

**О ВЫПАДЕНИИ ЧАСТИЦ ЗАГРЯЗНЯЮЩИХ ВЕЩЕСТВ
ИЗ ОБЛАКА БОЛЬШОГО РАЗМЕРА
В УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ АТМОСФЕРЕ**

УДК 530.17

К. О. Сабденов, С. В. Зубков

Томский государственный университет, 634050 Томск

Данная работа возникла в связи с экологическими проблемами. Катастрофы на химических комбинатах, атомных электростанциях приводят к выбросу в атмосферу значительного количества вредных для всего живого веществ. Аналогичная ситуация возникает при наземных испытаниях крупногабаритных ракетных двигателей на твердом топливе, проводимых во многих странах. Характерной чертой перечисленных процессов является то, что выброшенные в атмосферу в большом количестве и за короткое время загрязняющие вещества представляют собой облако, которое под действием сил Архимеда поднимается на высоту, обычно называемую высотой зависания облака. Как правило, облако содержит жидкие и твердые частицы (примеси), размеры и массы которых намного превышают аналогичные характеристики молекул газов, составляющих воздух, и выброшенного продукта. Для расчета выпавших на поверхность земли примесей к настоящему времени сформулированы две основные теории: диффузионная и гравитационная [1]. Первая строится по аналогии с кинетической теорией газов, вторая рассматривает движение совокупности частиц как движение жидкости в поле сил тяжести. В литературе не указывается на пределы применимости той или иной теории, но ясно, что должен существовать параметр, который определял бы законность применения вышеуказанных теорий в зависимости от конкретных ситуаций.

Заметим, что существует параметр, называемый индексом инерционности [2]. Он представляет собой произведение характерной частоты турбулентных пульсаций потока газа и характерного времени относительного изменения скорости частицы при вязком (стоксовом) обтекании газом. Индекс инерционности, хотя и возникает при общем рассмотрении движения частицы в турбулентной среде под действием сил тяжести как важнейший параметр, на самом деле не определяет границы применения диффузионной теории и гравитационной. Это видно из того, что в индекс инерционности не входит ускорение свободного падения. Индекс инерционности определяет близость численных значений коэффициентов турбулентной диффузии частиц и газовой (жидкой) среды [2].

Легко видеть, что необходимым вышеуказанным параметром является отношение v_*/u' (v_* — скорость падения частицы в ламинарной среде, u' — среднеквадратичное значение пульсации скорости газа). Оно характеризует отношение силы тяжести F_g и силы вязкого сопротивления F_t при случайно меняющейся скорости обдува частицы. Здесь $F_g \sim d^3 \rho_p g$; $F_t \sim \nu_g d \rho_g u'$; d — характерный размер частицы; ρ_p — плотность вещества частицы; g — ускорение свободного падения; ν_g — кинематическая вязкость газа; ρ_g — плотность газа.

Если $v_*/u' \gg 1$, то частицы оседают на поверхность земли по гравитационному механизму. Диффузионный разброс траектории частиц относительно мал. Если $v_*/u' \ll 1$, то турбулентная диффузия становится определяющей. Очевидно, в указанное отношение

скоростей входит индекс инерционности.

Для турбулентных течений вместо u' можно взять v_g — среднюю скорость потока (в данной работе это средняя скорость ветра). При достаточно малых скоростях ветра (при заданном v_*) турбулентный перенос частиц несуществен.

В настоящей работе гравитационная теория применяется в несколько специфической форме: движение частиц от облака до поверхности земли рассматривается не как движение жидкости (для этого частицы должны достаточно сильно взаимодействовать между собой), а как движение с заданным полем скоростей. Физико-математическое содержание модели аналогично сути таких природных явлений, как выпадение снега, дождя или града. Ее простота позволяет быстро получить (пусть даже грубые) данные об уровне загрязнения поверхности земли в случае относительно тихой погоды, что немаловажно для принятия решения в случае аварии на химических комбинатах или атомных электростанциях.

Дальнейшие рассуждения основаны на предположении, что в области выброса облака газа и частиц поверхность земли гладкая и однородная, так что в случае малых скоростей ветра слой атмосферы над поверхностью земли можно считать устойчиво стратифицированным.

Решение задачи об эволюции такого облака позволило бы более или менее точно оценить реальные масштабы катастрофы и принять действенные меры как в предотвращении аварии, так и при ликвидации ее последствий в условиях, указанных выше.

1. Эволюция турбулентного облака большого размера в устойчиво стратифицированной атмосфере. Выброшенное за короткое время в атмосферу облако представляет собой перемешанную жидкость. Оно расплывается (коллапсирует) под действием движущих сил интрузии [3, 4]. Если характерное время выпадения частиц много больше характерного времени образования облака и поднятия на высоту зависания, то можно считать, что облако мгновенно поднялось на высоту зависания. Физический механизм интрузии экспериментально изучен в [3] и подробно изложен в [4]. В [3] отмечены три ярко выраженные стадии коллапса:

- 1) начальная (существенно нестационарная), когда движущая сила интрузии значительно превосходит силы инерции;
- 2) промежуточная, в которой движущая сила интрузии уравнивается сопротивлением формы и волновым сопротивлением;
- 3) конечная, когда движущая сила интрузии уравнивается вязким сопротивлением.

