

(2.2a), позволяет оценить медленное время  $\bar{t}$ , и сравнить его с быстрым временем  $t = 2\pi/\alpha C$  волнового процесса (1.1). Оказалось, что для установления распределений, показанных на фиг. 5, на течение должно воздействовать  $\sim 5$  периодов быстрого времени. С ростом угла  $\theta$  и амплитуд волн  $\kappa_T$  это соотношение уменьшается. Оценки для  $V$ ,  $W$  несколько хуже, здесь  $t_1/t$  оценивается в несколько десятков.

Поступила 25 X 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Tani I. Some thoughts on boundary-layer transition.— In: Laminar-Turbulent Transition: Symp., Stuttgart, 1979, Berlin e. a., 1980.
2. Craik A. D. D. Nonlinear resonant instability in boundary layers.— J. Fluid Mech., 1971, vol. 50, pt 2.
3. Гольдштик М. А., Штерн В. И. Гидродинамическая устойчивость и турбулентность. Новосибирск: Наука, 1977.
4. Nakaya C. Three-dimensional waves in boundary layer.— In: Laminar-Turbulent Transition: Symp., Stuttgart, 1979, Berlin e. a., 1980.
5. Benney D. J., Lin C. C. On the secondary motion induced by oscillations in a shear flow.— Phys. Fluids, 1960, vol. 3, N 4.
6. Benney D. J. Finite amplitude effects in an unstable laminar boundary layer.— Phys. Fluids, 1964, vol. 7, N 3.
7. Antar V. N., Collins F. G. Numerical calculation of finite amplitude effects in unstable laminar boundary layers.— Phys. Fluids, 1975, vol. 18, N 3.
8. Желтухин Н. А., Терехова Н. М. Вторичные течения в неустойчивом пограничном слое.— ПМТФ, 1981, № 4.
9. Бетчев Р., Криминале В. Вопросы гидродинамической устойчивости. М.: Мир, 1971.
10. Жигулев В. Н. Нелинейная теория развития возмущений.— В кн.: Аэродинамика и физическая кинетика. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1977.
11. Гапонов С. А., Скобелев Б. Ю. Вторичные автоколебательные режимы в течении Блазиуса.— В кн.: Вопросы гидродинамики. Новосибирск: ИТПМ СО АН СССР, 1975.
12. Klebanoff P. S., Tidstrom K. D., Sargent L. M. The three-dimensional nature of boundary-layer instability.— J. Fluid Mech., 1962, vol. 12, pt 1.
13. Яненко Н. П. Метод дробных шагов решения многомерных задач математической физики. Новосибирск: Наука, 1967.

УДК 536.252 + 532.5 + 532.68

### ТЕПЛОВАЯ КОНВЕКЦИЯ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ СЛОЕ ПРИ БОКОВОМ ПОДВОДЕ ТЕПЛА

А. Г. Кирдяшкин, В. И. Полежаев, А. И. Федюшкин

(Новосибирск, Москва)

1. Введение. Задача о конвекции в вытянутом по горизонтали слое в поле силы тяжести при наличии градиента тепла, направленного вдоль этого слоя, наряду с известной задачей Рэлея — Бенара о возникновении конвекции при подогреве слоя снизу представляет одну из фундаментальных задач теории тепловой конвекции, к которой в последние годы привлечено внимание исследователей благодаря различным техническим, технологическим и геофизическим приложениям (процессы переноса при кристаллизации в горизонтальном методе направленной кристаллизации, в коллекторах установок для преобразования солнечной энергии, в мелководных водоемах и т. д.). Так как гидростатическое равновесие в этом случае отсутствует, то конвекция в отличие от упомянутого случая подогрева снизу имеет здесь место при любой отличной от нуля горизонтальной разности температур, но ее интенсивность и воздействие на поле температур (концентраций) существенно зависят от относительного удлинения слоя, чисел Рэлея, Прандтля. Принципиальную роль играют при этом условия теплообмена на верхней и нижней горизонтальных поверхностях, которые в реальных условиях, как правило, изменяются в широких пределах. Таким образом, здесь имеется широкий класс многопараметрических конвективных процессов, для изучения которых, как и в других случаях, требуются построение математической модели на основе уравнений Навье — Стокса и проверка ее адекватности путем сопоставления с данными лабораторного эксперимента.

