

УДК 519.86:533.6.011

ВХОД В АТМОСФЕРУ ЗЕМЛИ ТЕЛ С АЭРОДИНАМИЧЕСКИМ КАЧЕСТВОМ

А. И. Бородин

Научно-исследовательский институт прикладной математики и механики при Томском государственном университете, 634050 Томск

В рамках модели параболизированного вязкого ударного слоя решена задача спуска по планирующей траектории в атмосфере Земли гладкого затупленного тела, обладающего аэродинамическим качеством.

Введение. При движении тел в атмосфере с большими сверхзвуковыми скоростями нагрев газа в ударном слое вблизи обтекаемого тела инициирует протекание в нем различных физико-химических процессов, учет которых необходим для получения реальной физической картины течения. В данной работе численное моделирование сверхзвукового химически неравновесного многокомпонентного течения вязкого газа проводится в рамках модели “параболизированного” вязкого ударного слоя, являющейся модификацией полных уравнений вязкого ударного слоя [1] и предложенной первоначально для течений однородного газа [2, 3], а затем для многокомпонентной смеси газов [4]. Уравнения параболизированного вязкого ударного слоя, являющиеся упрощением полных уравнений Навье — Стокса и содержащие все члены уравнений пограничного слоя и уравнений невязкого ударного слоя в гиперзвуковом приближении, описывают всю возмущенную область от ударной волны (положение ее заранее неизвестно) до поверхности тела. Выбор данной модели объясняется, во-первых, тем, что для гладких тел она имеет хорошую точность в достаточно широкой и интересной для практических приложений окрестности затупления тела, где силовые и тепловые нагрузки значительны, а сам ударный слой остается тонким [5]. Во-вторых, для решения соответствующей начально-краевой задачи в рамках данной модели можно использовать быстрые и экономичные маршевые методы расчетов, что особенно важно для трехмерных течений. Наконец, в-третьих, из всех известных модификаций уравнений вязкого ударного слоя, сохраняющих параболический тип, модель параболизированного вязкого ударного слоя позволяет существенно увеличить размер расчетной области по маршевой координате.

Постановка задачи. Рассмотрим задачу обтекания под углами атаки и скольжения затупленных тел с каталитической поверхностью гиперзвуковым потоком химически неравновесной смеси газов. Для численного решения задачи введем криволинейную систему координат x^i , нормально связанную с поверхностью обтекаемого тела: ось x^3 направлена вдоль нормали к телу, оси x^1 и x^2 расположены на его поверхности. Уравнения пространственного “параболизированного” вязкого ударного слоя описывают течение между поверхностью обтекаемого тела и отошедшей ударной волной. С учетом неравновесных химических реакций и многокомпонентной диффузии и в пренебрежении термодиффузией, диффузионным термоэффектом и бародиффузией эти уравнения в произвольной криволи-

нейной системе координат в безразмерных переменных имеют следующий вид [4]:

$$D_\alpha(\rho u^\alpha \sqrt{g/g_{(\alpha\alpha)}}) + \sqrt{g} D_3(\rho u^3) = 0; \quad (1)$$

$$\rho(Du^\alpha + A_{\beta\delta}^\alpha u^\beta u^\delta) = -g^{\alpha\beta} \sqrt{g_{(\alpha\alpha)}} D_\beta P + D_3\left(\frac{\mu}{\text{Re}} D_3 u^\alpha\right); \quad (2)$$

$$D_3 D_\alpha P = -D_\alpha(\rho A_{\beta\delta}^3 u^\beta u^\delta); \quad (3)$$

$$\rho(Du^3 + A_{\beta\delta}^3 u^\beta u^\delta) = -D_3 P; \quad (4)$$

$$\rho c_p D T - 2D^* P = D_3\left(\frac{\mu c_p}{\sigma \text{Re}} D_3 T\right) + \frac{\mu}{\text{Re}} B_{\alpha\beta} D_3 u^\alpha D_3 u^\beta - D_3 T \sum_{i=1}^N c_{pi} I_i - \sum_{i=1}^N h_i \dot{w}_i; \quad (5)$$

$$\rho D c_i + D_3 I_i = \dot{w}_i, \quad i = 1, \dots, N - N_e; \quad (6)$$

$$\rho D c_i^* + D_3 I_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, N_e - 1; \quad (7)$$

$$P = \rho T R \sum_{i=1}^N \frac{c_i}{m_i}; \quad (8)$$

$$\sum_{i=1}^{N_e} c_i^* = 1, \quad \sum_{i=1}^{N_e} I_i^* = 0, \quad c_p = \sum_{i=1}^N c_{pi} c_i, \quad (9)$$

