

УДК 532.516.5

## РАСЧЕТ ДВИЖЕНИЯ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ, ЧАСТИЧНО ЗАПОЛНЯЮЩЕЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ПОЛОСТЬ

Ю. В. Пивоваров

Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

E-mail: pivov@hydro.nsc.ru

Рассматривается плоскопараллельное стационарное движение вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей цилиндрическую вращающуюся полость. Область, занимаемая жидкостью, является односвязной, причем имеются две точки скользящего трехфазного контакта, в которых задаются краевые углы подхода жидкости к стенкам. Свободная граница жидкости является криволинейной. На границе между жидкостью и твердой стенкой ставится условие проскальзывания, означающее пропорциональность касательных напряжений разности скоростей движения стенки и частиц жидкости. Область течения конформно отображается на прямоугольник. Проводятся расчеты вихря и функции тока при заданном коэффициенте проскальзывания и различных скоростях вращения цилиндра.

**Ключевые слова:** конформное отображение, несжимаемая жидкость, уравнения Навье — Стокса, условия проскальзывания, вихрь, функция тока.

DOI: 10.15372/PMTF20190311

**Введение.** Одним из методов очистки материалов, представляющих собой полупроводники (в частности, германия), является зонная плавка во вращающемся контейнере. Суть этого метода состоит в следующем. Цилиндрический полый контейнер наполнен поликристаллическим материалом, являющимся полупроводником, и расположен под небольшим углом к горизонту. Контейнер вращается и одновременно совершает медленное поступательное движение вдоль своей оси, при этом часть его нагревается до высокой температуры, полупроводник плавится. Образуются фронты плавления и кристаллизации. Расплав не полностью заполняет контейнер: имеется свободная поверхность. Кроме того, от стенки контейнера его отделяет тонкий слой мелкодисперсной смазки.

Течение в расплаве является существенно трехмерным и весьма сложным. Прямой его расчет — очень трудная задача. Поэтому для расчета гидродинамики расплава предлагается разделить область течения на ядро, где продольная компонента скорости мала и движение в первом приближении можно считать плоским, и пограничные слои вблизи фронтов плавления и кристаллизации. Целью данной работы является моделирование течения в ядре, т. е. решение задачи о плоскопараллельном стационарном движении жидкости в горизонтальном цилиндрическом вращающемся контейнере.

В [1–8] изучались в основном режимы движения, когда жидкость полностью покрывает стенки цилиндра, а внутри имеется газовая полость. Так, в [1, 2] аналитическими методами исследовалось поведение слоя жидкости в быстровращающемся цилиндре. При

быстром вращении центробежные силы доминируют над капиллярными и гравитационными (действие капиллярных сил в [1, 2] не учитывалось). Форма свободной поверхности жидкости близка к цилиндрической. Экспериментальное изучение такого режима течения проводилось в [3]. В экспериментальной работе [4] при малых скоростях вращения обнаружены трехмерные стационарные течения, возникающие при увеличении скорости еще до того момента, когда жидкость полностью покрывает боковую поверхность цилиндра. В [5] получены некоторые необходимые условия существования и достаточные условия отсутствия плоских течений в двусвязной области в медленно вращающемся цилиндре. В работе [6] с использованием метода граничных элементов решалась задача о безынерционном движении жидкости во вращающемся цилиндре в отсутствие капиллярных сил. В [7] методом конечных элементов решалась аналогичная задача с учетом капиллярных сил. В [8] экспериментально и теоретически в приближении Стокса изучалось поведение вязкой жидкости в частично заполненном горизонтальном вращающемся цилиндре. Отмечено, что в случае медленного вращения сила тяжести превышает центробежную силу, поэтому значительный объем жидкости находится в нижней части полости. С увеличением скорости вращения происходит скачкообразный переход в состояние, соответствующее равномерному распределению жидкости вдоль цилиндрической поверхности. В случаях, рассмотренных в работах [5–8], жидкость также полностью покрывала стенки цилиндра.

В работах [9, 10] впервые изучался режим движения, когда жидкость занимает односвязную область и имеются две точки скользящего трехфазного контакта. При этом рассматривался случай, когда свободная граница в условиях гидростатики является прямолинейным отрезком, поэтому краевые углы в точках трехфазного контакта обеспечивают горизонтальный подход жидкости к стенкам. В данной работе рассмотрен более общий случай, когда свободная граница является криволинейной. Как и в [9, 10], влияние слоя мелкодисперсной смазки на границе со стенкой контейнера моделируется действием касательного напряжения, пропорционального разности скоростей стенки и частиц жидкости. Теоретическое обоснование такого подхода проведено в работе [11]. Стационарная плоская задача о движении жидкости во вращающемся контейнере решается конечно-разностным методом с использованием разностей против потока при аппроксимации конвективных членов. Для этого сначала с использованием биполярной системы координат аналитически осуществляется конформное отображение бесконечной горизонтальной полосы, нижняя граница которой является прямолинейной, а верхняя — криволинейной, на область, занятую расплавом. Вычисляются первые члены асимптотического разложения вихря и функции тока в окрестности угловых точек области, соответствующих бесконечно удаленным точкам полосы. Затем выполняются разрезы полосы справа и слева и на ней с помощью конформного отображения прямоугольника на полученный криволинейный четырехугольник строится ортогональная разностная сетка. На линиях разреза ставятся асимптотические условия для вихря и функции тока, необходимые для замыкания разностной системы уравнений. В [9, 10] при малых скоростях вращения контейнера получены аналитические решения задачи двух типов: в виде интеграла для определенного значения коэффициента проскальзывания, когда задачи для вихря и функции тока расщепляются, и в виде ряда для случая, когда область течения является полукругом. Решение второго типа используется в данной работе для тестирования численного алгоритма.

**1. Определение формы свободной границы в условиях гидростатики.** Схема рассматриваемой задачи показана на рис. 1 ( $\Gamma_1$  — свободная граница жидкости,  $\Gamma_2$  — граница между жидкостью и твердой стенкой,  $\eta_0$  — геометрический параметр заполнения контейнера жидкостью,  $\varphi_0$  — краевой угол подхода жидкости к твердой стенке,  $\gamma = \varphi_0 + \eta_0 - \pi/2$  — угол между вертикалью и касательной к поверхности жидкости в точке трехфазного контакта,  $x = -c$ ,  $x = c$  — координаты левой и правой точек трехфазного

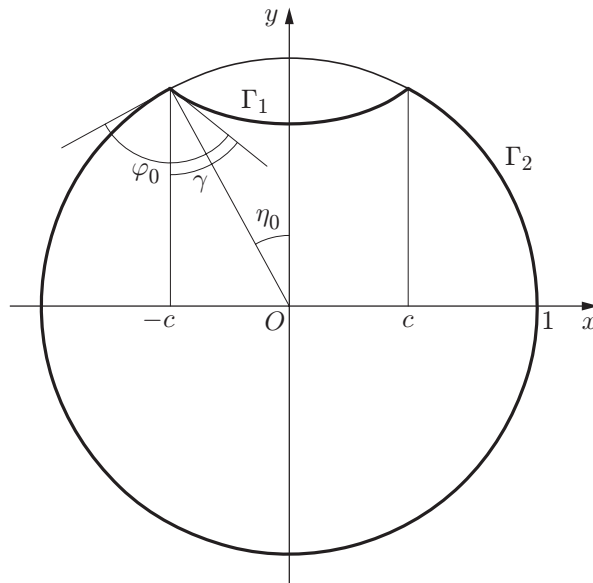


Рис. 1. Схема задачи

контакта). Радиус окружности, являющейся контуром контейнера, равен единице. Сила тяжести направлена сверху вниз. Контейнер вращается по часовой стрелке.