Наиболее изученным теоретически является случай, когда вдоль обеих горизонтальных границ задано одинаковое (линейное) распределение температур. В этом случае выполнен ряд работ по устойчивости течения в бесконечно длинном слое [1, 2].

Развитие конвекции в этом случае приводит к неустойчивой вертикальной температурной стратификации у нижней и верхней границ слоя.

В данной работе экспериментально и теоретически изучается другой случай, когда горизонтальные границы слоя теплоизолированы и на боковых поверхностях заданы различные температуры. В этом случае наличие конвекции всегда приводит к устойчивой вертикальной стратификации по температуре, что существенно изменяет структуру течения и переноса тепла. Изучению этого класса задач в настоящее время посвящено уже немало работ [2—13]. Первые результаты [2—4] показывали наличие, как и в вертикальном слое, устойчиво стратифицированного вертикального профиля температуры и неподвижного ядра, со значительно меньшей интенсивностью конвекции по сравнению со случаем  $L/H = 1$ .

В [5—8] начато изучение специфики переноса тепла в длинных слоях, представлена асимптотика решения для предельного случая  $H/L \rightarrow 0$ ; при этом в [8] рассмотрено влияние граничных условий на верхней горизонтальной поверхности на температуру и структуру течения внутри полости. Численное решение в диапазоне  $70 \leq Ra \leq 1,4 \cdot 10^3$ ,  $Pr = 7$ ,  $1 \leq L/H \leq 20$  и экспериментальное исследование в диапазоне  $1,3 \cdot 10^6 \leq Ra \leq 1,1 \cdot 10^8$ ,  $L/H = 50; 100$  для воды представлены соответственно в [6, 7].

В работе [9], обобщающей результаты экспериментального изучения конвекции в горизонтальном слое, подогреваемом сбоку (вода,  $L/H = 18,2 \cdot 10^8 < Ra < 2 \cdot 10^9$ ), указывается на наличие слабых противотоков между ядром и пограничным слоем на горизонтальной стенке. Экспериментальные данные о структуре течения в прямоугольных замкнутых полостях при  $Pr \geq 10$ ,  $10^3 \leq Ra \leq 10^7$  получены в [10], в частности, измерено значение критического числа Рэлея, при котором происходит возникновение вторичных вихрей около вертикальных стенок. Численные параметрические исследования конвективного теплообмена в неглубоких замкнутых полостях в диапазоне параметров  $0,01 \leq Pr \leq 100$ ,  $Ra \leq 6 \cdot 10^6$ ,  $1 \leq L/H \leq 40$  представлены в [11]. В [12] теоретически и численно ( $L/H = 5; 10$ ,  $Pr = 1$ ,  $10^6 \leq Ra \leq 3 \cdot 10^9$ ) исследуется конвективное течение в горизонтальной полости при больших числах Рэлея  $Ra$  и удлинениях  $L/H$ . В численных расчетах использована сетка  $31 \times 37$ . Численное исследование влияния тепловой и концентрационной конвекции на структуру течения, распределение температуры и примеси при выращивании монокристаллов из газовой фазы при граничных условиях первого и второго рода по температуре на горизонтальных поверхностях представлены в [13] ( $L/H \leq 4,4$ ,  $Ra < 1,6 \cdot 10^4$ ,  $Pr = 0,73$ ).

Однако вплоть до настоящего времени не выполнены численные расчеты распределения температуры и структуры течения, согласующиеся в деталях, т. е. по различным локальным характеристикам, с экспериментом при числах Рэлея до  $10^9$  и больших удлинениях (до 10—13), соответствующих рабочему диапазону процессов, встречающихся на практике.