где $D_i \equiv \partial/\partial x^i$; $D^* \equiv (u^\alpha/\sqrt{g_{(\alpha\alpha)}})D_\alpha$; $D \equiv D^* + u^3 D_3$; $\text{Re} = \rho_\infty V_\infty L/\mu(T_0)$; $T_0 = 10^4$ К.

Систему (1)–(9) замыкают соотношения Стефана — Максвелла

$$\sum_{j=1}^{N-1} a_{ij} I_j = -\frac{\mu}{\text{Re} \text{Sc}_{lN}} \sum_{j=1}^{N-1} b_{ij} D_3 c_j, \quad i = 1, \dots, N - 1,$$

$$a_{ij} = -a_{ij}^* c_i, \quad b_{ij} = -b_{ij}^* c_i \quad (i \neq j),$$

$$a_{ii} = \frac{\text{Sc}_{iN}}{\text{Sc}_{lN}} + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} a_{ij}^* c_j, \quad b_{ii} = 1 + \sum_{j=1, j \neq i}^{N-1} b_{ij}^* c_j,$$

$$a_{ij}^* = \frac{m_N}{m_j} \frac{\text{Sc}_{ij}}{\text{Sc}_{lN}} - \frac{\text{Sc}_{iN}}{\text{Sc}_{lN}}, \quad b_{ij}^* = \frac{m_N}{m_j} - 1, \quad \text{Sc}_{ij} = \frac{\mu}{\rho D_{ij}}.$$

Здесь $V_\infty u^i$ — физические составляющие вектора скорости по соответствующим осям координат; $\rho_\infty V_\infty^2 P$, $\rho_\infty \rho$, $T_0 T$ — давление, плотность, температура смеси газов, состоящей из N химических компонентов, соответственно; $\mu(T_0)\mu$ — вязкость; $(V_\infty^2/(2T_0))c_p$ — удельная теплоемкость; σ — число Прандтля; c_i , m_i , $0,5V_\infty^2 h_i$, $(V_\infty/(2T_0))c_{pi}$, $V_\infty \rho_\infty I_i$, $V_\infty \rho_\infty \dot{w}_i/L$ — массовая концентрация, молекулярная масса, удельная энтальпия, удельная теплоемкость, нормальная компонента вектора диффузионного потока, скорость образования массы i -го компонента в результате химических реакций; c_i^* , I_i^* — концентрация и нормальная составляющая вектора диффузионного потока i -го химического элемента ($i = 1, 2, \dots, N_e$; N_e — число элементов); D_{ij} , Sc_{ij} — бинарные коэффициенты диффузии и числа Шмидта; $R_G = V_\infty^2 R/T_0$ — универсальная газовая постоянная; $g_{\alpha\beta}$, $g^{\alpha\beta}$ — ковариантные и контравариантные компоненты первой квадратичной формы поверхности тела; $g = g_{11}g_{22} - g_{12}^2$; $A_{\beta\delta}^k$ — известные функции формы тела [6]. По повторяющимся индексам, не заключенным в скобки, проводится суммирование. Латинские индексы принимают значения 1, 2 или 3 (кроме специально отмеченных случаев), греческие индексы равны 1

или 2. Все линейные размеры отнесены к характерному линейному размеру L . Здесь и далее нижние индексы w, ∞, s соответствуют значениям на поверхности тела, в набегающем потоке и за ударной волной.

