ПМТФ, № 1, 1966

АВТОМОДЕЛЬНЫЕ РЕШЕНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЛОСКОГО ЛАМИНАРНОГО МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКОГО ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ

А. Г. Боев

(Харьков)

Автомодельные решения нестационарных уравнений пограничного слоя в обычной гидродинамике рассматривались в работах [1,2]. Ниже отыскиваются автомодельные решения нестационарных уравнений магнитогидродинамического плоского пограничного слоя. При этом используется переход в криволинейные координаты некоторого специального вида. Выбор его определяется требованиями, необходимыми для приведения уравнений пограничного слоя к системе обыкновенных уравнений. Для решения уравнений, описывающих течение на импульсивно приведенной в движение пластине, применяется метод итераций Г. Вейля.

Обозначения

μ — коэффициент вязкости;
v — скорость;
V — скорость внешнего потока;
H — напряженность магнитного поля;
σ — проводимость жидкости;
ν — коэффициент кинематической вязкости;
R — число Рейнольдса;
R_m — магнитное число Рейнольдса;
P — число Прандтля;

Штрих обозначает дифференцирование; нижним значком e обозначены параметры внешнего потока, нижним значком s — параметры стенки.

1. Рассмотрим преобразование

$$\xi = x, \qquad \eta = \int_0^y \frac{dy}{w(x, t)}, \qquad t = t \tag{1.1}$$

где w — пока произвольная функция. Приближение пограничного слоя в этих координатах получим, если запишем в них уравнения магнитной гидродинамики [3] и будем отыскивать решение их в виде [4]

$$x = x^*, \qquad y = \varepsilon y^* \qquad v_1 = v_1^*, \qquad v_2 = \varepsilon v_2^* \qquad (\varepsilon = R^{-1/2} \ll 1)$$

с точностью до ε^2. Для базисных векторов $\mathbf{a}_i$, метрических тензоров g_{ik}, g^{ik} получим в этом приближении [5]

$$\mathbf{a}_1 = \mathbf{e}_1 + \frac{\partial y}{\partial \xi}\mathbf{e}_2, \quad \mathbf{a}_2 = w\mathbf{e}_2, \qquad g_{ik} = \begin{pmatrix} 1 & w\,\partial y / \partial \xi \\ w\,\partial y / \partial \xi & w^2 \end{pmatrix}, \quad g^{ik} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & w^{-2} \end{pmatrix}$$

($\mathbf{e}_i$ — орты декартовых осей). Относительное изменение элемента объема (якобиан преобразования) определяется формулой

$$\sqrt{\det g_{ik}} = \sqrt{g} = w$$

Уравнения пограничного слоя в координатах ξ, η в случае $R_m \approx R$ и заданного внешнего магнитного поля $\mathbf{H}_e\,\{H_e, 0, 0\}$ имеют вид

$$\frac{\partial v^1}{\partial t} + v^1 \frac{\partial v^1}{\partial \xi} + v^2 \frac{\partial v^1}{\partial \eta} = \left(\frac{\partial U}{\partial t} + U\frac{\partial U}{\partial \xi}\right) + \frac{\nu}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\sqrt{g}\, g^{22} \frac{\partial v^1}{\partial \eta}\right) +$$
$$+ \frac{1}{4\pi\rho}\left(H^1 \frac{\partial H^1}{\partial \xi} + H^2 \frac{\partial H^1}{\partial \eta}\right) - \frac{1}{4\pi\rho}\left(H_e^{\,1} \frac{\partial H_e^{\,1}}{\partial \xi}\right)$$

$$\frac{\partial H^1}{\partial t} = \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta}\left\{\frac{1}{\sqrt{g}}(v_1 H_2 - v_2 H_1) + \frac{1}{\sqrt{g}} \frac{c^2}{4\pi\sigma} \frac{\partial H_1}{\partial \eta}\right\} \tag{1.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{g}\, v^1) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\sqrt{g}\, v^2) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial \xi}(\sqrt{g}\, H^1) + \frac{\partial}{\partial \eta}(\sqrt{g}\, H^2) = 0$$