Цель данной работы — получение и сопоставление численных и экспериментальных данных в контролируемых условиях в диапазоне  $10^5 < Ra < 10^9$ ,  $6,9 \leq L/H \leq 12,7$  для слоя с адиабатическими горизонтальными границами.

**2. Математическая модель и метод решения.** Схема расчета представлена на фиг. 1. Математическая модель рассматриваемого конвективного процесса основана на двумерных нестационарных уравнениях Навье — Стокса в приближении Буссинеска [14], которые в безразмерном случае в переменных вихрь — скорость  $\omega$ , функция тока  $\psi$  и температура  $\Theta$  имеют вид

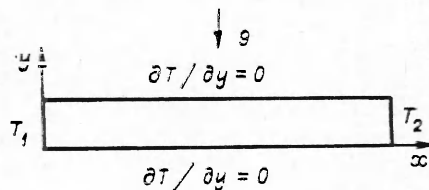
$$(2.1) \quad \omega_t + u\omega_x + v\omega_y = \omega_{xx} + \omega_{yy} + Gr\Theta_x,$$

$$\psi_{xx} + \psi_{yy} = -\omega, \quad \Theta_t + u\Theta_x + v\Theta_y = \frac{1}{Pr}(\Theta_{xx} + \Theta_{yy}),$$

$$u = \psi_y, \quad v = -\psi_x, \quad \Theta = \frac{T - T_1}{T_2 - T_1}, \quad Gr = \frac{g\beta H^3 (T_2 - T_1)}{\nu^2}, \quad Pr = \frac{\nu}{a}.$$

Здесь  $Gr$  — число Грасгофа;  $Pr$  — число Прандтля;  $Ra = GrPr$  — число Рэлея;  $\nu$ ,  $a$ ,  $\beta$  — коэффициенты кинематической вязкости, температуропроводности, температурного расширения соответственно. В расчетах коэффициенты  $\nu$ ,  $a$ ,  $\beta$  были заданы постоянными при средней температуре  $(T_1 + T_2)/2$ . В качестве масштабов длины, времени, скорости и температуры выбраны величины  $H$ ,  $H^2/\nu$ ,  $\nu/H$ ,  $\Delta T = T_2 - T_1$ .

На всех границах расчетной области для поля скорости задаются условия прилипания  $\psi = 0$ ,  $\partial\psi/\partial n = 0$



Ф и г. 1

( $n$  — нормаль к границе). Граничные условия для поля температуры имеют вид

$$(2.2) \quad \begin{aligned} x = 0, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \Theta = 0, \\ x = L/H, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad \Theta = 1, \\ 0 < x < L/H, \quad y = 0, \quad y = 1, \quad \partial\Theta/\partial y = 0. \end{aligned}$$

Начальные условия следующие:

$$(2.3) \quad \psi = 0, \quad \omega = 0, \quad \Theta = x/L.$$

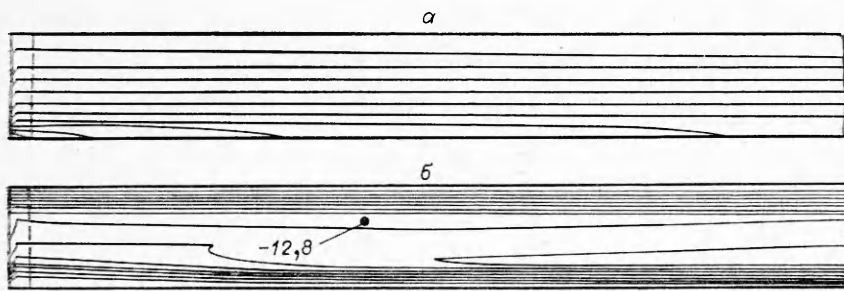
Система уравнений (2.1)—(2.3) решалась по методу конечных разностей в соответствии с методикой [15], в основе которой лежит схема переносных направлений с использованием неявной монотонной аппроксимации [16]. Граничные условия для функции тока и вихря аппроксимируются по методу [17]. Использовался комплекс программ для решения нестационарных уравнений Навье — Стокса, разработанный в Институте проблем механики АН СССР [15]. Расчеты проведены на сетке, равномерной по оси  $y$  (число узлов равно 33 либо 65) и неравномерной по оси  $x$  (минимальный шаг у стенок  $h_{\min} = 5 \cdot 10^{-3}$ ).

