ПМТФ, № 2, 1964

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖАТОЙ ОБОЛОЧКИ В УСЛОВИЯХ ПОЛЗУЧЕСТИ ПО ГИПОТЕЗЕ УПРОЧНЕНИЯ

А. П. Кузнецов

(*Новосибирск*)

Для описания ползучести алюминиевых сплавов при переменных напряжениях гипотеза упрочнения, использующая уравнение состояния в виде

$$\Phi\ (\sigma_i,\ p_i,\ p_i^{\cdot}) = 0 \quad (p_i^{\cdot} = dp_i/dt)$$

будет более приемлемой, чем гипотеза старения или гипотеза течения.

В работах [1, 2] показано, что принятие гипотезы упрочнения для решения задачи устойчивости стержня позволяет сформулировать критерии устойчивости, по которым критическое время не зависит от величины начального прогиба.

В работе [1] предложена постановка задач устойчивости стержней на основе критерия $\tau^{\cdot} = 0$, где τ — прогиб стержня ($\tau^{\cdot} = d\tau\ /\ dt$). Смысл предложенного критерия состоит в том, что если приложить к первоначально прямолинейному стержню некоторую произвольную нагрузку и затем снять ее, то в зависимости от величины осевой деформации ползучести, наложенной к моменту снятия нагрузки, прогибы стержня будут либо убывать, либо возрастать.

За критический момент времени принимается время, когда для рассматриваемого движения прогибы не убывают и не возрастают, т. е. $\tau^{\cdot} = 0$.

В работе [2] рассматриваются движения стержня под воздействием прикладываемых в различные моменты времени возмущений в виде остаточного прогиба. Оказывается, если приложить возмущения указанного типа до некоторого момента времени, показываемого критическим, то скорость прогиба будет убывать, а если приложить после него, то скорость прогиба будет возрастать. Критическое время определяется условием $\tau^{\cdot\cdot} = 0$.

В данной работе на основе уравнения состояния получено решение задачи устойчивости круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии как по критерию работы [1], так и по критерию работы [2]. При этом получены решения в предположении, что для описания сложного напряженного состояния справедливы соотношения типа теории деформаций и в предположении, что справедливы соотношения типа теории течения.

§ 1. Предположим, что между составляющими тензора деформаций и девиатора напряжений имеют место соотношения теории деформаций

$$\varepsilon_{ij} = \frac{3}{2}\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}\sigma_{ij}^* \qquad \left(\varepsilon_i^2 = \frac{2}{3}\varepsilon_{ij}\varepsilon_{ij}\right) \tag{1.1}$$

Интенсивность деформаций ползучести p_i определим через интенсивность деформаций и интенсивность напряжений соотношением

$$p_i = \varepsilon_i - \frac{\sigma_i}{E} \tag{1.2}$$

Линеаризуя, как и в работе [1], уравнение состояния и уравнение (1.1) по сечению, получим

$$\delta\sigma_i = A\delta\varepsilon_i\ , \qquad \delta\sigma_{ij}^* = \alpha_{ij}^*\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\delta\varepsilon_i + \frac{2}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\delta\varepsilon_{ij} \quad \left(\alpha_{ij}^* = \frac{\sigma_{ij}^*}{\sigma_i}\right) \tag{1.3}$$

Здесь A — оператор.

Запишем уравнения движения оболочки в условиях ползучести, вводя в произвольный момент времени $t = t^*$ начальные возмущающие смещения u°, v°, w°.

Для усилий и моментов оболочки толщиной $2h$ с учетом уравнения (1.4) для T_1, T_2, S, M_1, M_2, H получим известные выражения, из которых приводим только первые

$$T_1 = 2h\left[\alpha_{11}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right) Q\ (u - u^\circ, v - v^\circ, w - w^\circ) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(u_x - u_x^\circ + \frac{v_y - v_y^\circ}{2} + \frac{w - w^\circ}{R}\right)\right] \qquad (1.4)$$

$$M_1 = -\frac{2}{3}h^3\left[\alpha_{11}\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda\,(w - w^\circ) + \right.$$
$$\left. + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\left(w_{xx} - w_{xx}^\circ + \frac{w_{yy} - w_{yy}^\circ}{2}\right)\right] \qquad (1.5)$$