Для дифференциальных уравнений (1)–(7) задаются граничные условия на ударной волне и поверхности тела. На ударной волне используются обобщенные соотношения Рэнкина — Гюгонно в гиперзвуковом приближении в пренебрежении химическими реакциями внутри ударной волны:

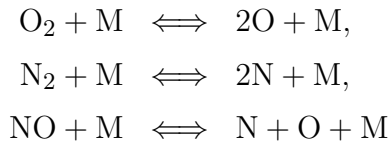
$$\begin{aligned} x^3 = x_s^3(x^1, x^2): \quad & \rho(u^3 - D^*x^3) = u_\infty^3, \\ & u_\infty^3(u^\alpha - u_\infty^\alpha) = \frac{\mu}{\text{Re}} D_3 u^\alpha, \quad P = (u_\infty^3)^2, \\ & u_\infty^3(c_i - c_{i\infty}) + I_i = 0, \quad i = 1, \dots, N - N_e, \\ & u_\infty^3(c_i^* - c_{i\infty}^*) + I_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, N_e - 1, \\ & \frac{\mu c_p}{\sigma u_\infty^3 \text{Re}} D_3 T = \sum_{i=1}^N c_{i\infty} (h_i - h_{i\infty}) - (u_\infty^3)^2 - B_{\alpha\beta} (u^\alpha - u_\infty^\alpha)(u^\beta - u_\infty^\beta). \end{aligned} \quad (10)$$

На поверхности тела с учетом гетерогенных химических реакций в пренебрежении отводом тепла внутрь тела граничные условия записываются в виде

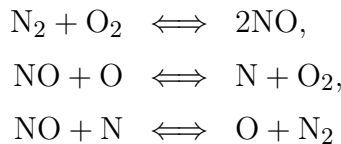
$$\begin{aligned} x^3 = 0: \quad & u^i = 0, \quad q = \Gamma T^4, \\ & q = \frac{\mu c_p}{\sigma \text{Re}} D_3 T - \sum_{i=1}^N h_i I_i, \quad \Gamma = \frac{2\varepsilon_B \sigma_B T_0^4}{\rho_\infty V_\infty^3}, \\ & I_i = \dot{r}_i, \quad i = 1, \dots, N - N_e, \\ & I_i^* = 0, \quad i = 1, \dots, N_e - 1, \end{aligned} \quad (11)$$

где ε_B — коэффициент черноты поверхности; σ_B — постоянная Стефана — Больцмана; $\rho_\infty V_\infty \dot{r}_i$ — скорость образования i -го компонента за счет гетерогенных реакций.

Диссоциирующий воздух в ударном слое представляется как идеальный газ, состоящий из пяти химических компонентов: $\text{O}_2, \text{N}_2, \text{NO}, \text{O}, \text{N}$, в котором протекают три реакции диссоциации-рекомбинации



и три реакции обмена



(M — третий элемент, в качестве которого может выступать любой из пяти компонентов).

Зависимости констант скоростей прямых и обратных реакций от температуры определялись согласно [7]. Коэффициенты переноса и термодинамические функции вычислялись по формулам, приведенным в [8–12].

Атмосфера считается изотермической с распределением плотности ρ_∞ [г/см³] по высоте H [км]: $\rho_\infty = 1,225 \cdot 10^{-3} \exp(-0,142H)$. Предполагается, что гетерогенные каталитические реакции являются реакциями первого порядка $\dot{r}_i = -\rho k_{wi} c_i$, $i \equiv \text{O}, \text{N}, \text{NO}$, где

$V_\infty k_{wi}$ — константа скорости гетерогенной рекомбинации. Рассматривались две модели каталитического взаимодействия газа с твердой поверхностью: 1) $k_{wi} = 0$ (нейтральная поверхность); 2) $k_{wi} = \infty$ (идеально каталитическая поверхность).

Метод решения. На поверхности тела выберем полярную систему координат с центром в точке торможения [13]. В этой точке нормаль к поверхности обтекаемого тела совпадает с направлением набегающего потока, которое определяется углами атаки α и скольжения β . Одно семейство координатных линий является концентрическими “окружностями”, другое — пучком “лучей” с центром в начале координат.