Краевая задача для нахождения формы свободной границы  $\Gamma_1$ , определяемой функцией  $y = h + f(x)$ , где  $h = \cos(\eta_0)$ , в условиях гидростатики имеет вид [9, 10]

$$\frac{f''(x)}{(1 + f'^2(x))^{3/2}} = \text{Bo} (f(x) + A), \quad x \in (-c, c); \quad (1)$$

$$f'(-c) = -\text{ctg}(\gamma), \quad f'(c) = \text{ctg}(\gamma); \quad (2)$$

$$f(-c) = 0. \quad (3)$$

Здесь штрих означает производную по  $x$ ;  $\text{Bo}$  — число Бонда, которое определяется ниже; неизвестная константа  $A$  определяется из условия (3).

Обозначим

$$F(x) = f(x) + A. \quad (4)$$

Тогда  $F(x)$  удовлетворяет задаче (1), (2) при  $A = 0$ , а условие (3) переходит в условие

$$F(-c) = A. \quad (5)$$

Так как  $F''(x) > 0$ , то  $F(x) > 0$  при всех  $x \in [-c, c]$ .

Умножая (1) на  $F'(x)$ , интегрируя по  $x$  по отрезку  $[-c, \tilde{x}]$  и заменяя  $\tilde{x}$  на  $x$ , получаем

$$-2/\sqrt{1 + F'^2(x)} + 2 \sin(\gamma) = \text{Bo} (F^2(x) - A^2). \quad (6)$$

При выводе (6) учитывалось, что знаки первого и второго членов в левой части равенства должны быть противоположными, так чтобы при  $x = -c$  левая часть равенства обращалась в нуль, а знаки левой и правой частей равенства — одинаковыми, поскольку  $0 < F(x) \leq A$ ,  $F'^2(x) \leq \text{ctg}^2 \gamma$  при  $x \in [-c, c]$  (см. рис. 1).

Так как задача симметрична относительно оси  $Oy$ , то

$$F'(0) = 0.$$

Разрешая (6) относительно  $F'(x)$ , находим

$$F'(x) = -\sqrt{4/(2 \sin(\gamma) + \text{Bo}(A^2 - F^2(x)))^2 - 1}, \quad x \in [-c, 0]. \quad (7)$$

Поскольку  $F(0) > 0$ ,  $F'(0) = 0$ , при  $x = 0$  подкоренное выражение в (7) равно нулю. Тогда

$$A = \sqrt{2(1 - \sin(\gamma))/\text{Bo} + F^2(0)} > A_0 = \sqrt{2(1 - \sin(\gamma))/\text{Bo}}.$$

Задача решается методом деления отрезка пополам по следующему алгоритму.

1. Полагаем  $A^- = A_0$ ,  $A^+ = 2A_0$ ,  $n = 1$ .

2. Вычисляем  $A = (A^- + A^+)/2$ .

3. Методом Эйлера решаем уравнение (7) с начальным условием (5). При этом, в случае если подкоренное выражение в какой-либо точке отрезка  $x \in [-c, 0]$  становится меньше нуля, полагаем  $I = 1$ , иначе  $I = 2$ .

4. Если в результате решения задачи  $I = 2$ , вычисляем одностороннюю левую производную на трехточечном шаблоне при  $x = 0$  по формуле

$$F'(x_{K_1/2}) = [(\alpha^0 - 1)F(x_{K_1/2}) - \alpha^0 F(x_{K_1/2-1}) + F(x_{K_1/2-2})]/k^0,$$

где

$$x_{K_1/2} = 0, \quad \alpha^0 = ((x_{K_1/2} - x_{K_1/2-2})/(x_{K_1/2} - x_{K_1/2-1}))^2,$$

$k^0 > 0$  — несущественный для работы алгоритма постоянный коэффициент;  $K_1$  — число разбиений некоторого отрезка  $[-c_1, c_1]$ ;  $c_1 < c$ ;  $k_r$  — число разбиений отрезка  $[-c, -c_1]$ ;  $x_k$  ( $k = -k_r, K_1 + k_r$ ) — неравномерная сетка на отрезке  $[-c, c]$ .

Далее, если  $F'(x_{K_1/2}) > 0$ , то полагаем  $A^+ = A$ , иначе  $A^- = A$ . Если  $I = 1$ , то присваиваем  $A^+ = A$ .

5. Присваиваем  $n = n + 1$ . Если  $n < 120$ , то переходим к шагу 2, иначе — заканчиваем процесс вычислений.

По окончании работы алгоритма величина  $A$  будет определена с погрешностью  $2^{-120}A_0 < 10^{-36}A_0$  (машинный нуль). Приблизительно с такой же погрешностью будет равна нулю правая часть выражения (7), а значит, и  $F'(0)$ .

После определения  $F(x)$  искомая функция  $f(x)$  находится из формулы (4) и затем симметрично отражается на правую часть отрезка  $[-c, c]$ :

$$f(x) = f(-x), \quad x \in (0, c].$$

**2. Построение ортогональной разностной сетки.** Данный процесс включает следующие этапы:

- 1) построение одномерной сетки, сгущающейся на концах отрезка;
- 2) определение формы свободной границы;
- 3) построение неортогональной двумерной сетки;
- 4) ортогонализация разностной сетки.

Сгущение сетки в некоторых зонах прямоугольной области  $\Pi$ , которая отображается на область течения, может быть обусловлено двумя факторами: 1) чтобы построить в переменных  $x, y$  сетку без крупных ячеек, т. е. достаточно равномерную в области течения, требуется сгущать ее в тех зонах прямоугольной области  $\Pi$ , где коэффициент Ламе имеет большие значения; 2) необходимо сгущать сетку в тех зонах области течения, в которых образуются пограничные слои вследствие большого числа Рейнольдса.

При построении одномерной сетки на отрезке  $[0, 1]$  нужно задать число разбиений  $N$  и шаги сетки на левом  $h_{1 \min}$  и правом  $h_{2 \min}$  концах отрезка. При этом должны выполняться условия

$$h_{1 \min} \leq 1/N, \quad h_{2 \min} \leq 1/N.$$

Алгоритм построения такой сетки подробно изложен в [12].