Здесь

$$Q\ (u - u^\circ, v - v^\circ, w - w^\circ) = \alpha_{11}\,(u_x - u_x^\circ) + \alpha_{22}\,(v_y - v_y^\circ) +$$
$$+ \alpha_{22}\,(w - w^\circ)\,/\,R + \alpha_{12}\,(u_y - u_y^\circ + v_x - v_x^\circ)$$
$$\Lambda = \alpha_{11}\frac{\partial^2}{\partial x^2} + 2\alpha_{12}\frac{\partial}{\partial x\,\partial y} + \alpha_{22}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad \alpha_{ij} = \frac{\sigma_{ij}}{\sigma_i}$$

Уравнения движения оболочки без учета инерционных членов имеют вид

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} + \frac{\partial S}{\partial y} = 0, \qquad \frac{\partial T_2}{\partial y} + \frac{\partial S}{\partial x} = 0 \qquad (1.6)$$

$$-\frac{T_2}{R} + \frac{\partial^2 M_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 M_2}{\partial y^2} + 2\frac{\partial^2 H}{\partial x\,\partial y} + T_1^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + T_2^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + 2S^\circ\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} = 0$$

Введем функцию напряжений Φ, полагая

$$T_1 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial y^2}, \qquad T_2 = \frac{\partial^2\Phi}{\partial x^2}, \qquad S = -\frac{\partial^2\Phi}{\partial x\,\partial y}$$

Применяя операторы

$$\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}, \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}, \qquad -3\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$$

соответственно к первому, второму и третьему соотношениям (1.4) и складывая их, получим уравнение

$$\triangle\triangle\Phi = 2h\left[\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda_1 Q + \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\frac{w_{xx} - w_{xx}^\bullet}{R}\right] \qquad (1.7)$$

где

$$\Lambda_1 = \alpha_{11}\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial x^2}\right) + \alpha_{22}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{1}{2}\frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) - 3\alpha_{12}\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y}$$

Умножая первые три уравнения (1.4) на $\alpha_{11} - {}^1/_2\alpha_{22}$, $\alpha_{22} - {}^1/_2\alpha_{11}$, $3\alpha_{12}$ соответственно и складывая их, получим уравнение

$$\Lambda_1\Phi = 2hA\,Q \qquad (1.8)$$

Исключая Q из уравнений (1.7) и (1.8) и вводя Φ и соотношения (1.4) в третье уравнение (1.6), получим для оболочки в условиях ползучести систему из двух уравнений

$$\Lambda_1\Lambda_1\Phi = A\left[\frac{\varepsilon_i}{\sigma_i}(\Lambda_1\Lambda_1\Phi - \triangle\triangle\Phi) + 2h\frac{w_{xx} - \overset{\circ}{w}_{xx}}{R}\right] \tag{1.9}$$

$$\frac{\Phi_{xx}}{R} + \frac{2h^3}{3}\left[\left(A - \frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\right)\Lambda\Lambda(w - w^\circ) + \frac{4}{3}\frac{\sigma_i}{\varepsilon_i}\triangle\triangle(w - w^\circ)\right] - 2h\sigma_i\Lambda w = 0$$

Для уравнения состояния в виде

$$\dot{p}_i = A\sigma_i{}^n p_i{}^{-\alpha} \tag{1.10}$$

уравнения (1.9) в случае круговой цилиндрической оболочки при продольном сжатии в дифференциальной форме, получаемой после раскрытия оператора A, будут иметь вид

$$\left(\frac{\alpha}{\xi} + n + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Lambda_1\Lambda_1\Phi - \left(\frac{\alpha}{\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[(1 + \xi)(\Lambda_1\Lambda_1\Phi - \triangle\triangle\Phi) + \right.$$

$$\left. + \frac{2Eh}{R}(w_{xx} - \overset{\circ}{w}_{xx})\right] = 0 \qquad \left(\xi = \frac{Epi}{\sigma_i}\right)$$

$$\left(\frac{\alpha}{\xi} + n + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\left[\frac{\Phi_{xx}}{R} - \frac{2Eh^3}{3}\frac{1}{1+\xi}\left(\Lambda\Lambda - \frac{4}{3}\triangle\triangle\right)(w - w^\circ) - \right.$$

$$\left. - 2h\sigma_i\Lambda w\right] + \frac{2Eh^3}{4}\left(\frac{\alpha}{\xi} + \frac{\partial}{\partial\xi}\right)\Lambda\Lambda(w - w^\circ) = 0 \tag{1.11}$$

В отличие от работы [3], в уравнениях (1.11) при дифференцировании учитывается переменность p_i.