С учетом особенности выбранной системы координат на поверхности перейдем к новым переменным

$$\begin{aligned} \xi^\alpha &= x^\alpha, \quad \zeta = \frac{1}{\Delta} \int_0^{x^3} \rho dx^3, \quad \Delta = \Delta(\xi^1, \xi^2) = \int_0^{x_s^3} \rho dx^3, \\ \frac{\partial f_\alpha}{\partial \zeta} &= \frac{u^\alpha}{u_*^\alpha}, \quad \theta = \frac{T}{T_*}, \quad u_*^1 = u_\infty^1, \quad u_*^2 = \xi^1, \quad T_* = \frac{1}{2} (u_\infty^3)^2, \\ \rho u^3 \sqrt{g} &= -\frac{\partial}{\partial \xi^\alpha} (\psi_*^{(\alpha)} f_\alpha) - \psi_*^{(\alpha)} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial \zeta}{\partial x^\alpha}, \quad \psi_*^\alpha = \Delta u_*^\alpha \sqrt{g/g(\alpha\alpha)}, \quad P_\alpha = \frac{1}{(\xi^1)^\alpha} \frac{\partial P}{\partial \xi^\alpha}, \\ X_i &= I_i/\Delta, \quad i = 1, \dots, N - N_e, \quad X_i^* = I_i^*/\Delta, \quad i = 1, \dots, N_e. \end{aligned}$$

В результате появляется возможность разрешить особенности в критической точке.

В новых переменных уравнение неразрывности (1) удовлетворяется тождественно, вся система дифференциальных уравнений (2)–(9) с граничными условиями (10), (11) в этих переменных приведена в [4].

Соотношения Стефана — Максвелла записываются в виде [14]

$$X_i = \alpha_i \frac{\partial c_i}{\partial \zeta} + \beta_i c_i, \quad i = 1, \dots, N - 1. \quad (12)$$

Для определения потока X_i интегрируется соответствующее уравнение неразрывности для i -го компонента, а для вычисления его концентрации c_i используется это уравнение с заменой X_i из уравнения (12). Данный подход позволяет найти неизвестные концентрации входящих в смесь газов без предварительного разрешения соотношений Стефана — Максвелла относительно диффузионных потоков.

Таким образом, полученная система уравнений, описывающая течение смеси в ударном слое, содержит два уравнения третьего порядка по поперечной координате ζ относительно функций тока f_α , уравнение второго порядка для температуры θ , уравнение второго порядка для координаты x^3 (которое является следствием уравнения импульсов в проекции на нормаль к поверхности тела, уравнения неразрывности и уравнения состояния), два уравнения первого порядка для продольных составляющих градиента давления P_α , $N - 1$ уравнений первого порядка для диффузионных потоков X_i и $N - 1$ уравнений второго порядка относительно концентраций c_i .

Нормальная составляющая вектора скорости u^3 и плотность ρ определяются формулами

$$u^3 = -A \frac{\partial x^3}{\partial \zeta} + (\xi^1)^{2-\alpha} \frac{\partial f_\alpha}{\partial \zeta} \frac{\partial x^3}{\partial \xi^\alpha}, \quad \rho = \frac{\Delta \xi^1}{\sqrt{g}} \left(\frac{\partial x^3}{\partial \zeta} \right)^{-1}.$$

Для численного интегрирования дифференциальных уравнений второго и третьего порядка по поперечной координате ζ использовалась неявная конечно-разностная схема,

имеющая порядок аппроксимации $O(\delta\xi^1) + O(\delta\xi^2)^2 + O(\delta\zeta)^4$, представляющая собой обобщение на трехмерный случай схемы, приведенной в работе [15], и использующая переменный шаг по координате ζ . В конвективном операторе производные по маршевой координате ξ^1 заменяются разностями против потока, а производные по окружной координате ξ^2 аппроксимируются центральными разностями на основе решения, полученного на предыдущей итерации на текущей “окружности” $\xi^1 + \delta\xi^1 = \text{const}$.

Уравнения первого порядка интегрируются методом Симпсона с четвертым порядком точности по ζ .

Величина $\Delta(\xi^1, \xi^2)$ определяется после окончания расчета всей “окружности” на каждой итерации методом циклической прогонки [16] и является, таким образом, связующей функцией решений, полученных во всех расчетных точках текущей “окружности”.

Так как введенная на поверхности обтекаемого тела система координат (ξ^1, ξ^2) вырождается в критической точке, для решения исходных уравнений в этой точке использовалась невырожденная криволинейная система координат. Полученное решение затем пересчитывалось в систему координат (ξ^1, ξ^2, ζ) по алгебраическим формулам [13] и полагалось начальным для расчета всей области.