При построении неортогональной двумерной сетки целесообразно сначала перейти от декартовых координат  $x, y$  к биполярным координатам  $\xi, \eta$  по формулам

$$x = x_f(\xi, \eta) = \frac{c \operatorname{sh}(\xi)}{\operatorname{ch}(\xi) - \cos(\eta)}, \quad y = y_f(\xi, \eta) = h - \frac{c \sin(\eta)}{\operatorname{ch}(\xi) - \cos(\eta)}.$$

Коэффициент Ламе преобразования равен

$$H_f(\xi, \eta) = \frac{c}{\operatorname{ch}(\xi) - \cos(\eta)}. \quad (8)$$

Обратное преобразование имеет вид

$$R_1 = \sqrt{(x-c)^2 + (y-h)^2}, \quad R_2 = \sqrt{(x+c)^2 + (y-h)^2};$$

$$\xi = \ln(R_2/R_1), \quad \eta = \arccos((R_1^2 + R_2^2 - 4c^2)/(2R_1R_2)), \quad (9)$$

где  $c, h$  определены в п. 1. Тогда граница  $\Gamma_2$  перейдет в прямую  $\eta = \eta_0$ , граница  $\Gamma_1$  — в некоторую кривую  $\eta_3(\xi)$ , причем  $\eta_3(\xi) \rightarrow \eta_1 = \eta_0 + \varphi_0$  при  $|\xi| \rightarrow \infty$ . Левая точка трехфазного контакта переходит в точку  $\xi = -\infty$ , правая — в точку  $\xi = \infty$ . Кроме того, имеет место неравенство  $\eta_3(\xi) > \eta_1$ ,  $\xi \in (-\infty, \infty)$ , поскольку график функции  $y = h + f(x)$  лежит выше окружности  $\eta = \eta_1$ .

Обрезая бесконечную полосу с помощью отрезков  $\xi = \pm\xi_0 = \pm 9$ , в системе координат  $(\xi, \eta)$  получаем криволинейный четырехугольник  $K_C$ , у которого три стороны являются прямолинейными, а одна сторона криволинейная. Два нижних угла полученной области прямые, два верхних близки к прямым. Кроме того, нижняя и верхняя границы области однозначно проецируются на ось  $\xi$ , левая и правая — на ось  $\eta$ . Это позволяет построить в описанной области неортогональную разностную сетку и провести ее ортогонализацию методом, описанным в [10, 13].

В процессе ортогонализации разностной сетки необходимо попеременно решать нелинейные уравнения, получающиеся из уравнений Лапласа путем замены зависимых переменных независимыми и наоборот при фиксированных граничных узлах (первый итерационный процесс), и уравнения на границе расчетной области при фиксированных внутренних узлах (второй итерационный процесс). Таким образом, в результате выполнения второго итерационного процесса граничные узлы перемещаются вдоль границы области. Для обеспечения такого перемещения граница области аппроксимируется параболическим сплайном [14]. Тогда для нахождения новых граничных узлов необходимо решать квадратные (для верхней границы области) или линейные (для остальных границ) уравнения.

Опишем порядок расчетов при построении узлов сплайна для верхней границы области  $K_C$ , являющейся образом свободной границы  $\Gamma_1$ . Сначала строится одномерная сетка  $\alpha_k^*$ ,  $k = \overline{0, K_1/2}$  на отрезке  $[0, 1]$ , сгущающаяся вблизи правой границы отрезка (индексом “\*” отмечены сеточные функции, описывающие границу области). Затем, полагая

$$\alpha_k^* = \alpha_k^*/2, \quad k = \overline{0, K_1/2}, \quad \alpha_k^* = 1 - \alpha_{K_1-k}^*, \quad k = \overline{K_1/2 + 1, K_1},$$

получаем сетку, сгущающуюся в окрестности середины отрезка  $[0, 1]$ . После этого вычисляются узлы

$$\xi_{3,k}^* = \xi_0(2\alpha_k^* - 1), \quad k = \overline{0, K_1/2}.$$

Расстояние между образами точек  $(\xi_{3,1}^*, \eta_1)$  и  $(\xi_{3,0}^*, \eta_1)$  в проекции на ось  $x$  равно

$$\Delta x_1 = x_f(\xi_{3,1}^*, \eta_1) - x_f(\xi_{3,0}^*, \eta_1),$$

расстояние между проекцией на ось  $x$  образа точки  $(\xi_{3,0}^*, \eta_1)$  и левой угловой точки области составляет

$$\Delta x_2 = x_f(\xi_{3,0}^*, \eta_1) + c.$$

Определим число разбиений отрезка  $-c \leq x \leq -c_1 = x_f(\xi_{3,0}^*, \eta_1)$  по формуле

$$k_r = [\Delta x_2 / \Delta x_1],$$

где квадратные скобки означают целую часть числа. Далее, полагая

$$x_k = x_f(\xi_{3,k}^*, \eta_1), \quad k = \overline{0, K_1/2}, \quad h_0 = (x_0 + c)/k_r,$$

достраиваем сетку слева:

$$x_k = -c + h_0(k + k_r), \quad k = \overline{-k_r, -1}.$$

Затем вычисляем значения  $y_k = h + f(x_k)$ ,  $k = \overline{-k_r, K_1 + k_r}$  (см. п. 1) и находим искомые узлы  $\xi_{3,k}^*$ ,  $\eta_{3,k}^*$ ,  $k = \overline{0, K_1}$  по формулам (9). (Заметим, что узлы  $\xi_{3,k}^*$  незначительно изменяются по сравнению с описанными выше, в частности,  $\xi_{3,0}^* \neq -\xi_0$ .) Далее находим коэффициенты параболического сплайна, аналогично тому как это сделано в работе [14]. Таким образом, сплайн для верхней границы области  $K_C$  построен.

Сеточные функции  $\xi_{i,k}^*$ ,  $\eta_{i,k}^*$ , определяющие остальные участки границы области  $K_C$ , имеют вид

$$\begin{aligned} \xi_{1,k}^* &= \xi_{3,k}^*, & \eta_{1,k}^* &= \eta_0, & k &= \overline{0, K_1}, \\ \xi_{2,k}^* &= \xi_{3,0}^*, & \eta_{2,k}^* &= \eta_0 + (\eta_{3,0}^* - \eta_0)k/K_2, \\ \xi_{4,k}^* &= \xi_{3,K_1}^*, & \eta_{4,k}^* &= \eta_0 + (\eta_{3,K_1}^* - \eta_0)k/K_2, & k &= \overline{0, K_2}. \end{aligned}$$

Здесь индекс  $i = 1$  соответствует нижней границе области  $K_C$ ,  $i = 2$  — левой,  $i = 4$  — правой границе.

Перейдем к построению неортогональной сетки в  $K_C$ . Введем единичный квадрат  $K_E$ , в котором построим сетку  $\alpha_n$ ,  $n = \overline{0, N}$ , сгущающуюся в середине горизонтального отрезка  $[0, 1]$ , и сетку  $\beta_m^0$ ,  $m = \overline{0, M}$ , сгущающуюся на концах вертикального отрезка  $[0, 1]$ . С помощью сетки  $\alpha_n$  построим сетку  $\xi_{3,n}^0$  по формуле

$$\xi_{3,n}^0 = \xi_{3,K_1}^*(2\alpha_n - 1), \quad n = \overline{0, N},$$

затем с помощью разложения по коэффициентам сплайна, построенного выше с помощью сеточных функций  $\xi_{3,k}^*$ ,  $\eta_{3,k}^*$ , определим массив  $\eta_{3,n}^0$  и положим

$$\xi_{n,m} = \xi_{3,n}^0, \quad \eta_{n,m} = \eta_0 + (\eta_{3,n}^0 - \eta_0)\beta_m^0, \quad n = \overline{0, N}, \quad m = \overline{0, M}.$$

Таким образом, вывод формул для построения неортогональной сетки в области  $K_C$  завершен.