Определим границу устойчивости, пользуясь предложенным в работе [1] критерием $\dot{\tau} = 0$. Для оболочки в качестве критерия устойчивости в этом случае примем условие $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$, т. е. условие равенства нулю вектора скорости смещения. Так как в уравнениях (1.11) вместо u и v введена функция Φ, необходимо найти условия, которые должны быть наложены на Φ, для того чтобы выполнялись соотношения $\dot{u} = \dot{v} = 0$. Из (1.4) при $\dot{u} = \dot{v} = \dot{w} = 0$ следуют условия

$$\frac{\partial}{\partial t}[\varepsilon_i(\delta\sigma_{ij}{}^* - \alpha_{ij}{}^*\delta\sigma_i)] = 0 \tag{1.12}$$

из которых после перехода к функции Φ получим уравнения

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_i\Phi_{yy} - \alpha_{11}\int_{-h}^{h}\delta\sigma_i\,dz\right) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial t}\left(\varepsilon_i\Phi_{xx} - \alpha_{22}\int_{-h}^{h}\delta\sigma_i\,dz\right) = 0 \tag{1.13}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(-2\varepsilon_i\Phi_{xy} - 2\alpha_{12}\int_{-h}^{h}\delta\sigma_i\,dz\right) = 0$$

Дважды дифференцируя первое из уравнений (1.13) по x, второе уравнение — дважды по y, а третье — по x и y и складывая их, найдем

$$\frac{\partial}{\partial t}\Lambda\int_{-h}^{h}\delta\sigma_i\,dz = 0 \tag{1.14}$$

Будем полагать, что функция Φ может быть представлена в виде; $\Phi = \rho(t)\,\Phi_1(x, y, z)$; из (1.14) и (1.13) получим условие $\partial(\varepsilon_i, \Phi)/\partial t = 0$.

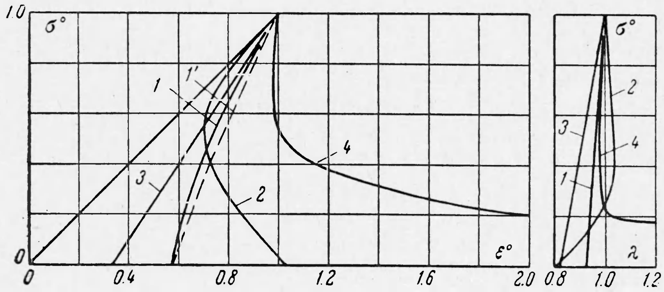
Рассмотрим сначала случай симметричной потери устойчивости, когда w и Φ зависят лишь от координаты x. Считая оболочку достаточно длинной, решение будем искать в виде

$$w = \tau(\xi)\sin(\pi x/l), \qquad \Phi = \rho(2Eh/R)(l^2/\pi^2)\sin(\pi x/l)$$

Условия для границы устойчивости будут иметь следующий вид:

$$\tau^{\cdot}=0,\qquad (1+\xi)\,\rho^{\cdot}+\rho=0 \tag{1.15}$$

Полагая $w^\circ=0$ в уравнениях (1.11) и используя (1.15), получим систему двух однородных линейных уравнений с неизвестными τ и ρ.



