различные эффекты процесса ползучести (упрочнение, разупрочнение и т. п.) и длительной прочности металлов [1—3]. Критерии разрушения, основанные на достижении некоторым структурным параметром (параметром поврежденности) своего предельного значения в момент разрушения t_* , учитывают лишь кинетику развития такого параметра (1.2), оставляя в стороне сам процесс ползучести (1.1).

Различные экспериментальные данные говорят о том, что процессы ползучести и накопления поврежденности взаимосвязаны [1—3]. С термодинамической точки зре-