Трудности в выборе сетки заключаются в том, что при больших удлинениях слоя и больших числах Рэлея требуется одновременно описывать структуру течения в ядре и в весьма тонком пограничном слое у боковых границ, т. е., с одной стороны, она должна быть достаточно подробной (с большим числом узлов), с другой стороны, число узлов сетки ограничивается существенным увеличением затрат времени на ЭВМ. Время расчета одного варианта на подробной сетке с числом узлов  $141 \times 33$  на ЭВМ типа ЕС-1055 составляет в среднем около 12 ч. Заметим, что результаты расчетов на недостаточно подробной сетке (см., например, [12]) могут не содержать некоторых рассмотренных ниже тонких деталей структуры течения.

**3. Экспериментальные исследования.** Установка для проведения измерений представляла собой прямоугольную ванну размерами  $150 \times 150 \times 900$  мм<sup>3</sup>. Боковые стенки ванны с целью теплоизоляции изготавливались из оргстеклянных двойных пластин ( $10 \times 150 \times 920$  мм<sup>3</sup>) с воздушной прослойкой между ними для передней прозрачной стенки и с поролоновой прокладкой между ними толщиной 15 мм — для задней. Нижнее горизонтальное основание представляет собой оргстеклянную пластину толщиной 3 мм. Между основанием ванны и пенопластовой подставкой размером  $90 \times 170 \times 1000$  мм<sup>3</sup> помещалась поролоновая пластина ( $15 \times 170 \times 1000$  мм<sup>3</sup>).

Верхняя горизонтальная пластина изготавливалась из двух оргстеклянных пластин ( $3 \times 145 \times 810$  мм<sup>3</sup>) таким образом, что между ними образовалась полость ( $15 \times 125 \times 790$  мм<sup>3</sup>), заполненная поролоном. Горизонтальная теплоизолирующая пластина длиной  $x_0 = 810$  мм имела прозрачные щели ( $\delta = 5$  мм) по всей длине на расстоянии  $z = 45$  и  $75$  мм от переднего торца.

По вертикальным торцам ванны устанавливались теплообменники, изготовленные каждый из латунной пластины ( $10 \times 148 \times 148$  мм<sup>3</sup>) и пластины из оргстекла так, что между ними образовалась полость ( $20 \times 130 \times 130$  мм<sup>3</sup>). Постоянство температуры поверхностей теплообмена обеспечивалось циркулирующей в полости теплообменника термостатированной воды. Использовались термостаты СЖМЛ-19/2, 5, которые поддерживали постоянную температуру с точностью  $\pm 0,03^\circ\text{C}$ . Измерение температуры каждой поверхности теплообмена проводилось двумя нихром-константановыми термопарами, изготовленными из проводов диаметром 0,1 мм. Термопары монтировались в цилиндры  $d = 0,8$  мм и могли устанавливаться в торцевые сверления  $d = 1$  мм, расположенные на различной высоте на расстоянии 0,5 мм от поверхности теплообмена. Толщина слоя воды задавалась с помощью калибровочных пластинок, на которых устанавливается верхняя горизонтальная пластина. В случае двух жестких ог-