Фиг. 1

Приравнивая нулю определитель этой системы, получим уравнение

$$\frac{\alpha}{\xi}\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\alpha}{\xi}+n-\frac{1}{1+\xi}\right)\lambda^4-\frac{1}{2}\sigma^\circ\lambda^2\left(\frac{\alpha}{\xi}+n\right)\left[3\frac{\alpha}{\xi}+\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\alpha}{\xi}+n-\frac{1}{1+\xi}\right)\right]+$$

$$+\frac{1}{16}\left[3\frac{\alpha}{\xi}+\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\alpha}{\xi}+n-\frac{1}{1+\xi}\right)\right]^2=0 \tag{1.16}$$

$$\left(\lambda^2=\frac{l^2}{l_e^2}=\frac{3l^2}{2Rh\pi^2},\quad \sigma^\circ=\frac{\sigma}{\sigma_e},\quad \sigma_e=\frac{4Eh}{3R}\right)$$

Из уравнения (1.16) при заданных постоянных α и n нужно найти, меняя λ, наименьшее значение ξ. Это значение будет определяться формулой

$$\sigma^{\circ 2}=\left[\frac{\alpha}{\xi}\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\alpha}{\xi}+n-\frac{1}{1+\xi}\right)\right]\left(\frac{\alpha}{\xi}+n\right)^{-2} \tag{1.17}$$

На фигуре кривая $1'$ получена согласно (1.17) при $\alpha=1$, $n=3$. По горизонтальной оси фигуры отложена величина σ°, а по вертикальной оси

$$\varepsilon^\circ=\frac{E\varepsilon_i}{\sigma_e}=(1+\xi)\,\sigma^\circ$$

Пунктирной кривой $1'$ показана граница устойчивости, полученная в работе [3], в которой при выводе критерия устойчивости не учитывалось изменение p со временем.

Как видно из графика, учет изменения p со временем в рассматриваемом случае приводит к незначительной поправке.

Рассматривая общий случай потери устойчивости, будем искать решение в виде

$$w=\tau\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{my}{R},\qquad \Phi=\rho\,(2Eh/R)\sin\frac{\pi x}{l}\sin\frac{my}{R}$$

Полагая, как и ранее, $\tau^{\cdot}=0$ и $\rho^{\cdot}=-\rho/(1+\xi)$, для ξ получим уравнение

$$B(\xi)\,\alpha\xi^{-1}\psi^2+[\alpha\xi^{-1}(1-\varphi^2)+B(\xi)\,\varphi^2]\,[{}^1/_3\,(\alpha\xi^{-1}-B(\xi))\,(1+\varphi)^2+$$

$$+B(\xi)-(\alpha\xi^{-1}+n)\,2\sigma^\circ\psi]=0 \tag{1.18}$$

Здесь

$$B(\xi)=\frac{1}{1+\xi}\left(\frac{\alpha}{\xi}+n-\frac{1}{1+\xi}\right),\quad q^2=\frac{2}{3}\frac{h}{R}m^2$$

$$\varphi=\frac{1-2\lambda^2q^2}{2(1+\lambda^2q^2)},\qquad \psi=\frac{\lambda^2}{(1+\lambda^2q^2)^2}$$

При всех значениях $0\leqslant\sigma^\circ<1$ величина ξ в формуле (1.18) достигает наименьшего значения при $\varphi=1/2$, что соответствует симметричной форме потери устойчивости.

§ 2. Найдем границу устойчивости для сжатой оболочки, используя предложенный в работе [2] критерий $\tau^{\cdot\cdot}=0$. Воспользуемся уравнениями, полученными в предыдущем параграфе. Подставляя $\xi=\xi^*$ в уравнения (1.11), получим два уравнения, содержащие ξ^*.

Дифференцируя (1.11) по ξ и подставляя в них $\xi=\xi^*$, будем иметь еще два уравнения.

Два уравнения получим, используя уравнения, описывающие начальное состояние оболочки в момент времени $t=t^*$, когда $\xi=\xi^*$

$$\triangle\triangle\Phi^*-\frac{2Eh}{R}(w_{xx}{}^*-w_{xx}{}^\circ)=0,$$

$$\frac{\Phi_{xx}{}^*}{R}+\frac{8Eh^3}{R}\triangle\triangle(w^*-w^\circ)-2h\sigma_i\Lambda w^*=0 \tag{2.1}$$

Накладывая на прогиб условие $w^{\cdot\cdot}=0$ при $\xi=\xi^*$, получим вместе с другими шестью уравнениями систему семи однородных уравнений с семью неизвестными, содержащую в качестве параметра ξ^*.