Особенность предложенного численного метода состоит в том, что для его реализации не требуется наличия в потоке плоскостей симметрии (поэтому можно проводить расчеты для общего случая обтекания тел под углами атаки и скольжения), а при вычислении коэффициентов трения и теплообмена на поверхности тела не требуется численного дифференцирования полученных профилей скорости и температуры поперек ударного слоя.

Расчеты показали, что данный метод обладает устойчивостью, экономичен и позволяет получать решение системы уравнений параболизированного вязкого ударного слоя в широком диапазоне определяющих параметров задачи.

Результаты. В качестве спускаемого по траектории тела взят эллиптический параболоид, уравнение которого в декартовой системе координат имеет вид $2z = (x/b)^2 + (y/c)^2$, $b = 1$, $c = 1,5811$. Отношение главных кривизн в вершине этого параболоида $k = 0,4$. В качестве характерного линейного размера в задаче принят наименьший из радиусов главных кривизн в этой точке $L = 0,5$ м. Коэффициент черноты поверхности $\varepsilon_B = 0,85$.

Для подтверждения достоверности результатов, приведенных ниже, решена задача обтекания данного параболоида в условиях движения вдоль траектории входа в атмосферу Земли, когда ось параболоида совпадает с направлением набегающего потока. Полученные в работе значения температуры теплоизолированной поверхности в вершине параболоида совпали с данными, приведенными в [17] для обеих моделей гетерогенных каталитических реакций.

Рассматриваемая в данной работе траектория (табл. 1) взята из [18]. Расчетная область представляет собой пространство, заключенное между поверхностями ударной волны, параболоида и поверхностью, образованной нормальными, выходящими из сечения параболоида плоскостью $z = 0,8$. Эта плоскость выбрана так, чтобы по всей траектории (т. е. при заданных α и β) критическая точка попадала в расчетную область. Таким образом, расчет течения многокомпонентной смеси вблизи поверхности эллиптического параболоида в выбранной криволинейной системе координат начинается с критической точки с координатой $\xi^1 = 0$ и заканчивается в заданном сечении, совпадающем с координатной линией $\xi^1 = 1$.

На рис. 1 представлены результаты расчетов температуры поверхности в критической точке при движении параболоида вдоль траектории для различных случаев протекания гетерогенных каталитических реакций (кривые 1 соответствуют идеально каталитической поверхности, 2 — нейтральной поверхности). Рассматривался спуск по траектории с учетом аэродинамического качества тела (сплошные кривые) и без него ($\alpha = \beta = 0$)

Таблица 1

H , км	t , с	V , м/с	α , град	β , град
122,0	0	7810	34	30
99,7	190	7840	34	24
76,1	430	7680	34	70
65,3	900	6240	32	53
48,4	1470	2724	30	10
46,8	1525	2440	30	17
27,4	1790	985	15	29
21,8	1905	463	10	-10
21,4	1909	454	10	-10

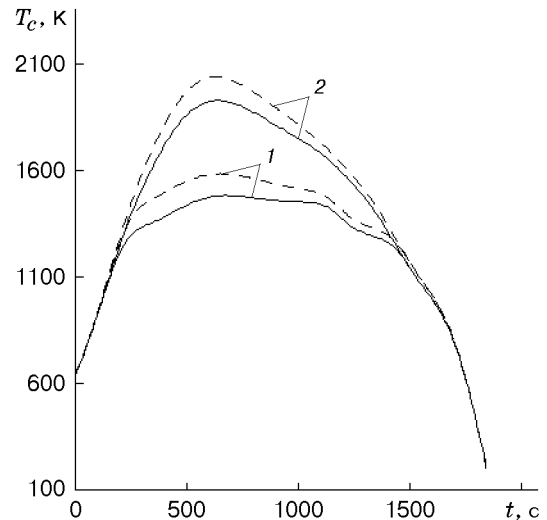


Рис. 1

(штриховые кривые). В последнем случае критическая точка совпадает с вершиной параболоида. Видно, что при реальных значениях углов атаки и скольжения температура в критической точке ниже, максимальное понижение температуры достигает 100–110 К в зависимости от модели гетерогенных каталитических реакций. Так как при ненулевых углах атаки критическая точка не является точкой максимума температуры на поверхности (в отличие от случая $\alpha = 0$), ее нельзя считать характерной в этом смысле.