После построения неортогональной сетки выполняется ее ортогонализация и квадрат  $K_E$  переводится в прямоугольник  $\Pi$  путем перехода от массива  $\beta_m^0$  к массиву  $\beta_m$ :

$$\beta_m = \beta_m^0 B. \quad (10)$$

Здесь  $B$  — значение максимума переменной  $\beta$ , при котором уравнения для определения внутренних узлов сетки переходят в уравнения Лапласа (см. [10, 13]).

Ниже приводятся результаты расчета. Предположим, что краевой угол подхода жидкости к твердым стенкам равен  $\varphi_0 = \pi/2$ , а параметр заполнения контейнера жидкостью —  $\eta_0 = 0,5$ . Введем величины  $h_1^\alpha$ ,  $h_2^\alpha$ ,  $h_1^\beta$ ,  $h_2^\beta$ , такие что

$$\begin{aligned} h_1^\alpha &= h_{1\min}^{\alpha*} K_1 = h_{1\min}^\alpha N, & h_2^\alpha &= h_{2\min}^{\alpha*} K_1 = h_{2\min}^\alpha N, \\ h_1^\beta &= h_{1\min}^\beta M, & h_2^\beta &= h_{2\min}^\beta M, \end{aligned}$$

где

$$h_{1\min}^{\alpha*} = \alpha_1^* - \alpha_0^*, \quad h_{1\min}^\alpha = \alpha_1 - \alpha_0, \quad h_{2\min}^{\alpha*} = \alpha_{K_1/2}^* - \alpha_{K_1/2-1}^*, \\ h_{2\min}^\alpha = \alpha_{N/2} - \alpha_{N/2-1}, \quad h_{1\min}^\beta = \beta_1^0 - \beta_0^0, \quad h_{2\min}^\beta = \beta_M^0 - \beta_{M-1}^0.$$

Эти величины имеют следующие значения:  $h_1^\alpha = 1$ ,  $h_2^\alpha = 0,25$ ,  $h_1^\beta = 0,125$ ,  $h_2^\beta = 1$ . Поскольку сетка на левом и правом концах отрезка  $\alpha \in [0, 1]$  должна быть крупной вследствие малости коэффициента Ламе, величина  $h_1^\alpha$  принимает максимальное значение. Значение  $h_2^\alpha = 0,25$  обеспечивает сгущение сетки в середине отрезка  $\alpha \in [0, 1]$ , в результате чего получаем сетку в переменных  $x, y$ , достаточно равномерную в направлении  $\alpha$ . Большое число Рейнольдса задачи обуславливает необходимость сгущения сетки в переменных  $x, y$  в направлении  $\beta^0$  вблизи свободной границы и границы с твердой стенкой, так как в этих областях образуются пограничные слои. Сгущение сетки вблизи свободной границы происходит естественным образом, поэтому значение  $h_2^\beta$  является максимальным. Сгущение сетки на нижней границе осуществляется за счет малости параметра  $h_1^\beta$ .

Опишем процесс построения последовательности ортогональных сеток. Сначала строится неортогональная сетка размерности  $32 \times 8$  при  $h_1^\beta = 1$  (при этом значении  $h_1^\beta$  скольжение узлов вдоль границы области происходит значительно быстрее, чем при  $h_1^\beta = 0,125$ ), остальные параметры имеют значения, приведенные выше. Затем сетка ортогонализируется и используется в качестве начального приближения при построении сетки размерности  $32 \times 16$ . Процедура удвоения числа узлов попеременно по каждому из направлений и ортогонализация сеток проводятся до тех пор, пока не будет построена сетка размерности  $128 \times 32$ . При этом при решении обращенных уравнений Лапласа используется 64 итерации, при решении уравнений для определения граничных узлов —  $K_i$  итераций, число макроитераций равно 200. Затем полагается  $h_1^\beta = 0,125$  и проводится ортогонализация сеток с числом макроитераций, равным 100. После этого при построении сетки максимальной размерности вычисляется параметр  $B$ , одинаковый для всех сеток, и выполняется переход от  $\beta_m^0$  к  $\beta_m$  по формуле (10). Затем решаются уравнения Лапласа с числом итераций, равным 1024.

Заметим, что в ряде случаев итерационный процесс решения обращенных уравнений Лапласа расходится, но этого можно избежать, незначительно изменяя параметр  $K_i$ , который обычно определяется по формуле  $K_i = k \bmod K_{i,1} + K_{i,2}$ , где  $k$  — номер макроитерации; числа  $K_{i,1}$ ,  $K_{i,2}$  находятся в диапазоне от 1 до 3; операция  $\bmod$  означает остаток от деления одного числа на другое.

Введем следующие геометрические параметры построенных сеток:

$$S_1 = \frac{\xi_\beta + \eta_\alpha}{\sqrt{\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2}}, \quad S_2 = \frac{\eta_\beta - \xi_\alpha}{\sqrt{\xi_\alpha^2 + \xi_\beta^2}}, \quad \sin \theta = \frac{\xi_\alpha \eta_\beta - \xi_\beta \eta_\alpha}{\sqrt{(\xi_\alpha^2 + \eta_\alpha^2)(\xi_\beta^2 + \eta_\beta^2)}}, \\ \sigma_1 = \left( \iint_{\Pi} S_1^2 d\alpha d\beta / \iint_{\Pi} d\alpha d\beta \right)^{1/2}, \quad \sigma_2 = \left( \iint_{\Pi} S_2^2 d\alpha d\beta / \iint_{\Pi} d\alpha d\beta \right)^{1/2}, \\ S_{\theta\min} = \min(\sin \theta, (\alpha, \beta) \in \Pi), \quad S_{\theta c} = \iint_{\Pi} \sin \theta d\alpha d\beta / \iint_{\Pi} d\alpha d\beta, \\ S_{\theta\max}^* = 1 - S_{\theta\min}, \quad S_{\theta c}^* = 1 - S_{\theta c}.$$

Здесь  $S_1, S_2$  — относительные погрешности выполнения условий Коши — Римана;  $\theta$  — угол между координатными линиями;  $\sigma_1, \sigma_2$  — среднеквадратичные отклонения от нуля