Заметим, что при использовании критерия работы [2] достаточно накладывать условие лишь на w. На Φ никаких условий накладывать не требуется.

Для случая симметричной потери устойчивости оболочки, сжатой продольными напряжениями, будет разыскивать решение системы в виде

$$w=\tau_1\sin\frac{\pi x}{l},\qquad w_\xi=\tau_2\sin\frac{\pi x}{l},\qquad w_{\xi\xi}=\tau_3\sin\frac{\pi x}{l},\qquad w^\circ=\tau^\circ\sin\frac{\pi x}{l}$$

$$\Phi=\rho_1\sin\frac{\pi x}{l},\qquad \Phi_\xi=\rho_2\sin\frac{\pi x}{l},\qquad \Phi_{\xi\xi}=\rho_3\sin\frac{\pi x}{l}$$

Приравнивая нулю определитель системы, получим уравнение

$$\sigma^\circ=\frac{D_1(\xi^*)\lambda^8+D_2(\xi^*)\lambda^4+D_3(\xi^*)}{D_4(\xi^*)\lambda^6+D_5(\xi^*)\lambda^2} \tag{2.2}$$

где D_1, D_2, D_3, D_4, D_5 находятся при раскрывании определителя.

Для каждого значения σ°, меняя λ, можно получить наименьшее значение ξ^*.

На фигуре 1 кривая *2* показывает вычисленную по формуле (2.2) зависимость ξ^* от σ° для $\alpha=1$, $n=3$.

§ 3. Запишем уравнение состояния в виде

$$p_i=g(p_i,\sigma_i)\sigma_j \tag{3.1}$$

и предположим, что между составляющими тензора скоростей деформаций ползучести $p_{ij}^{\cdot}$ и составляющими девиатора напряжений $\sigma_{ij}{}^*$ имеют место соотношения теории течения

$$p_{ij}^{\cdot}=\frac{3}{2}g(p_i,\sigma_i)\sigma_{ij}{}^*,\ p_{ij}=\varepsilon_{ij}-\frac{1}{G}\sigma_{ij}{}^* \tag{3.2}$$

Интенсивности напряжений и скоростей деформаций ползучести выражаются так

$$\sigma_i^2 = \frac{3}{2}\sigma_{ij}^*\sigma_{ij}^*, \qquad p_i^{\cdot 2} = \frac{2}{3}p_{ij}^{\cdot}p_{ij}^{\cdot}, \qquad p_i = \int_0^t p_i^{\cdot}\,dt \tag{3.3}$$

Варьируя (3.1) и (3.2), получим уравнения для малых приращений по толщине оболочки δp, $\delta\sigma$, $\delta\varepsilon$

$$\delta p_i^{\cdot} = a\delta p_i + g\,(b+1)\,\delta\sigma_i \quad \left(\alpha = \sigma_i\frac{\partial g}{\partial p_i}, \qquad b = \frac{\sigma_i}{g}\frac{\partial g}{\partial \sigma_i}\right)$$

$$\delta\varepsilon_{ij}^{\cdot} - \frac{1}{2G}\delta\sigma_{ij}^{\cdot *} = \frac{3}{2}g\delta\sigma_{ij}^* + \frac{3}{2}\alpha_{ij}^*\,(a\delta p_i + gb\delta\sigma_i) \tag{3.4}$$

Для того чтобы определить критическую деформацию оболочки по критерию $\tau^{\cdot} = 0$, рассмотрим, следуя [4], движение оболочки в условиях ползучести после воздействия некоторого возмущения, вызвавшего к моменту времени, при котором $p_i = p_i^*$, некоторые смещения w^*, u^*, v^* и деформацию ползучести δp_i^* и выделим начальные возмущения, для которых при некотором значении p_i обращается в нуль вектор скорости смещения. Переходя к переменной p_i и интегрируя при начальных условиях

$$\delta p_i = \delta p_i^*, \qquad \delta\sigma_{ij}^* = \delta\sigma_{ij}^{**} \quad \text{при } p_i = p_i^*$$