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v^1 \frac{\partial T}{\partial \xi} + v^2 \frac{\partial T}{\partial \eta} = \frac{\nu}{\sqrt{g}} \frac{\partial}{\partial \eta}\left(\frac{\sqrt{g}}{P} g^{22} \frac{\partial T}{\partial \eta}\right) + \nu g^{22}\left(\frac{\partial v^1}{\partial \eta}\right)^2 + \frac{c^2}{16\pi^2 \sigma \nu \rho}\left(\frac{\partial H_1}{\partial \eta}\right)^2$$

Здесь верхним индексом обозначены контравариантные составляющие векторов, нижним — ковариантные. При этом

$$v^1 = v_1 = v_x, \qquad v_2 = w v_y, \qquad H_1 = H^1 = H_x$$

В качестве граничных и начальных условий выберем следующие:

$$\begin{aligned} &v_1 \to U(x, t), \quad H_1 \to H_e(x, t), \quad T \to T_e(x, t) \quad \text{при } \eta \to \infty,\ t > 0 \\ &v_1 = v_2 = H_1 = H_2 = 0, \quad T = T_s(x, t) \quad \text{при } \eta = 0,\ t > 0 \\ &v_1 = U(x, 0), \quad H_1 = H_e(x, 0), \quad T = T_e(x, 0) \quad \text{при } t = 0 \end{aligned} \tag{1.3}$$

Уравнения непрерывности тождественно удовлетворятся введением функций тока для скорости Φ и магнитного поля Ψ

$$H^1 = \frac{1}{w}\frac{\partial \Psi}{\partial \eta}, \quad H^2 = -\frac{1}{w}\frac{\partial \Psi}{\partial \xi}, \quad v^1 = \frac{1}{w}\frac{\partial \Phi}{\partial \eta}, \quad v^2 = -\frac{1}{w}\frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \tag{1.4}$$

Будем отыскивать решение уравнений (1.2) в виде

$$\Psi = a(\xi, t) G(\eta), \qquad \Phi = \varphi(\xi, t) f(\eta), \qquad T = T_e(\xi, t)\Theta(\eta) \tag{1.5}$$

Из (1.4), (1.5) получим

$$H^1 = H_e(\xi, t)\, G'(\eta), \qquad H^2 = -\frac{1}{w}\left[H_e \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial H_e}{\partial \xi}\right] G, \qquad H_e = \frac{a}{w}$$

$$v^1 = U(\xi, t)\, f'(\eta), \qquad v^2 = -\frac{1}{w}\left[U \frac{\partial w}{\partial \xi} + w \frac{\partial U}{\partial \xi}\right] f, \qquad U = \frac{\varphi}{w}$$

Уравнения (1.2) переходят при этом в такие

$$\begin{aligned} &-c_1(1 - f') - c_2(1 - f'^2) - c_3 f''\eta - (c_2 + c_4) f f'' = \\ &\qquad = f''' + S^2\{-c_2(1 - G'^2) - (c_2 + c_4) G G''\} = 0 \\ &c_1 G' - c_3 G''\eta = (c_2 + c_4)\,[G' f - G f'] + \lambda G''' \\ &2c_1\Theta - c_3\Theta\eta' + 2c_2 f'\Theta - (c_2 + c_4) f\Theta' = P^{-1}\Theta'' + M^2(f''^2 + S^2\lambda G''^2) \end{aligned} \tag{1.6}$$