Для облаков перемешанной жидкости малых размеров наиболее длительной стадией является третья, о чем свидетельствуют эксперименты [3, 5]. Малые облака здесь соответствуют числам Рейнольдса Re , много меньшим критического Re_{cr} . Число Рейнольдса на начальном этапе коллапса определяется равенством $Re = NV^{2/3}/\nu$, где N — частота Брента — Вэйсяля (для атмосферы Земли $N = 0,01$ 1/с):

$$N = \left[\frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{dz} \right| g \right]^{1/2};$$

ρ — плотность воздуха; z — координата по вертикали к поверхности земли; V — объем облака; ν — кинематическая вязкость газа облака.

Задача о коллапсе для вязкой стадии в предположении $Re \ll Re_{cr} = 2300$ решена в [6]. Это решение изложено также в [4], а экспериментальное подтверждение результатов

[6] дано в [5]. Для нас представляет интерес случай $Re \gg Re_{cr}$, т. е. предполагается, что аварии на химических комбинатах или атомных электростанциях имеют крупномасштабный характер. Также предполагается, что при больших значениях Re , как и при малых, третья стадия имеет наибольшую длительность.

Согласно сказанному, постановка задачи имеет вид, аналогичный [4]:

$$\frac{\partial h}{\partial t} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r v h = 0; \quad (1.1)$$

$$-\frac{\partial}{\partial r} p h = \tau_*; \quad (1.2)$$

$$p = \rho_1 \frac{N^2}{12} h^2. \quad (1.3)$$

Здесь h — половина толщины облака; r — радиальная координата; v — скорость газа в облаке; p — давление; τ_* — турбулентное напряжение; ρ_1 — плотность газа облака, равная плотности воздуха на высоте зависания.

В отличие от [4], в (1.2) вместо чисто вязкого напряжения взято турбулентное, вид которого легко найти аналогично [4] из анализа размерностей:

$$\tau_* = \rho_1 \alpha^2 v^2 \quad (1.4)$$

(α — эмпирическая постоянная).

Из (1.2)–(1.4) имеем

$$v = \frac{N}{2\sqrt{3}\alpha} \left(\frac{\partial h^3}{\partial r} \right)^{1/2}. \quad (1.5)$$

Подставив последнее в (1.1), после несложных преобразований получим

$$\left(-\frac{\partial h}{\partial r} \right)^{1/2} h^2 \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{t_*} \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial h^5}{\partial r} \right) \quad (t_* = 20\alpha/N). \quad (1.6)$$

Уравнение (1.5) дополняется условием сохранения объема

$$2\pi \int_0^\infty h(r, t) r dr = V = \text{const} \quad (1.7)$$

(V — половина объема облака) и равенством нулю решения на бесконечности

$$h(\infty, t) = 0. \quad (1.8)$$

Условие (1.7) легко обосновать. При больших размерах облака увлечение окружающего газа представляет собой слабый поверхностный эффект порядка $S/2V \sim 1/L$ (S — площадь поверхности облака, L — характерный его размер).

Это рассуждение справедливо для начальной стадии коллапса, когда форма облака близка к сферической и скорость v — относительно большая величина. В более поздние моменты времени v уменьшается. Тенденция к падению скорости следует из параболическости уравнения (1.5) и отсутствия в нем источников членов. Ниже показано, что v уменьшается быстрее $r_0^2(t)$ ($r_0(t)$ — характерный радиус облака в плане). Это оправдывает пренебрежение увлечением облаком окружающего воздуха и в поздние времена.

Решение задачи (1.6)–(1.8) с произвольными начальными условиями находится только численными методами. Но можно ожидать, что по прошествии небольшого времени

коллапс, как и в [3-5], будет протекать в автомодельном режиме. Для получения автомодельного решения сделаем замену переменных: $h = h_0(t)Z(\xi)$, $\xi = r/r_0(t)$, $h_0(t) = (9/4)^{4/9} [\sqrt[3]{V}/(2\pi)^{5/3}] (t_*/(t+t_1))^{4/9}$, $r_0(t) = \sqrt[3]{2\pi V} (4/9)^{2/9} ((t+t_1)/t_*)^{2/9}$ (t_1 — условное время начала автомодельного режима).

Подстановка последних в (1.6)–(1.8) приводит к следующей задаче:

$$Z^2 \left(-\frac{dZ}{d\xi} \right)^{1/2} \left(Z + \frac{\xi}{2} \frac{dZ}{d\xi} \right) + \frac{1}{\xi^2} \frac{d}{d\xi} \left(\xi^2 \frac{dZ^5}{d\xi} \right) = 0; \quad (1.9)$$

$$\int_0^\infty Z(\xi) \xi d\xi = 1, \quad Z(\infty) = 0. \quad (1.10)$$

Анализ уравнения (1.9) показывает, что при $\xi \rightarrow 0$

$$Z(\xi) = C_1 - C_2 \xi^3, \quad (1.11)$$

а с учетом второго условия (1.10) при $\xi \rightarrow \xi_*$

$$Z(\xi) = C_3 (\xi_* - \xi)^{1/3} \quad (1.12)$$

(C_1, C_2, C_3, ξ_* — числа).