найдем, что

$$\delta p = \frac{g}{g^*}\delta p^* + \frac{g}{\sigma_i}\int_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}\delta\sigma_i\,dp \tag{3.5}$$

$$\delta\sigma_{ij}^* = \delta\sigma_{ij}^{**}e^{\xi^*-\xi} + \frac{2}{3}Ee^{-\xi}\int_{p^*}^{p}e^{\xi}\frac{\partial\varepsilon_{ij}}{\partial p}\,dp - \tag{3.6}$$

$$-\alpha_{ij}^*Ee^{-\xi}\int_{p^*}^{p}e^{\xi}\left[\frac{a}{g^*}\delta p^* + b\delta\sigma_i + \frac{a}{\sigma_i}\int_{p^*}^{p}\frac{1+b}{g}\delta\sigma_i\,dp\right]\frac{dp}{\sigma_i}$$

$$(\xi^* = Ep_i^*/\sigma_i, \quad p = p_i, \quad p^* = p_i^*, \quad \delta p^* = \delta p_i^*)$$

Используя соотношения (3.6), можно найти выражения моментов и усилий G_1, G_2, H, N_1, N_2, S в оболочке толщиной

$$G_1 = G_1^*e^{\xi^*-\xi} - \frac{EP^*}{g^*}\alpha_{11}e^{-\xi}\int_{p^*}^{p}e^{\xi}\frac{\partial g}{\partial p}\,dp - \tag{3.7}$$

$$-e^{-\xi}\int_{p^*}^{p}e^{\xi}\left[\frac{D}{2}\frac{\partial}{\partial p}(2w_{xx} + w_{yy}) + \alpha_{11}EL\,(M)\right]dp$$

$$(G_2 = \ldots, \quad H = \ldots)$$

$$N_1 = N_1^*e^{\xi^*-\xi} - \frac{EQ^*}{g^*}\alpha_{11}e^{-\xi}\int_{p^*}^{p}e^{\xi}\frac{\partial g}{\partial p}\,dp + \tag{3.8}$$

$$+\frac{4}{3}Ehe^{-\xi}\int_{p^*}^{p}e^{\xi}\left[\frac{\partial}{\partial p}\left(2u_x + v_y + \frac{w}{R}\right) - \frac{3}{4h}\alpha_{11}L\,(N)\right]dp$$

$$(N_2 = \ldots, \quad S = \ldots)$$

Здесь

$$N = (\alpha_{11} - {}^1/_2\alpha_{22}) N_1 + (\alpha_{22} - {}^1/_2\alpha_{11}) N_2 + 3\alpha_{12}S$$

$$L(M) = \frac{b}{\sigma_i} M + \frac{a}{\sigma_i^2} \int\limits_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} M\, dp$$

$$M = (\alpha_{11} - {}^1/_2\alpha_{22}) G_1 + (\alpha_{22} - {}^1/_2\alpha_{11}) G_2 + 3\alpha_{12}H$$

$$P^* = \int\limits_{-h}^{h} \delta p^* z dz, \qquad Q^* = \int\limits_{-h}^{h} \delta p^*\, dz$$

Введем снова функцию Ф. Применив те же операторы, что и в § 2, к первому, второму и третьему уравнениям (3.8) и сложив их, получим уравнение движения цилиндрической оболочки

$$\Delta\Delta\Phi = \left[N_{1yy}^* - \frac{1}{2} N_{1xx}^* + N_{2xx}^* - \frac{1}{2} N_{2yy}^* - 3S_{xy}^*\right] e^{\xi^*-\xi} - \tag{3.9}$$

$$- \frac{E\Lambda_1(Q^*)}{g^*} e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \frac{\partial p}{\partial p} dp + \frac{2Eh}{R} e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \frac{\partial w_{xx}}{\partial p} dp - Ee^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} L(\Lambda_1\Lambda_1\Phi)\, dp$$