Ф и г. 2

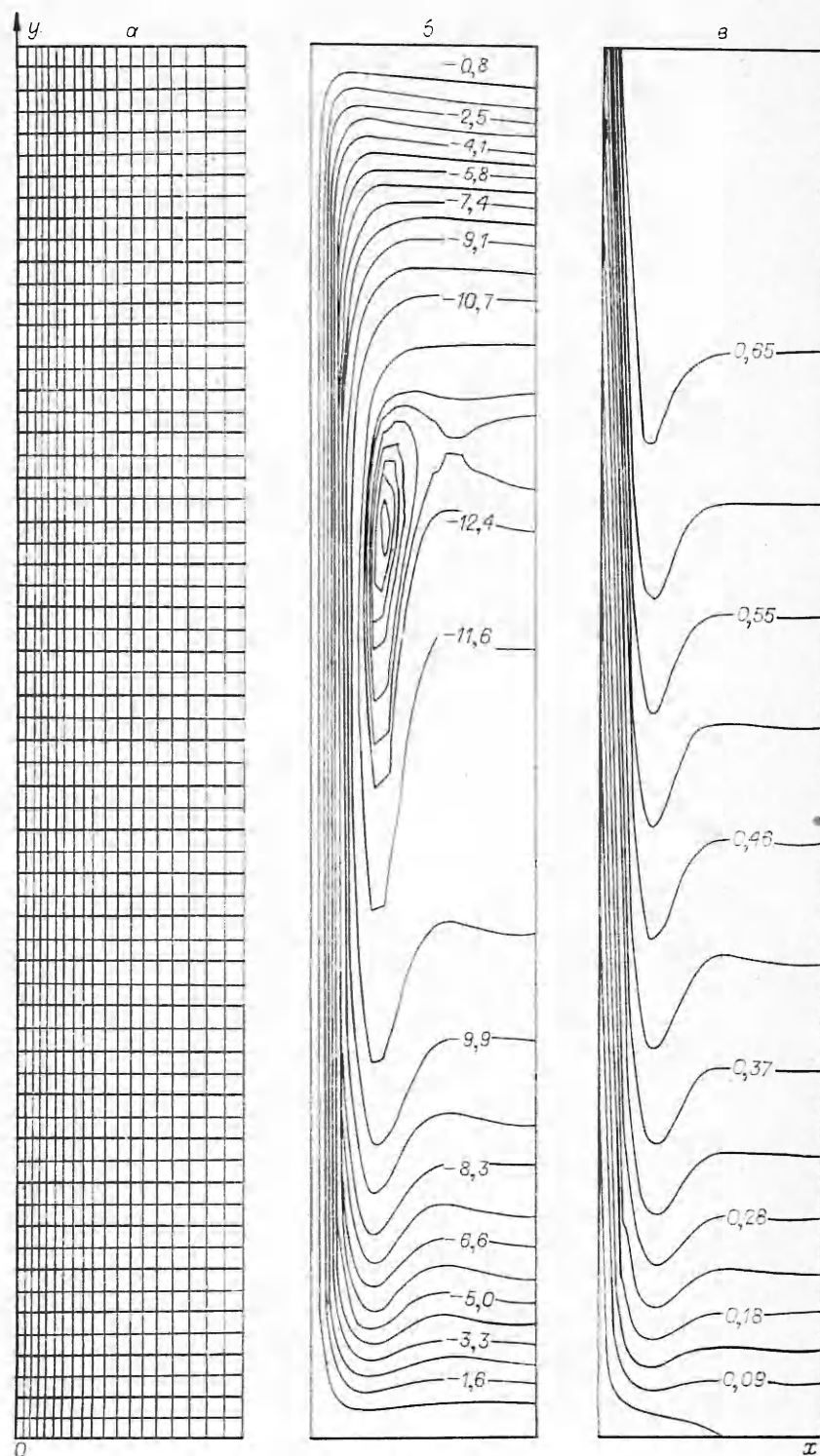
раничивающих поверхностей жидкость контактировала с верхней пластиной. Свободная поверхность создавалась заполнением объема ванны до нужной высоты без контакта с верхней пластиной. Расстояние между свободной поверхностью жидкости и верхней теплоизолирующей горизонтальной пластиной 5—7 мм. Горизонтальность ванны регулировалась установочными винтами и контролировалась катетометром КМ-8 с точностью 0,01 мм.