Штрихом обозначено дифференцирование по η,

$$\begin{aligned} &c_1 = \frac{w^2}{\nu U}\frac{\partial U}{\partial t}, \quad c_2 = \frac{w^2}{\nu}\frac{\partial U}{\partial \xi}, \quad S^2 = \frac{H_e^2}{4\pi\rho U^2}, \quad \lambda = \frac{c^2}{4\pi\sigma\nu} \\ &c_3 = \frac{w}{\nu}\frac{\partial w}{\partial t}, \quad c_4 = \frac{wU}{\nu}\frac{\partial w}{\partial \xi}, \quad M^2 = \frac{U^2}{c_p T_e} \end{aligned} \tag{1.7}$$

Если потребовать, чтобы c_i, S, M были постоянными, то уравнения (1.6) станут обыкновенными, (1.7) дадут систему для определения U, w, H_e, T_e. Различные случаи автомодельности получаются путем составления различных комбинаций из c_i и возможны в следующих случаях.

1°. Рассмотрим стационарные течения $c_1 = c_3 = 0$. Уравнения движения имеют вид

$$\begin{aligned} &f''' + f f'' = \beta\,[f'^2 - 1 + S^2(1 - G'^2)] + S^2 G G'' \\ &\lambda G''' + f G'' - f'' G = 0 \qquad (c_4/c_2 + 1 = 1/\beta,\ c_2 = \beta) \\ &P^{-1}\Theta'' + f\Theta' - 2\beta\Theta f' + M^2(f''^2 + S^2\lambda G''^2) = 0 \end{aligned}$$

Это хорошо известные уравнения [6], соответствующие скорости внешнего потока вида $U \sim x^m$, $U \sim e^{\alpha x}$. В работе [7] система, соответствующая течению на пластине ($\beta = 0$), решалась методом итераций. Для первых итераций f_1, G_1 получены аналитические выражения.

2°. Рассмотрим нестационарные течения.

a) В случае $c_2 = c_4 = 0$, $c_3 \neq 0$, $c_1 \neq 0$ имеем

$$w^2 = 2c_3 t, \qquad U \sim t^{{}^1\!/_2 c_1/c_3}, \qquad H_e \sim t^{{}^1\!/_2 c_1/c_3}, \qquad T_e \sim t^{c_1/c_3}$$

Для определения f, G и Θ получим уравнения

$$\begin{gathered} f''' + c_3 f''\eta + c_1(1 - f') = 0, \quad \lambda G''' - c_1 G' + c_3 G''\eta = 0 \\ P^{-1}\Theta'' + c_3\Theta'\eta - 2c_1\Theta + M^2(f''^2 + S^2\lambda G''^2) = 0 \end{gathered} \tag{1.8}$$

Первое уравнение (1.8) при $S = 0$ описывает начальное течение обычной жидкости на внезапно приведенной в движение при $t = 0$ бесконечной плоскости и в первом приближении на цилиндре. Решение его для случаев $2c_3 / c_1 \equiv \alpha = 0,1$ рассматривалось Блазиусом [8], для $\alpha = 1, 2, 3, 4$ — Гертлером [8]. Ватсон [9] дал решение при произвольном α. Система (1.8) описывает аналогичное течение проводящей жидкости в однородном магнитном поле, направленном параллельно потоку. Решения первых двух уравнений системы (1.8), удовлетворяющие условиям

$$\begin{gathered} f' \to 1, \quad G' \to 1, \quad \Theta \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty \\ f = f' = G = G' = 0, \quad \Theta = \text{const} \quad \text{при } \eta = 0 \end{gathered} \tag{1.9}$$

имеют вид

$$f(\eta_1) = \eta_1 - 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha + 1)\, g_{\alpha+{}^1\!/_2}(\eta_1) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha + {}^3\!/_2)}$$

$$G(\eta_1) = 2^{2\alpha}\Gamma(\alpha + 1)\, g_{\alpha+{}^1\!/_2}(\eta_1) - \frac{1}{2}\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha + {}^3\!/_2)} \qquad \left(\eta_1 = \frac{\sqrt{2c_3}}{2}\eta\right)$$