В табл. 2 приведены значения температуры в критической точке T_c , в самой теплонапряженной точке поверхности T_{\max} и в вершине параболоида T_a в некоторых точках траектории для нейтральной поверхности (модель 1) и идеально каталитической (модель 2). В обеих расчетных моделях максимум характерных температур достигается на высоте примерно 68 км. (В работе [18] приведено наибольшее значение температуры носка фюзеляжа примерно 1920 К.)

Для проектирования представляет интерес среднеинтегральный по поверхности тепловой поток, который вычисляется по формуле

$$q_S = \frac{1}{S} \int q dS = \int_0^{2\pi} \int_0^1 q(\xi^1, \xi^2) \sqrt{g(\xi^1, \xi^2)} d\xi^1 d\xi^2 \left(\int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{g(\xi^1, \xi^2)} d\xi^1 d\xi^2 \right)^{-1},$$

где S — площадь поверхности обтекаемого тела.

Таблица 2

H , км	t , с	T_c , К		T_{\max} , К		T_a , К	
		Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2	Модель 1	Модель 2
98,6	200	1215	1250	1228	1257	1170	1188
78,3	400	1385	1720	1417	1743	1369	1646
68,7	600	1477	1927	1509	1959	1464	1880
67,9	640	1483	1931	1516	1964	1468	1884
66,3	800	1474	1876	1500	1903	1430	1800
63,3	1000	1456	1755	1477	1770	1421	1691
57,0	1200	1372	1587	1385	1599	1347	1537
50,3	1400	1265	1314	1280	1324	1250	1280

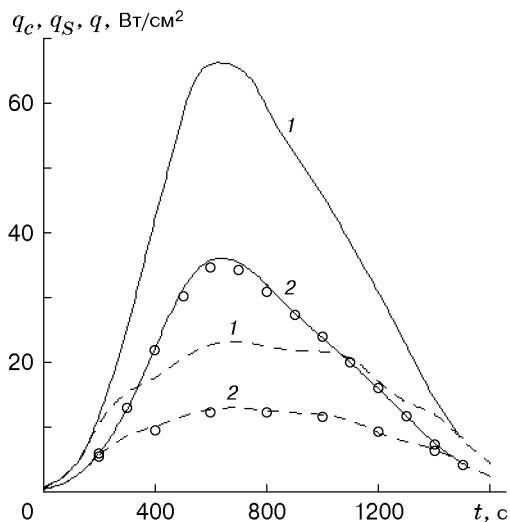


Рис. 2

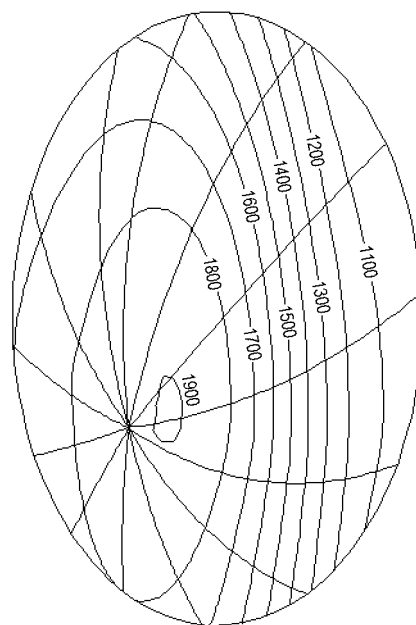


Рис. 3

На рис. 2 представлены зависимости теплового потока в критической точке q_c (кривые 1) и q_s (кривые 2) от времени полета для идеально каталитической (сплошные кривые) и нейтральной (штриховые) поверхностей. Точками на рис. 2 показаны значения $q = Kq_c$, где $K = 0,527$ для идеально каталитической поверхности и $K = 0,556$ для нейтральной. Различие между данной линейной зависимостью q и распределением q_s не превышает 4%. Это объясняется тем, что тепловой поток к поверхности обтекаемого тела, отнесенный к своему значению в критической точке, слабо зависит от определяющих параметров задачи при движении вдоль траектории, как отмечалось в [2–5, 13]. На рис. 2 видно, что положения максимума для всех распределений совпадают ($H \approx 68$ км).