Измерение температуры в слое жидкости проводилось с помощью термопарного зонда, состоящего из двух нихром-константановых термопар, изготовленных из проводов диаметром 0,1 мм. Г-образный зонд вводился через зазор 5 мм между задней стенкой ванны и торцом горизонтальной верхней пластины. Термопары располагались друг над другом и позволяли подводить вплотную верхнюю к верхней стенке и нижнюю термопару к нижней стенке. Термопара перемещалась по вертикали  $y$ , по горизонтали  $x$  и путем поворота зонда и по  $z$ . Перемещение термопарного зонда по вертикали контролировалось катетометром КМ-8 с точностью 0,01 мм и по шкале с делением 0,05 мм, установленной на координатнике. ЭДС термопар измерялась цифровым ампервольтметром Ф-30.

Измерение скорости течения жидкости в слое осуществлялось с помощью визуализации потока алюминиевыми частицами, которые находились в потоке во время всего эксперимента, длившегося 9—10 ч. Слой с внесенными в него частицами был прозрачен по всей его ширине ( $z_0$ ). Наибольшее значение горизонтальной составляющей скорости не превышало 2,5 мм/с. Поэтому скорость определялась по времени прохождения частицей фиксированного расстояния на сетке зрительной трубы катетометра КМ-8. После заполнения жидкостью ванны и установки верхней горизонтальной пластины зазоры между ванной и этой пластиной тепло- и влагоизолировались от окружающего воздуха, так что в течение всего эксперимента не обнаруживалось заметного по объему испарения рабочей жидкости. Экспериментальные исследования показали, что свободная поверхность дистиллированной воды неподвижна ( $u_y = H = 0$ ), что связано с присутствием в ней поверхностно-активных веществ. Свободная поверхность воды в этих условиях эксперимента ведет себя как жесткая.

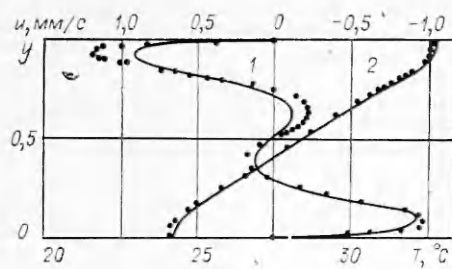
**4. Результаты расчетов и измерений.** Течение при больших числах Рэлея в длинных горизонтальных слоях в рассматриваемом диапазоне параметров характеризуется тем, что на вертикальных и горизонтальных стенках образуются весьма тонкие гидродинамические и тепловые пограничные слои, температура вне вертикальных температурных пограничных слоев в горизонтальных сечениях при этом практически не изменяется, жидкость в целом устойчиво стратифицирована по вертикали, однако наблюдаются слабые противотоки между ядром и пограничными слоями.

Структура течения и распределение температуры могут существенно отличаться от режима, который реализуется при малых и умеренных числах Рэлея. На фиг. 2 для  $Ra = 1,2 \cdot 10^8$ ,  $Pr = 5,8$ ,  $L/H = 12,7$  показаны линии тока (б) и изотермы (а). На фиг. 3, а — б показаны соответственно расчетная сетка, изолинии и изотермы у левого торца слоя  $0 \leq x \leq$

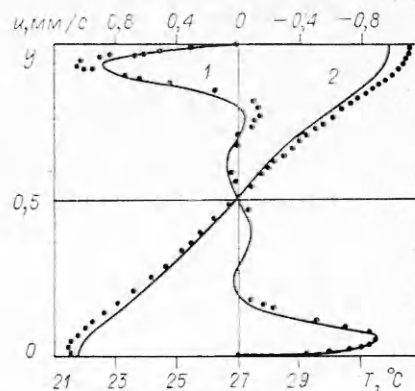


Ф и г. 3

$\leq 0,16$ ;  $0 \leq y \leq 1$  (на фиг. 2 эта область отмечена штриховой линией). Отсюда отчетливо видна структура гидродинамического и температурного пограничных слоев на вертикальной стенке. Продольный перепад температуры сосредоточен в очень узких вертикальных пограничных слоях: в верхней части температурного пограничного слоя у левой стенки (и в нижней части у правой стенки) продольный перепад температур при  $Ra =$