$$g_\alpha(\eta) = \frac{2}{\sqrt{\pi}\,\Gamma(\alpha+1)}\int_\eta^\infty (\gamma - \eta)^{2\alpha} e^{-\gamma^2} d\gamma \qquad (\Gamma(\alpha)\text{—гамма-функция})$$

b) В случае $c_2 = c_4 = c_3 = 0$ имеем

$$U \sim \exp\frac{c_1 t}{w^2}, \quad H_e \sim \exp\frac{c_1 t}{w^2}, \qquad w = \text{const}$$

$$f''' - c_1 f' + c_1 = 0, \quad \lambda G''' - c_1 G' = 0, \qquad P^{-1}\Theta'' - 2c_1\Theta + M^2(f'' + S^2\lambda G''^2) = 0$$

Эти уравнения описывают течение вдоль бесконечной плоской пластины с растущей по экспоненте скоростью. Решению пограничного слоя отвечает лишь значение $c_1 > 0$, как это следует из первого уравнения

c) В случае $c_4 = 0$, $c_1 = -2c_3$, $c_2 = 2m$, $c_3 = 1$. Имеем

$$U \sim \frac{x}{t}m, \qquad H_e \sim \frac{x}{t}, \qquad T_e \sim \frac{x^2}{t^2}, \qquad w^2 \sim t$$

Течение описывается уравнениями

$$\lambda G''' - 2m(f''G - G''f) = -2G' - G''\eta$$

$$f''' + f''\eta - 2m(f'^2 - ff'') + 2m(1 - S^2) - 2(1 - f') - \\ - 2mS^2 - (GG'' - G'^2) = 0$$

$$P^{-1}\Theta'' + 2mf\Theta' - 4m\Theta f' + \Theta'\eta + 4\Theta + M^2(f''^2 + S^2\lambda G''^2) = 0$$

d) В случае $c_1 = c_2 = 0$, $c_3 \neq 0$, $c_4 \neq 0$ примем $c_4 = \alpha$, $c_3 = 1 - \alpha$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$. Тогда уравнения приводятся к виду

$$\begin{gathered} f''' + f''\{\eta + \alpha(f - \eta)\} - S^2 GG'' = 0 \\ \lambda G''' + \alpha\{G''f - f''G\} + (1 - \alpha)G''\eta = 0 \\ f'\Theta - \Theta'\{\eta + \alpha(f - \eta)\} = P^{-1}\Theta'' + M^2(f''^2 + S^2\lambda G''^2) \end{gathered} \tag{1.10}$$

$$\begin{gathered} f' \to 1, \quad G' \to 1, \quad \Theta \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty \\ f = f' = G' = G = 0, \quad \Theta = \text{const} \quad \text{при } \eta = 0 \end{gathered} \tag{1.11}$$

Этот случай описывает нестационарное течение на пластине, импульсивно приведенной в движение с постоянной скоростью (задача Релея). Значение $\alpha = 0$ соответствует начальному движению пластины, $\alpha \to 1$ — приближению к стационарному режиму. Параметр α, таким образом, характеризует изменение формы уравнений от линейной (начальное движение) до нелинейной (стационарный режим). Рассмотрение случая $R_m < R$, H_s (0, H_s, 0) полностью дублирует предыдущее. Например, для задачи Релея будем иметь

$$f''' + f''\{\alpha\eta + (1-\alpha)f\} + n(1-f') = 0 \qquad (n = c^{-2}\,\delta H_2^2)$$

$$2f'\Theta - \Theta'\{\alpha\eta + (1-\alpha)f\} = P^{-1}\Theta'' + M^2\{f''^2 + nf'(1-f')\}$$

Так как $H_2 = wH_s$, то

$$H_s \sim \left[\alpha\frac{x}{U} + (1-\alpha)t\right]^{-1/2}$$

Граничные условия для системы имеют вид

$$f' \to 1,\ \Theta \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty; \qquad f = f' = 0,\ \Theta = \text{const} \quad \text{при } \eta = 0$$