Из третьего уравнения устойчивости (1.6) после подстановки соотношений (3.7) получим, исключая M, второе уравнение движения оболочки

$$\frac{1}{D} e^{\xi^*-\xi} (G_{1xx}^* + 2H_{xy}^* + G_{2yy}^*) - \frac{E\Lambda(P^*)}{g^*D} e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \frac{\partial g}{\partial p} + \frac{2h\sigma_i}{D} \Lambda w - \frac{\Phi_{xx}}{DR} -$$

$$- e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\Delta\Delta \frac{\partial w}{\partial p} + \frac{Eb}{\sigma_i} T + \frac{Ea}{\sigma_i^2} \int\limits_{p^*}^{p} \frac{1+b}{g} T\, dp\right] dp = 0 \tag{3.10}$$

$$T = \frac{1}{D} e^{\xi^*-\xi} \Lambda M^* - \frac{1}{D} e^{\xi^*-\xi} (G_{1xx}^* + 2H_{xy}^* + G_{2yy}^*) -$$

$$- \frac{2h\sigma_i}{D} \Lambda w + \frac{\Phi_{xx}}{DR} + e^{-\xi} \int\limits_{p^*}^{p} e^{\xi} \left[\Delta\Delta \frac{\partial w}{\partial p} - \frac{3}{4} \Lambda\Lambda \frac{\partial w}{\partial p}\right] dp$$

Рассматривая начальные возмущения, получаемые в результате ползучести под действием внешних нагрузок, после варьирования второго из соотношений (3.3), получим

$$\delta p_i^* = \alpha_{ij}^* \delta p_{ij}^* \tag{3.11}$$

Пользуясь соотношениями (3.11), находим выражения для P^* и Q^*

$$P^* - {}^2/_3 h^3 \Lambda w^* - M^*/E$$

$$Q^* = 2h\, [\alpha_{11} u_x^* + \alpha_{12} (u_y^* + v_x^*) + \alpha_{22} (v_y + w^*/R)] - N^*/E \tag{3.12}$$

Выразим начальные значения моментов и сил через перемещения формулами

$$G_1^* = -{}^1/_2 kD\, (2w_{xx}^* + w_{yy}^*), \qquad N_1^* = {}^4/_3 k_1 Eh\, (2u_x^* + v_y^* + w^*/R)$$

$$(G_2^* = \ldots,\ H^* = \ldots,\ N_2^* = \ldots,\ S^* = \ldots) \tag{3.13}$$

Формулы (3.13) удовлетворяют условиям равновесия и отличаются от упругих соотношений для сил и моментов только коэффициентами k и k_1, учитывающими релаксацию за счет начальной ползучести. Из уравнений (3.8), (3.12) и (3.13) получим

$$Q^* = \frac{\Lambda_1\Phi^*}{E}\left(\frac{1}{k_1} - 1\right), \qquad M^* = -\frac{3}{4} Dk\Lambda w^* \tag{3.14}$$

Соотношения (3.12) — (3.14) будут начальными условиями, определяющими движение оболочки.

Критическое значение p_i по критерию [1] найдем, потребовав, чтобы в начальный момент движения после воздействия возмущений при $p_i = p_i^*$, как и в § 1, выполнялись бы условия $u^{\cdot} = v^{\cdot} = w^{\cdot} = 0$.

В результате находим, что на Φ в этом случае должно быть наложено условие $\partial(e^{\xi}\Phi) / \partial t = 0$.

В (3.9) и (3.10) положим $p_i = p_i^*$; тогда получим уравнения

$$\triangle\triangle\Phi^* = 2Eh\frac{w_{xx}^*}{R}k_1, \qquad k\triangle\triangle w^* - \frac{2h\sigma_i}{D}\Lambda w^* + \frac{\Phi_{xx}^*}{DR} = 0 \tag{3.15}$$

Дифференцируя уравнения (3.9) и (3.10) по p и подставляя в них $p = p^*$ и условия границы устойчивости

$$\left(\frac{\partial w}{\partial p}\right)^* = 0, \qquad \left(\frac{\partial \Phi}{\partial p}\right)^* = -\frac{E}{\sigma_i}\Phi^*$$

получим условия устойчивости

$$\left(\frac{1}{k_1} - 1\right)\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)^* + E\left(\frac{\partial g}{\partial \sigma_i}\right)^* = 0 \tag{3.16}$$

$$\frac{2}{3}Eh^3\left[\frac{\sigma_i}{Eg^*}\left(\frac{\partial g}{\partial p}\right)^*(1 - k) + bk\right]\Lambda w^* + 2h\sigma_i w^* = 0$$

Уравнения (3.15), (3.16) совместно с условиями на контуре оболочки дают возможность определить собственные функции Φ^* и w^* и собственные значения k и k_1. Задавая начальные условия путем наложения некоторых условий на k и k_1, получим границу устойчивости.