Ф и г. 4



Ф и г. 5

$= 1,2 \cdot 10^8$ ,  $Pr = 5,8$  составляет  $\sim 0,7 \times (T_2 - T_1)$ . Вертикальные скорости таковы, что нагретая частичка жидкости из верхней части слоя, не успев остыть, попадает в более холодную нижнюю область слоя, после чего благодаря подъемной силе всплывает на высоту с той же температурой, в связи с чем и возникает упоминавшийся выше слабый противоток около вертикальной стенки. Это видно из фиг. 3, б. При больших числах Рэлея этот противоток может порождать слабый вторичный вихрь на вертикальной стенке, как показано на фиг. 3, б. В экспериментах [10] для  $L/H \gg 1$  найдено критическое число Рэлея  $Ra_*$  возникновения вторичных вихрей:  $Ra_* (L/H)^{1/4} \sim 6,4 \cdot 10^5 \pm 10\%$ .

В приводимых здесь расчетах эти вихри удается разрешить сеткой, однако при рассматриваемых значениях  $L/H$  и  $Ra$  размер этих вихрей мал. Вихри расположены вблизи торцевых стенок между вертикальными пограничными слоями и ядром, вытянувшись по вертикали. Основная часть вертикального противотока поворачивает в сторону ядра, образуя слабое горизонтальное течение, направленное навстречу основному (фиг. 2, 4). Это горизонтальное противотечение наблюдалось в экспериментах [9], но не обнаруживалось в численном решении [12] из-за грубой расчетной сетки.

На фиг. 4, 5 представлены сопоставления результатов расчета с экспериментальными данными ( $Ra = 1,2 \cdot 10^8$ ,  $Pr = 5,8$ ,  $L/H = 12,7$  — фиг. 4;  $Ra = 5,8 \cdot 10^8$ ,  $Pr = 5,8$ ,  $L/H = 7$  — фиг. 5). Сплошными линиями показаны расчетные профили скорости и температуры в центральном поперечном сечении (точки — эксперимент). Некоторая несимметрия в экспериментальных данных, по-видимому, связана с зависимостью вязкости от температуры, которая в расчетах не учитывалась, вязкость бралась постоянной при средней температуре  $((T_2 + T_1)/2)$ . Следует отметить устойчивый стационарный характер рассматриваемого течения, реализуемый как в эксперименте, так и в расчетной модели \*. Это обстоятельство, связанное со спецификой задачи (устойчивая вертикальная стратификация по температуре, контролируемые тепловые условия на горизонтальных границах), имеет существенное значение для выбора режимов роста объемных монокристаллов из расплавов, где колебания температуры расплава на стадии, предшествующей кристаллизации, могут приводить к дефектам в структуре кристалла (так называемая полосчатая неоднородность) [18]. Некоторые результаты расчетов представлены также в таблице, где

$\psi_m$  — максимальная функция тока,  $Nu = \int_0^1 \frac{\partial \theta}{\partial x} dy$  — среднее число Нуссельта на торце ( $x = 0$ ).

Хорошее согласование результатов с данными лабораторного эксперимента позволяет сделать также вывод о том, что в рассматриваемых условиях роль трехмерных эффектов, по-видимому, несущественна.

\* Последнее утверждение относится только к рассматриваемым значениям чисел Прандтля.