Таблица 1

Геометрические параметры построенных сеток

№ п/п	$N \times M$	$\sigma_1$	$\sigma_2$	$S_{\theta_{\max}}^*$	$S_{\theta_c}^*$
1	$32 \times 8$	$1,76 \cdot 10^{-2}$	$3,70 \cdot 10^{-2}$	$1,93 \cdot 10^{-3}$	$1,61 \cdot 10^{-4}$
2	$32 \times 8$	$7,52 \cdot 10^{-4}$	$1,45 \cdot 10^{-3}$	$9,18 \cdot 10^{-5}$	$6,71 \cdot 10^{-6}$
3	$32 \times 16$	$2,73 \cdot 10^{-4}$	$1,26 \cdot 10^{-3}$	$7,52 \cdot 10^{-5}$	$4,55 \cdot 10^{-6}$
4	$64 \times 16$	$1,86 \cdot 10^{-4}$	$3,05 \cdot 10^{-4}$	$2,95 \cdot 10^{-5}$	$1,78 \cdot 10^{-6}$
5	$64 \times 32$	$7,03 \cdot 10^{-5}$	$2,96 \cdot 10^{-4}$	$2,11 \cdot 10^{-5}$	$1,18 \cdot 10^{-6}$
6	$128 \times 32$	$5,03 \cdot 10^{-5}$	$7,67 \cdot 10^{-5}$	$8,29 \cdot 10^{-6}$	$4,57 \cdot 10^{-7}$

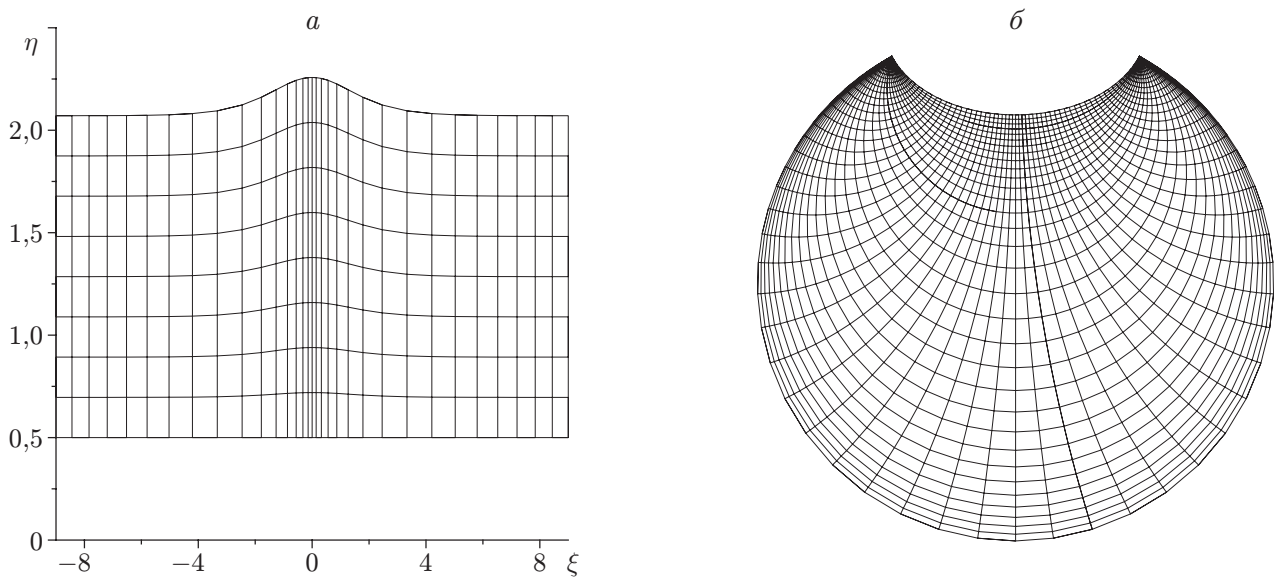


Рис. 2. Неортогональная сетка в переменных  $\xi, \eta$  размерности  $32 \times 8$  (а) и ортогональная сетка размерности  $128 \times 32$  в переменных  $x, y$  (б)

величин  $S_1, S_2; S_{\theta_{\min}}$  — минимальное значение  $\sin \theta$ ;  $S_{\theta_c}$  — среднее значение  $\sin \theta$ ;  $S_{\theta_{\max}}^*$ ,  $S_{\theta_c}^*$  — величины отклонения от единицы параметров  $S_{\theta_{\min}}, S_{\theta_c}$ . При вычислении производных используются направленные разности, например  $\xi_{\alpha}|_{n,m} = (\xi_{n+1,m} - \xi_{n,m}) / (\alpha_{n+1} - \alpha_n)$ .

В табл. 1 приведены значения указанных выше параметров в зависимости от размерности сеток. Первая строка соответствует неортогональной сетке, являющейся начальным приближением при построении ортогональных сеток. Из табл. 1 следует, что после ортогонализации при  $N = 32, M = 8$  все параметры сеток уменьшились более чем в 20 раз. Кроме того, при увеличении числа разбиений одновременно по направлениям  $\alpha$  и  $\beta$  в два раза параметры ортогональных сеток уменьшаются приблизительно в четыре раза, что свидетельствует о втором порядке сходимости алгоритма.

На рис. 2,а показана неортогональная сетка в переменных  $\xi, \eta$  размерности  $32 \times 8$ , построенная на начальном этапе (масштаб по оси  $\eta$  в 7,2 раза крупнее масштаба по оси  $\xi$ ). Характеристики этой сетки приведены в первой строке табл. 1. На рис. 2,б показана ортогональная сетка размерности  $128 \times 32$  в переменных  $x, y$ . Характеристики этой сетки приведены в шестой строке табл. 1.

Таким образом, построена последовательность ортогональных разностных сеток.

**3. Постановка гидродинамической задачи.** Пусть  $u, v$  — компоненты вектора скорости частиц жидкости в направлениях  $\alpha, \beta$ . Введем вихрь  $\omega$  и функцию тока  $\Psi$  по



формулам

$$\omega = \frac{1}{H^2} \left( \frac{\partial(Hv)}{\partial\alpha} - \frac{\partial(Hu)}{\partial\beta} \right), \quad u = \frac{1}{H} \frac{\partial\Psi}{\partial\beta}, \quad v = -\frac{1}{H} \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha}. \quad (11)$$

Для ортогонального преобразования переменных  $\alpha, \beta$  в переменные  $\xi, \eta$ , выполненного в п. 2, введем следующие обозначения:

$$\xi = \xi^1(\alpha, \beta), \quad \eta = \eta^1(\alpha, \beta).$$

Коэффициент Ламе этого преобразования равен

$$H^1(\alpha, \beta) = \sqrt{\left(\frac{\partial\xi^1}{\partial\alpha}\right)^2 + \left(\frac{\partial\xi^1}{\partial\beta}\right)^2}. \quad (12)$$

Тогда коэффициент Ламе перехода от координат  $\alpha, \beta$  к координатам  $x, y$  есть

$$H(\alpha, \beta) = H_f(\xi^1(\alpha, \beta), \eta^1(\alpha, \beta)) H^1(\alpha, \beta)$$

(коэффициент  $H_f$  определен в (8),  $H^1$  — в (12)).