2. Для решения уравнений (1.10) воспользуемся методом итераций. Вейлем [10] было указано преобразование дифференциального уравнения Блазиуса в интегральное уравнение

$$f''(\eta) = f''(0)\exp\left\{-\frac{1}{2}\int_0^\eta f''(u)(u-\eta)^2\,du\right\}$$

к которому применялся метод итераций, определенный условиями

$$f_{n+1}'' = \Psi\{f_n''\}$$

Это дало возможность получить аналитическое выражение для f_1. Вейль показал, что последовательность $\{f_n\}$ сходится к предельной функции, являющейся решением задачи. Кроме того,

$$f''(\eta) \doteq \exp(-{}^1/_6\eta^2)$$

оказывается приемлемым приближением к пределу. В работе [7] метод итераций применялся к решению магнитной задачи. Для случая $\lambda = 1$ там была доказана сходимость итерационного процесса. Ниже этот метод применяется для нахождения решения системы (1.10).

А) Рассмотрим сначала течение непроводящей жидкости ($S = 0$). Уравнение движения имеет вид

$$f''' + f''\{\alpha f + (1-\alpha)\eta\} = 0 \tag{2.1}$$

$$f' \to 1 \quad \text{при } \eta \to \infty, \qquad f = f' = 0 \quad \text{при } \eta = 0 \tag{2.2}$$

Определим процесс итераций следующим образом:

$$f_n''' + f_n''\{\alpha f_{n-1} + (1-\alpha)\eta\} = 0, \qquad f_n'(\infty) = 1,\ f_n(0) = f_n'(0) = 0$$

Отсюда следует

$$f_n''(\eta) = f_n''(0)\exp\left\{-\int_0^\eta \alpha f_{n-1}(u)\,du + (1-\alpha)\frac{\eta^2}{2}\right\}$$

$$\Phi_n = \Phi_n(0)\exp\left\{-\frac{\alpha}{2}\int_0^\eta \Phi_{n-1}(u-\eta)^2\,du + (1-\alpha)\frac{\eta^2}{2}\right\} \qquad (\Phi_n \equiv f_n'') \tag{2.3}$$

Начальную функцию f_0 выберем в виде

$$f_0 = c_0\eta \tag{2.4}$$

где c_0 — пока произвольная постоянная. Из (2.3) видно, что $\Phi_n(0)$ определяет трение на стенке $\eta = 0$. Для стационарного течения ее значение найдено численными методами

$$\Phi_0 = 0.4696 \tag{2.5}$$

Произвол в выборе c_0 и значение Φ_0 могут быть использованы для увеличения точности приближения. Выберем c_0 так, чтобы при $\alpha = 1$

$$\Phi_1(0;1) = \Phi_0 \tag{2.6}$$

Из (2.3) и (2.4) следует

$$\Phi_1(\eta;\alpha) = \Phi_1(0;\alpha)\exp\left[-{}^1/_2(\alpha c_0 + 1 - \alpha)\eta^2\right] \tag{2.7}$$

Из (2.6), (2.7) и первого условия (2.2) получим

$$1 = \Phi_1(0;\alpha)\sqrt{{}^1/_2\pi / c_0} = \Phi_0\sqrt{{}^1/_2\pi / c_0}$$

Отсюда

$$c_0 = {}^1/_2\pi\Phi_0^2 = 0.3469 \tag{2.8}$$

Для нестационарной задачи из (2.7) имеем

$$f'(\eta) = \sqrt{2} / \gamma\Phi_1(0;\alpha)\int_0^\eta e^{-\xi^2}d\xi \qquad (\gamma^2 = \alpha c_0 + 1 - \alpha) \tag{2.9}$$

Значение $\Phi_1(0;\alpha)$ определяется отсюда из условия

$$\Phi_1(0;\alpha) = \sqrt{2/\pi(\alpha c_0 + 1 - \alpha)} \qquad \text{при } \eta \to \infty \tag{2.10}$$

$$\Phi_1(0;0) = \sqrt{2/\pi} = 0.71, \qquad \Phi_1(0;1) = \sqrt{2c_0/\pi} = 0.47 \tag{2.11}$$

Сравнение выражений (2.11) показывает, что трение в начальной фазе движения почти в два раза больше стационарного.