Представление о характере нагрева поверхности и расположении на ней теплонапряженных участков дает рис. 3, на котором приведены проекции изолиний температуры идеально каталитической поверхности параболоида на плоскость декартовых координат (x, y) при $t = 800$ с. Расходящиеся “лучи” являются координатными линиями $\xi^2 = \text{const}$, центр этого пучка — критическая точка. На рис. 3 приведены только две координатные линии $\xi^1 = \text{const}$: критическая точка ($\xi^1 = 0$) и граница расчетной области ($\xi^1 = 1$). Вершина параболоида находится в центре эллипса. Распределение температуры вдоль поверхности обтекаемого тела в любой момент времени спуска по рассмотренной траектории имеет сложный, существенно несимметричный характер. Зона повышенных температур перемещается вместе с критической точкой, хотя последняя и не является точкой максимума этих распределений. Точка максимума сдвигается в сторону максимальной средней кривизны поверхности тела.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Davis R. T.** Numerical solution of the hypersonic viscous shock layer equations // AIAA J. 1970. V. 8, N 5. P. 843–851.
2. **Бородин А. И., Пейгин С. В.** Пространственное обтекание затупленных тел в рамках модели параболизованного вязкого ударного слоя // Мат. моделирование. 1993. Т. 5, № 1. С. 16–25.

3. **Бородин А. И., Пейгин С. В.** Модель параболизированного вязкого ударного слоя для исследования пространственного гиперзвукового обтекания тел потоком вязкого газа // Теплофизика высоких температур. 1993. Т. 31, № 6. С. 925–933.
4. **Бородин А. И., Казаков В. Ю., Пейгин С. В.** Моделирование многокомпонентных химически неравновесных течений в рамках модели параболизированного пространственного вязкого ударного слоя // Мат. моделирование. 1996. Т. 8, № 10. С. 3–14.
5. **Бородин А. И., Пейгин С. В.** Исследование пространственных течений вязкого газа в рамках параболических моделей течения // Теплофизика высоких температур. 1996. Т. 34, № 3. С. 429–435.
6. **Шевелев Ю. Д.** Трехмерные задачи теории ламинарного пограничного слоя. М.: Наука, 1977.
7. **Miner E. W., Lewis C. H.** Hypersonic ionizing air viscous shock-layer flows over nonanalytic blunt bodies. Washington, 1975. (Rep. / NASA; N 2550).
8. **Wilke C. R.** A viscosity equation of gas mixtures // J. Chem. Phys. 1959. V. 18, N 4. P. 517–519.
9. **Mason E. A., Saxena S. C.** Approximate formula for the thermal conductivity of gas mixtures // Phys. Fluids. 1958. V. 1, N 5. P. 361–369.
10. **Svehla R. A.** Estimated viscosities and thermal conductivities of gases at high temperatures. Washington, 1962. (Tech. Rep. / NASA; N R-132).
11. **Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р.** Молекулярная теория газов и жидкостей. М.: Изд-во иностр. лит., 1961.
12. **Гурвич Л. В., Вейц И. В., Медведев В. А. и др.** Термодинамические свойства индивидуальных веществ: Справ. изд. М.: Наука, 1978. Т. 1, кн. 2.
13. **Бородин А. И., Пейгин С. В.** Пространственный тонкий вязкий ударный слой при отсутствии в течении плоскостей симметрии // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1989. № 2. С. 150–158.
14. **Гершбейн Э. А.** Ламинарный многокомпонентный пограничный слой при больших вдувах // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1970. № 1. С. 64–73.
15. **Петухов И. В.** Численный расчет двумерных течений в пограничном слое // Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука, 1964. С. 305–325.
16. **Самарский А. А., Николаев Е. С.** Методы решения сеточных уравнений. М.: Наука, 1978.
17. **Гершбейн Э. А., Крупа В. Г., Щелин В. С.** Пространственный химически неравновесный вязкий ударный слой на каталитической поверхности с учетом сопряженного теплообмена // Изв. АН СССР. Механика жидкости и газа. 1985. № 6. С. 140–146.
18. **Астронавтика и ракетодинамика:** Реф. сб. / ВИНТИ. М., 1974. № 34.

*Поступила в редакцию 9/III 2000 г.,
в окончательном варианте — 7/II 2001 г.*