Задача определения функций  $\Psi, \omega$  ставится следующим образом [9, 10]:

$$\Delta\Psi = -H^2\omega; \quad (13)$$

$$\Delta\omega = \operatorname{Re} \left( \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - \frac{\partial\Psi}{\partial\alpha} \frac{\partial\omega}{\partial\beta} \right), \quad (\alpha, \beta) \in \Pi; \quad (14)$$

$$\Psi(\alpha, 0) = 0, \quad \Psi(\alpha, B) = 0; \quad (15)$$

$$\omega(\alpha, 0) = -\operatorname{Be} + (2 - \operatorname{Be}) \frac{1}{H(\alpha, 0)} \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \Big|_{\beta=0}; \quad (16)$$

$$\omega(\alpha, B) = -\frac{2K_0}{H(\alpha, B)} \frac{\partial\Psi}{\partial\beta} \Big|_{\beta=B}; \quad (17)$$

$$K_0 = -\frac{f''(x)}{(1 + (f'(x))^2)^{3/2}}; \quad (18)$$

$$\Psi(0, \beta) = \Psi_a, \quad \Psi(1, \beta) = \Psi_a; \quad (19)$$

$$\omega(0, \beta) = \omega_0 + \omega_a + \omega_b - \omega_R; \quad (20)$$

$$\omega(1, \beta) = \omega_0 + \omega_a + \omega_b + \omega_R; \quad (21)$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial\alpha^2} + \frac{\partial^2}{\partial\beta^2}; \quad (22)$$

$$\omega_0 = -\operatorname{Be}(1 - \beta/B),$$

$$\Psi_a = \frac{\operatorname{Be} c^2 e^{-2|\xi|}}{2\pi} \{ -(5 + 4|\xi|) \sin(2(\eta_1 - \eta)) + 4(\eta_1 - \eta)[1 + \cos(2(\eta_1 - \eta))] \},$$

$$\omega_a = -\frac{\operatorname{Be}(2 - \operatorname{Be})c e^{-|\xi|}}{2\pi} [(5 + 4|\xi|) \sin(\eta_1 - \eta) - 4(\eta_1 - \eta) \cos(\eta_1 - \eta)],$$

$$\omega_b = -\frac{\operatorname{Be} K_0 c e^{-|\xi|}}{\pi} [(1 + 4|\xi|) \sin(\eta - \eta_0) - 4(\eta - \eta_0) \cos(\eta - \eta_0)],$$

$$\omega_R = -\frac{2\operatorname{Be}^2 c^2 \operatorname{Re}}{\pi^2} \left( \frac{1}{8} (4|\xi|^2 + 2|\xi| + 1) \sin(2(\eta_0 - \eta)) - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{\sin[k(2(\eta - \eta_0))]}{k(k^2 - 1)^2} \right) e^{-2|\xi|}.$$

Уравнение (13) — следствие соотношений (11), (14) — уравнение импульса, (15) — условия непротекания на твердой стенке и свободной границе, (16) — условие проскальзывания (касательные напряжения пропорциональны разности скоростей частиц жидкости и стенки контейнера с коэффициентом пропорциональности, равным  $-k$ ), (17) — условие отсутствия касательных напряжений на свободной границе, (18) — кривизна свободной границы (положительная, если свободная граница выпукла наружу), (19) — асимптотические условия для функции тока, (20), (21) — асимптотические условия для функции вихря.

Функции  $\Psi_a$ ,  $\omega_0$ ,  $\omega_a$ ,  $\omega_b$ ,  $\omega_R$  являются решениями следующих асимптотических при  $|\xi| \rightarrow \infty$  краевых задач:

$$\Delta\omega_0 = 0, \quad \beta \in (0, B), \quad \omega_0(\alpha, 0) = -\text{Be}, \quad \omega_0(\alpha, B) = 0; \quad (23)$$

$$\Delta\Psi_a = -4c^2 e^{-2|\xi|} \omega_0, \quad \eta \in (\eta_0, \eta_1), \quad \Psi_a(\xi, \eta_0) = 0, \quad \Psi_a(\xi, \eta_1) = 0; \quad (24)$$

$$\Delta\omega_a = 0, \quad \eta \in (\eta_0, \eta_1), \quad \omega_a(\xi, \eta_0) = \frac{(2 - \text{Be}) e^{|\xi|}}{2c} \frac{\partial\Psi_a}{\partial\eta} \Big|_{\eta=\eta_0}, \quad \omega_a(\xi, \eta_1) = 0; \quad (25)$$

$$\Delta\omega_b = 0, \quad \eta \in (\eta_0, \eta_1), \quad \omega_b(\xi, \eta_0) = 0, \quad \omega_b(\xi, \eta_1) = -\frac{K_0 e^{|\xi|}}{c} \frac{\partial\Psi_a}{\partial\eta} \Big|_{\eta=\eta_1}; \quad (26)$$

$$\Delta\omega_R = -\text{Re} \frac{\partial\Psi_a}{\partial\xi} \frac{\partial\omega_0}{\partial\eta}, \quad \eta \in (\eta_0, \eta_1), \quad \omega_R(\xi, \eta_0) = 0, \quad \omega_R(\xi, \eta_1) = 0. \quad (27)$$

В (23) оператор  $\Delta$  имеет вид (22), а в (24)–(27) — вид  $\Delta = \partial^2/\partial\xi^2 + \partial^2/\partial\eta^2$ . При решении задач (24), (27) учитывалось, что на разрезах полосы приближенно выполняется равенство

$$\omega_0 = -2 \text{Be} (\eta_1 - \eta)/\pi.$$

Безразмерными критериями подобия являются

$$\text{Re} = \frac{UR}{\nu}, \quad \text{Fr} = \frac{U^2}{g_0 R}, \quad \text{Bo} = \frac{\rho g_0 R^2}{\sigma}, \quad \text{Be} = \frac{kR}{\rho\nu}, \quad (28)$$

где  $U$  — скорость движения стенок контейнера;  $R = 0,01$  м — радиус контейнера;  $\nu = 1,35 \cdot 10^{-7}$  м<sup>2</sup>/с — кинематическая вязкость жидкости, соответствующая германию;  $g_0 = 9,81$  м/с<sup>2</sup> — ускорение свободного падения;  $\rho = 5571$  кг/м<sup>3</sup> — плотность жидкости (германий);  $\sigma = 0,6$  Н/м — поверхностное натяжение жидкости (германий);  $k$  — коэффициент проскальзывания;  $\text{Re}$  — число Рейнольдса;  $\text{Fr}$  — число Фруда (характеризует воздействие движения жидкости на форму свободной границы, которым в данной работе пренебрегается);  $\text{Bo}$  — число Бонда;  $\text{Be}$  — параметр проскальзывания.

В эксперименте скорость движения стенок контейнера составляла приблизительно 0,6 м/с (10 об/с), что соответствует числу Рейнольдса порядка 45 000 и числу Фруда  $\text{Fr} = 3,6$ . Однако характерная скорость движения самой жидкости была приблизительно в 10 раз меньше. Обозначим через  $v_{\max}$  отношение максимальной скорости движения расплава и скорости движения стенок контейнера. Тогда реальное (определяемое по характерной скорости движения жидкости) число Рейнольдса равно  $\text{Re}_R = v_{\max} \text{Re} = 4500$ , а реальное число Фруда —  $\text{Fr}_R = v_{\max}^2 \text{Fr} = 0,036$ . При таком большом числе Фруда будет существенным изменение формы свободной границы, поэтому ограничимся значением числа Рейнольдса  $\text{Re} = 20\,000$ , тогда реальное число Фруда будет равно 0,007. Число Бонда равно  $\text{Bo} = 9,1$ , параметр проскальзывания  $\text{Be}$  положим равным 0,2, тогда значение  $v_{\max}$  будет порядка 0,1, что соответствует экспериментальным данным.