В) Для решения магнитогидродинамической задачи перепишем уравнения (1.10) в виде

$$\begin{aligned} &\Phi' + \Phi\{\eta + \alpha(f - \eta)\} - S^2G\chi = 0, && f'' = \Phi \\ &\lambda\chi' + \alpha\{\chi f - G\Phi\} + (1 - \alpha)\chi\eta = 0, && G'' = \chi \end{aligned} \tag{2.12}$$

Будем рассматривать две последовательности функций f_n и G_n, удовлетворяющих уравнениям

$$\Phi_n' + \Phi_n\{\eta + \alpha(f_{n-1} - \eta)\} - S^2G_{n-1}\chi_n = 0$$
$$\lambda\chi_n' + \alpha\{\chi_n f_{n-1} - G_{n-1}\Phi_n\} + (1 - \alpha)\chi_n\eta = 0$$

и граничным условиям

$$f_n(0) = f_n'(0) = G_n(0) = G_n'(0) = 0, \qquad f_n'(\infty) = G_n'(\infty) = 1$$

В качестве начальных функций выберем $f_0 = c_0\eta$, $G_0 = c_0\eta$, где c_0 согласно (2.8); тогда уравнения для первых итераций имеют вид

$$\Phi_1' + \Phi_1\{\alpha c_0 + (1 - \alpha)\eta\} + S^2\alpha\eta c_0\chi_1 = 0$$
$$\lambda\chi_1' + \alpha\{\chi_1 - \Phi_1\}c_0\eta + (1 - \alpha)\chi_1\eta = 0$$

Заменой переменной $\xi = {}^1/_2\eta^2$ они приводятся к системе с постоянными коэффициентами

$$\frac{d\mathbf{u}}{d\xi} + A\mathbf{u} = 0, \qquad \mathbf{u} = \begin{pmatrix}\Phi_1 \\ \chi_1\end{pmatrix}, \qquad A = \begin{pmatrix}\gamma^2 & -S^2 \\ -\lambda^{-1} & -\gamma^2\lambda^{-1}\end{pmatrix} \tag{2.13}$$

Здесь γ^2 определена (2.9). Решение (2.13) имеет вид (2.14)

$$\Phi_1 = S^2\beta_1 e^{-m_1\xi} + S^2\beta_2 e^{-m_2\xi}, \quad \chi_1 = \beta_1(\gamma^2 - m_1)e^{-m_1\xi} + \beta_2(\gamma^2 - m_2)e^{-m_2\xi}$$

где m_1 и m_2 — корни характеристического уравнения $|A - mE| = 0$

$$\lambda m_1 = {}^1/_2\gamma^2 (1 + \lambda) - \{\lambda S^2 + {}^1/_4\gamma^4 (1 - \lambda^2)\}^{1/2}$$
$$\lambda m_2 = {}^1/_2\gamma^2 (1 + \lambda) + \{\lambda S^2 + {}^1/_4\gamma^4 (1 - \lambda^2)\}^{1/2}$$

Здесь m_2 — всегда положителен, m_1 — положителен при $0 \leqslant S^2 \leqslant \gamma^4$. Интегрированием от нуля до бесконечности получим из (2.14)

$$f_1' = S^2\beta_1 \int_0^\eta \exp\left(-\frac{m_1\eta^2}{2}\right) d\eta + S^2\beta_2 \int_0^\eta \exp\left(-\frac{m_2\eta^2}{2}\right) d\eta$$

$$G_1' = \beta_1 (\gamma^2 - m_1) \int_0^\eta \exp\left(-\frac{m_1\eta^2}{2}\right) d\eta + \beta_2 (\gamma^2 - m_2) \int_0^\eta \exp\left(-\frac{m_2\eta^2}{2}\right) d\eta \qquad (2.15)$$