Рассматривая симметричный случай потери устойчивости при продольном сжатии, будем разыскивать w^* и Φ^* в виде синусоиды. Уравнения (3.15) дадут систему однородных уравнений, приравняв нулю определитель которой, получим

$$k_1\lambda^4 - 2\sigma^\circ\lambda^2 + k = 0 \tag{3.17}$$

Для уравнения состояния в форме (1.13) условия устойчивости (3.16) примут вид

$$k_1[\alpha + (n-1)\xi^*] - \alpha = 0$$

$$k[\alpha + (n-1)\xi^*] - \alpha + {}^8/_3\lambda^2\xi^*\sigma^\circ = 0 \tag{3.18}$$

Определим критическое значение ξ^* из условия максимума k и k_1, т. е. из условий наименьшей начальной деформации ползучести. Из (3.17) следует, что в точке, где k и k_1 достигают максимума, выполняются соотношения

$$k_1\lambda^2 = \sigma^\circ, \qquad k = \sigma^\circ\lambda^2 \tag{3.19}$$

Решая систему уравнений (3.18) и (3.19), находим для ξ^*

$$\sigma^\circ = \frac{\alpha}{\sqrt{[\alpha + (n-1)\,\xi^*]\,[\alpha + (n-1)\,\xi^* + {}^8/_3\xi^*]}} \tag{3.20}$$

Зависимость (3.20) для $\alpha = 1$, $n = 3$ на фигуре показана кривой 3. Рассматривая общий случай потери устойчивости, получим уравнения

$$k_1\psi^2 - 2\sigma^\circ\psi + k = 0, \qquad k_1\,[\alpha + (n-1)\,\xi^*] - \alpha = 0 \tag{3.21}$$

$$k\,[\alpha + (n-1)\,\xi^*] - \alpha + 6\,\frac{\psi}{(1+\varphi)^2}\,\xi\sigma^\circ = 0$$

Определяя, как и ранее, границу устойчивости по максимуму k и k_1, из уравнений (3.21) находим, что в случае симметричной потери устойчивости ε° будет наибольшим.

Изложенное выше определение границы устойчивости весьма условно, так как из анализа уравнений (3.17) и (3.18) следует, что, действуя различными начальными возмущениями в начальный момент времени, т. е. задавая различные k и k_1, можно получить разные границы устойчивости и получить в том числе случай, когда устойчивость по указанному критерию будет теряться сразу же после приложения нагрузки.

Устойчивость оболочки по критерию $\tau^{\cdot\cdot} = 0$ при соотношениях для сложного напряженного состояния в виде теории течения рассмотрена в работе [5]. Для определения границы устойчивости в этом случае, как и в § 2, налагаются условия лишь на прогиб и не накладывается никаких условий на функцию напряжений. На фигуре кривая *4* показывает границу устойчивости, полученную в [5] для $\alpha = 1$, $n = 3$. Эта граница дает наибольшие значения критического времени.

В правой части фигуры приведены значения λ, получающиеся при определении ξ^*. Как видно, при потере устойчивости в условиях ползучести длина волны при всех напряжениях незначительно отличается от длины волны при потере устойчивости упругой оболочки.

В заключение автор благодарит Ю. Н. Работнова и Л. М. Куршина за внимание к работе.

Поступила 22 VI 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н., Шестериков С. А. Устойчивость стержней и пластинок в условиях ползучести. ПММ, 1957, т. XXI, вып. 3.
2. Куршин Л. М. Устойчивость стержней в условиях ползучести. ПМТФ, 1961, № 6.
3. Кузнецов А. П., Куршин Л. М. Решение некоторых задач устойчивости пластин и оболочек в условиях ползучести по теории упрочнения. ПМТФ, 1960, № 4.
4. Куршин Л. М. К решению задач устойчивости пластин в условиях ползучести по квазистатической теории. ПМТФ, 1962, № 5.
5. Кузнецов А. П., Куршин Л. М. Устойчивость круговых цилиндрических оболочек в условиях ползучести. ПМТФ, 1962, № 3.