Pr	L/H	Расчетная сетка	Ra	$\psi_m$	Nu
7,2	6,94	141×33	$7,92 \cdot 10^7$	8,35	28,2
5,8	6,94	141×65	$8,7 \cdot 10^7$	10,8	29,03
5,8	6,94	141×65	$5,8 \cdot 10^8$	16,04	49,50
5,8	12,7	141×65	$1,2 \cdot 10^8$	12,68	30,37

Данные результаты рассмотрения структуры течения и распределения температуры вблизи вертикальных границ представляют интерес для изучения вопросов морфологической устойчивости фронта кристаллизации, они, в частности, показывают, что гидродинамика в прифронтовых зонах в технологическом диапазоне параметров имеет очень сложный характер, в связи с чем необходимы специальные меры для ее контроля и управления.

Поступила 14 X 1982

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Мызников В. М. Об устойчивости плоскопараллельного течения в горизонтальном слое жидкости. — ПМТФ, 1974, № 1.
2. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М., Тарунин Е. Л. Численное исследование стационарной конвекции в полости прямоугольного сечения со свободной границей. — Учен. зап. Пермского ун-та. Гидродинамика, 1971, вып. 3.
3. Полежаев В. П. Течение и теплопередача при ламинарной естественной конвекции в вертикальном слое. — В кн.: Тепло-и массоперенос. Т. 1. Тепло-и массоперенос при взаимодействии тел с потоками жидкостей и газов. М.: Энергия, 1968.
4. Зимин В. Д., Ляхов Ю. П., Шайдуров Г. Ф. Экспериментальное изучение поля температуры при естественной конвекции жидкости в замкнутой прямоугольной полости. — Учен. зап. Пермского ун-та. Гидродинамика, 1971, вып. 3.
5. Cormack D. E., Leal L. G. and Imberger J. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt 1. Asymptotic theory. — J. Fluid Mech., 1974, vol. 65, pt 2.
6. Cormack D. E., Leal L. G. and Seinfeld J. H. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt 2. Numerical solutions. — J. Fluid Mech., 1974, vol. 65, pt 2.
7. Imberger J. Natural convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. Pt 3. Experimental results. — J. Fluid Mech., 1974, vol. 65, pt 2.
8. Cormack D. E., Stone G. P. and Leal L. G. The effect of upper surface conditions on convection in a shallow cavity with differentially heated end walls. — Int. J. Heat Mass Transfer, 1975, vol. 18, p. 635.
9. Bejan A., Al-Homoud A. A., Imberger J. Experimental study of high — Rayleigh — number convection in horizontal cavity with different end temperatures. — J. Fluid Mech., 1981, vol. 109, p. 283.
10. Simkins P. G. and Dudderar T. D. Convection in rectangular cavities with differentially heated end walls. — J. Fluid Mech., 1981, vol. 110, p. 433.
11. Ширалкар, Тьен. Численное исследование ламинарной свободной конвекции в неглубоких замкнутых полостях. — Теплопередача, 1981, № 2.
12. Shiralkar G., Gadgil A. and Tien C. L. High Rayleigh number convection in shallow enclosures with different end temperatures. — Int. J. Heat and Mass Transfer, 1981, vol. 24, N 10.
13. Launay J. C., Miroglio J. and Roux B. Contributions to the studies of natural convections in a sealed tube for growing of single crystal by a gas phase transport. — J. Crystal Growth, 1981, vol. 51, p. 61.
14. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошной среды. М.: ГИТТЛ, 1954.
15. Буна А. В., Грязнов В. Л., Дубовик К. Г., Полежаев В. П. Методика и комплекс программ численного моделирования гидродинамических процессов на основе нестационарных уравнений Навье — Стокса. Препринт № 173. М.: ИПМ АН СССР, 1981.
16. Самарский А. А. Теория разностных схем. М.: Наука, 1977.
17. Полежаев В. П., Грязнов В. Л. Метод расчета граничных условий для уравнений Навье — Стокса в переменных «вихрь, функция тока». — ДАН СССР, 1974, т. 219, № 2.
18. Лодиз Р. А., Паркер Р. Л. Рост монокристаллов. М.: Мир, 1974.