Таблица 2

Характеристики гидродинамического течения

Re	$v_{\max}$	$Re_R$	$\Psi_{\min}$	$\Psi_{\max}$	$\omega_{\min}$	$\omega_{\max}$
10	0,2399	2,399	$-8,50 \cdot 10^{-2}$	0	-0,6319	0,3602
1000	0,1338	133,800	$-4,70 \cdot 10^{-2}$	0	-0,4246	0,4542
6000	0,1080	648,200	$-3,39 \cdot 10^{-2}$	0	-0,3524	0,3556
20 000	0,0916	1832,000	$-2,77 \cdot 10^{-2}$	0	-0,3196	0,2954

**4. Результаты расчета гидродинамического течения.** Задача решается методом конечных разностей. При расчете функции вихря в левую часть уравнения (14) вводится член  $\partial\omega/\partial t$  и решение стационарной задачи строится методом установления по времени. Для решения эволюционной задачи используется метод приближенной факторизации. При аппроксимации конвективных членов в уравнении импульса используются разности против потока, обеспечивающие монотонность схемы при любом шаге по времени за счет диагонального преобладания в матрицах системы [15]. Применяется алгоритм, позволяющий точно выполнить условия (16), (17) на каждом шаге по времени [16]. При решении задачи для определения функции тока используется метод В. Г. Зверева [16, 17].

Расчет проводится на последовательности сеток. Сначала функции  $\Psi$ ,  $\omega$  рассчитываются на сетке  $32 \times 8$ . При этом в качестве начального условия для функции тока используется функция  $\Psi_a$ , для вихря — функция  $\omega_0 + \omega_a + \omega_b$ . На первых 200 итерациях по времени число Рейнольдса линейно увеличивается от нуля до заданного значения, а затем остается постоянным. После этого решается задача на сетке  $32 \times 16$  с начальным приближением, полученным путем интерполяции с построенного ранее решения на сетке  $32 \times 8$ . Процесс удвоения числа узлов сетки поочередно по двум направлениям с последующим нахождением функций  $\Psi$ ,  $\omega$  продолжается до тех пор, пока не будет построено решение на сетке  $128 \times 32$ .

При определении формы свободной границы число разбиений  $K_1$  было равно 1024,  $k_r = 56$ . Для всех вариантов шаг по времени был равен  $10^{-4}$ . Число итераций по времени для максимального числа разбиений и максимального числа Рейнольдса составляло 20 000. Для всех вариантов максимальное значение модуля производной по времени от функции вихря в конце расчетов не превышало  $10^{-8}$ . Число итераций  $L$  для функции тока выбиралось таким образом, чтобы норма невязки  $e_L$  соответствующего уравнения не превышала  $2 \cdot 10^{-6}$ . В начале расчета величина  $L$  была равна нескольким десяткам, в конце — единице. Величина  $e_L$  в конце расчетов уменьшалась до  $10^{-12}$ .

Для тестирования программы проведены расчеты для случая, когда  $Re = 0$  и область течения является полукругом, т. е. при  $\eta_0 = \pi/2$ ,  $\eta_1 = \pi$ . Численное решение сравнивалось с аналитическим, полученным в [9, 10]. В результате установлено, что при измельчении расчетной сетки численное решение имело первый порядок сходимости.

В табл. 2 приведены максимальное значение модуля безразмерной скорости  $v_{\max}$ , реальное число Рейнольдса  $Re_R = v_{\max} Re$ , минимальное  $\Psi_{\min}$  и максимальное  $\Psi_{\max}$  значения функции тока, минимальное  $\omega_{\min}$  и максимальное  $\omega_{\max}$  значения функции вихря в зависимости от формального (определенного по скорости движения стенок контейнера  $U$  в (28) и входящего в уравнение (14)) числа Рейнольдса  $Re$ . Реальное число Фруда для максимальной скорости вращения цилиндра, соответствующей формальному числу Рейнольдса  $Re = 20\,000$ , составляет  $Fr_R = 0,006$ , т. е. является малым. Поэтому возмущением формы свободной границы, обусловленным движением жидкости, можно пренебречь. На рис. 3,а–г показаны линии тока, на рис. 3,д–з — изолинии функции вихря в зависимости от формального числа Рейнольдса  $Re$ . Видно, что при достаточно большом значении  $Re$

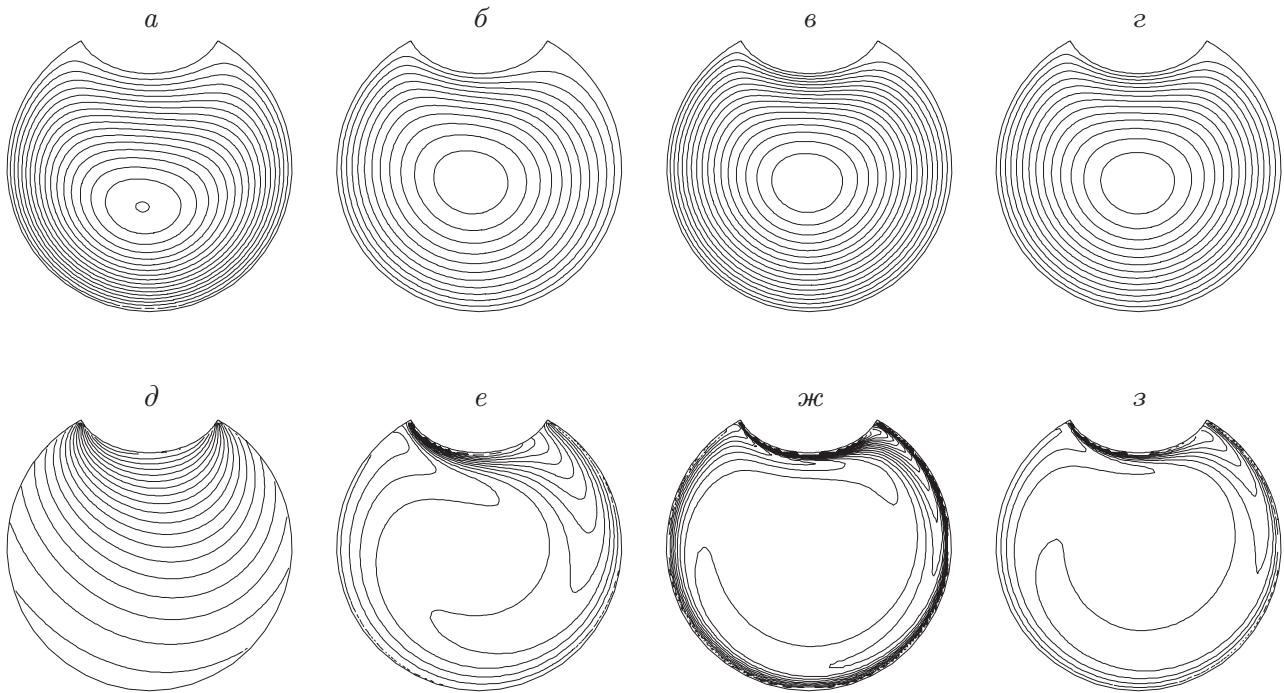


Рис. 3. Линии тока ( $a-g$ ) и изолинии функции вихря ( $д-з$ ) при различных значениях числа Рейнольдса:

$a, д$  —  $Re = 10$ ,  $б, е$  —  $Re = 1000$ ,  $в, ж$  —  $Re = 6000$ ,  $г, з$  —  $Re = 20000$

в окрестности границы области формируется вихревой пограничный слой, затем следует переходная зона и далее — зона, в которой значения функции вихря близки к константе. Появление переходной зоны обусловлено, по-видимому, наличием угловых точек в области течения, а также тем, что в этих точках функция вихря имеет скачок: на твердой стенке она принимает значение  $-Be$ , на свободной границе — значение, равное нулю, поскольку в угловых точках скорость обращается в нуль (см. (11), (16) (17)). Такая точка зрения обусловлена тем, что в случае гладкой границы области и непрерывной функции вихря на ней переходная зона в области течения не возникает [18].

Заметим, что при больших числах Рейнольдса картина течения искажается вследствие наличия схемной вязкости. Однако незначительное изменение картины линий тока при значительном изменении числа Рейнольдса и сгущение изолиний функции вихря вблизи границы области течения подтверждаются результатами расчета, выполненного в полукруге на сетке размерности  $2048 \times 512$ , т. е. в случае, когда схемная вязкость мала. Различие состоит только в том, что в последнем случае переходная область имеет меньшие размеры.

**Заключение.** Решена задача о плоскопараллельном стационарном движении вязкой несжимаемой жидкости, частично заполняющей цилиндрическую вращающуюся полость, в случае когда область течения является односвязной, а свободная граница — криволинейной. Эта граница определяется из уравнения капиллярного равновесия в состоянии покоя. Возмущением свободной границы, обусловленным движением жидкости, пренебрегается, так как амплитуда этого возмущения пропорциональна числу Фруда, которое является малым. При решении использованы метод конформного отображения (при построении ортогональной разностной сетки), метод установления по времени (при решении стационарной задачи), метод приближенной факторизации (при решении эволюционного уравнения для вихря), метод В. Г. Зверева (при решении задачи для функции тока), метод, обеспечива-

ющий точное выполнение граничных условий, связывающих вихрь на границе и значения функции тока вблизи границы на каждом шаге по времени, а также метод конечных разностей. Расчет проведен на последовательности ортогональных разностных сеток начиная с сетки размерности  $32 \times 8$  и кончая сеткой размерности  $128 \times 32$ . Построены линии тока и изолинии функции вихря течения. Установлено, что при больших числах Рейнольдса область течения делится на три части: вихревой пограничный слой в окрестности границы, переходную зону и зону, в которой функция вихря имеет постоянное значение. Появление переходной зоны обусловлено, по-видимому, наличием угловых точек границы области, а также тем, что в этих точках функция вихря имеет скачок.

Автор выражает благодарность В. В. Пухначеву за постановку и полезные обсуждения рассмотренной в работе задачи.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. **Ждан Л. А.** Задача о движении вязкой жидкости во вращающемся круге в поле тяжести // Вестн. Моск. гос. ун-та. Сер. 1. Математика, механика. 1987. № 1. С. 86–89.
2. **Greenspan H. P.** On a rotational flow disturbed by gravity // J. Fluid Mech. 1976. V. 74, pt 2. P. 335–352.
3. **Gans R. F., Yalisove S. M.** Observations and measurements of flow in partially-filled horizontally rotating cylinder // Trans. ASME. Ser. 1. J. Fluids Engng. 1982. V. 104, N 3. P. 363–366.
4. **Balmer R. T., Wang T. G.** An experimental study of internal hydrocyts // Trans. ASME. Ser. 1. J. Fluids Engng. 1976. V. 98, N 4. P. 688–694.
5. **Бадратинова Л. Г.** О движении жидкого слоя по внутренней поверхности горизонтального вращающегося цилиндра // Динамика сплошной среды: Сб. науч. тр. / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1993. Вып. 106. С. 179–184.
6. **Шрагер Г. Р.** Моделирование гидродинамических процессов в технологии переработки полимерных материалов / Г. Р. Шрагер, А. Н. Козлобродов, В. А. Якутенок. Томск: Изд-во Том. ун-та, 1999.
7. **Lopes A. v. B., Thiele U., Hazel A. L.** On the multiple solutions of coating and rimming flows on rotating cylinder // J. Fluid Mech. 2018. V. 835. P. 540–574.
8. **Козлов В. Г., Чиграков А. В.** Поведение вязкой жидкости в частично заполненном горизонтальном вращающемся цилиндре // Конвективные течения. Пермь: Перм. гос. пед. ун-т, 2005. Вып. 2. С. 137–151.
9. **Воеводин А. Ф.** Проблемы вычислительной математики / А. Ф. Воеводин, В. В. Остапенко, Ю. В. Пивоваров, С. М. Шугрин. Новосибирск: Изд-во Сиб. отд-ния РАН, 1995.
10. **Пивоваров Ю. В.** Моделирование конвекции расплава полупроводникового материала при зонной плавке: Дис. . . канд. физ.-мат. наук. Новосибирск, 2006.
11. **Байокки К., Пухначев В. В.** Задачи с односторонними ограничениями для уравнений Навье — Стокса и проблема динамического краевого угла // ПМТФ. 1990. № 2. С. 27–40.
12. **Пивоваров Ю. В.** Расчет процесса сближения двух сферических капель, находящихся в среде Бингама // ПМТФ. 2014. Т. 55, № 5. С. 29–44.
13. **Пивоваров Ю. В.** О построении ортогональной разностной сетки в криволинейном четырехугольнике // Вычисл. технологии. 2003. Т. 8, № 5. С. 94–101.
14. **Стечкин С. Б.** Сплайны в вычислительной математике / С. Б. Стечкин, Ю. И. Субботин. М.: Наука, 1976.

15. **Пивоваров Ю. В.** Условия монотонности факторизованной разностной схемы для эволюционного уравнения с двумя пространственными переменными // Вычисл. технологии. 2001. Т. 6, № 4. С. 81–91.
16. **Пивоваров Ю. В.** Расчет движения жидкости с переменной вязкостью в области с криволинейной границей // Вычисл. технологии. 2005. Т. 10, № 3. С. 87–107.
17. **Зверев В. Г.** Об одном итерационном алгоритме решения разностных эллиптических уравнений // Вычисл. технологии. 1999. Т. 4, № 1. С. 55–65.
18. **Betchelor G. K.** On steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds number // J. Fluid Mech. 1956. V. 1, N 2. P. 177–190.

*Поступила в редакцию 6/IX 2018 г.,  
после доработки — 26/X 2018 г.  
Принята к публикации 26/XI 2018 г.*

---