Постоянные β_1 и β_2 определяются из уравнений

$$\frac{1}{S^2} = \beta_1 \left(\frac{\pi}{2m_1}\right)^{1/2} + \beta_2 \left(\frac{\pi}{2m_2}\right)^{1/2} \qquad 1 = \beta_1 (\gamma^2 - m_1) \left(\frac{\pi}{2m_1}\right)^{1/2} + \beta_2 (\gamma^2 - m_2) \left(\frac{\pi}{2m_2}\right)^{1/2}$$

и соответственно равны

$$\beta_1 = \frac{S^2 + m_2 - 1}{S^2 (m_2 - m_1)} \left(\frac{2m_1}{\pi}\right)^{1/2}, \qquad \beta_2 = -\frac{S^2 + m_1 - 1}{S^2 (m_2 - m_1)} \left(\frac{2m_2}{\pi}\right)^{1/2}$$

Из (2.14) при $\eta = 0$ получим

$$\Phi (0; \alpha) = \frac{1}{m_2 - m_1} \left\{ \left(\frac{\pi}{2m_2}\right)^{1/2} [S^2 + m_2 - 1] - \left(\frac{\pi}{2m_1}\right)^{1/2} [S^2 + m_1 - 1] \right\}$$

Движению непроводящей жидкости соответствует случай $S \to 0$, $\lambda \to \infty$. При этом $m_2 \to \gamma^2$, $m_1 \to 0$, $S^2\beta_1 \to 0$, $S^2\beta_2 \to \gamma (2 / \pi)^{1/2}$ и (2.14) переходит в (2.10). Для жидкости с большой электропроводимостью ($\lambda \to 0$)

$$m_1 \to \gamma^2, \qquad m_2 \to 0, \qquad S^2\beta_2 \to 0, \qquad S^2\beta_1 \to \gamma^{-1} (1 - S^2)(2 / \pi)^{1/2}$$

Из (2.15) следует, что в этом случае $G' \to 0$, т. е. магнитное поле не проникает в жидкость. При $S^2 \to 1$ имеем $f' \to 0$, $f'' \to 0$, и поток останавливается магнитным полем.

Поступила 19 VII 1965

ЛИТЕРАТУРА

1. Розин Л. А. Некоторые случаи автомодельных движений несжимаемой жидкости в нестационарном ламинарном пограничном слое. ПММ, 1957, т. 21, вып. 3.
2. Шу Г. О подобных решениях нестационарного ламинарного пограничного слоя в несжимаемых потоках. Проблема пограничного слоя и вопросы теплопередачи. Сб. перев., Госэнергоиздат, 1960.
3. Ландау Л. Д., Лившиц Е. М. Электродинамика сплошных сред. Физматгиз, 1959.
4. V. Dyke M. Higher approximations in boundary lauer thory. J. Fluid. Mech., 1962, vol. 14, p. 161.
5. Кочин Н. Е. Векторное и начала тензорного исчисления. Изд-во АН СССР, 1962.
6. Польский Н. И., Швец И. Т. Об автомодельных решениях уравнений ламинарного пограничного слоя в магнитной гидродинамике. Докл. АН СССР, 1961, т. 136, № 5.
7. Davies T. V. The magneto-hydrodynamic boundary lauer in the two-dimensional, steady-flow past a semi-infinite flat plate. Proc. Roy. Soc. A, 1963, vol. 273, No. 1355.
8. Лойцянский Л. Г. Ламинарный пограничный слой. Физматгиз, 1961.
9. Watson E. J. Boundary lauer growth. Proc. Roy. Soc. A, 1958, vol. 231, No. 1184.
10. Weyl H. Concerning the differential equations of some boundary lauer problems. Proc. Nat. Acad. Sci., U. S. A. 1941, vol. 27, p. 578.