Из-за наличия в (1.9) квадратного корня от первой производной функции $Z(\xi)$ считаем, что $Z(\xi)$ должна быть монотонно убывающей функцией на промежутке $[0, \xi_*]$. Учитывая сказанное и асимптотическое поведение (1.11) и (1.12), ищем решение (1.9) в виде

$$Z = a(\xi_*^3 - \xi^3)^{1/3}, \quad a = \text{const}. \quad (1.13)$$

Подставив последнее в (1.9), после простых преобразований получим алгебраическое уравнение $(1 - 20a^{3/2})(\xi_*^3 - (3/2)\xi^3) = 0$, откуда в силу произвольности ξ находим $a = 20^{-2/3} \approx 0,14$.

Первое условие из (1.10) приводит к соотношению

$$\frac{1}{3} a \xi_*^3 \int_0^1 (1-\eta)^{1/3} \eta^{-1/3} d\eta = \frac{a \xi_*^3}{3} B\left(\frac{2}{3}; \frac{4}{3}\right) = 1,$$

где $\eta = \xi/\xi_*$; B — бета-функция Эйлера. Выражая B через Γ (гамма-функцию Эйлера), находим

$$\xi_*^3 = \frac{3 \cdot 20^{2/3} \Gamma(2)}{\Gamma\left(\frac{2}{3}\right) \Gamma\left(\frac{4}{3}\right)} \approx 18,3 \quad \text{или} \quad \xi_* \approx 2,63.$$

Выше отмечено, что скорость v движения газа внутри облака падает быстрее, чем $r_0^2(t)$. Согласно (1.5), $v \sim r/t$. Максимум скорости достигается при $r = \xi_* r_0(t)$. Увлечение воздуха порядка (пульсационная составляющая скорости пропорциональна v) $r_0^2 v \sim r_0^3(t)/t \sim t^{-1/3} \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$.

Таким образом, увлечение окружающего газа падает быстрее, чем успевает измениться характерный размер облака, так что условие постоянства объема (1.7) оправдано и для больших моментов времени.

Аналогично решается и двумерная задача. В этом случае постановка задачи в раз-

мерных переменных имеет вид

$$h^2 \left(-\frac{\partial h}{\partial x} \right)^{1/2} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{1}{i_*} \frac{\partial^2 h^5}{\partial x^2}, \quad t_* = \frac{10\alpha}{N}, \quad \int_0^{\infty} h(x, t) dx = S'/2 = \text{const}, \quad h(\infty, t) = 0.$$

Здесь S' — половина площади поперечного сечения облака; x — координата вдоль поверхности земли, ортогональная оси облака.

Переход к автомодельным переменным осуществляется по соотношениям

$$h = h_0(t)Z(\xi), \quad \xi = \frac{x}{x_0(t)}, \quad h_0(t) = \frac{\sqrt{S'}}{\sqrt[3]{3}} \left(\frac{t_*}{t + t_1} \right)^{1/3}, \quad x_*(t) = \sqrt{S'} \sqrt[3]{3} \left(\frac{t + t_1}{t_*} \right)^{1/3},$$

что приводит к задаче

$$Z^2 \left(-\frac{dZ}{d\xi} \right)^{1/2} \left(Z + \xi \frac{dZ}{d\xi} \right) + \frac{d^2 Z^5}{d\xi^2} = 0, \quad \int_0^{\infty} Z(\xi) d\xi = 1, \quad Z(\infty) = 0.$$

Ее решение дается формулами

$$Z(\xi) = a(\xi_*^3 - \xi^3)^{1/3}, \quad a = 10^{-2/3}, \quad \xi_*^2 = \frac{3 \cdot 10^{2/3} \Gamma\left(\frac{5}{3}\right)}{\Gamma\left(\frac{4}{3}\right) \Gamma\left(\frac{1}{3}\right)}.$$

Загрязнение атмосферы газообразными веществами можно оценить по результатам решенной в этом пункте задачи. Напомним, что изложенная теория справедлива для малых скоростей ветра, когда среднеквадратичное значение пульсационной скорости много меньше скорости v движения границ облака.

2. Модель выпадения на поверхность земли частиц загрязняющих веществ из облака. Как правило, в выброшенном в атмосферу облаке содержатся твердые или жидкие частицы вредных веществ, размеры которых меняются от нескольких единиц до нескольких десятков микрометров. Важной величиной, по которой можно судить об уровне загрязнения поверхности земли, является количество выпавшего осадка на единицу площади $\sigma(x, y)$.

Рассмотрим вначале формулу (1.13). Кривая, задаваемая этой формулой, практически на всем промежутке $[0 \leq \xi \leq \xi_*]$ меняется слабо и лишь вблизи $\xi = \xi_*$ резко обрывается. Это позволяет заменить (1.13) приближенно прямоугольным профилем с высотой $h_0(t)$ и шириной $\xi_* r_0(t)$.

Тогда изменение σ в точке (x, y) в момент времени t можно задать уравнением

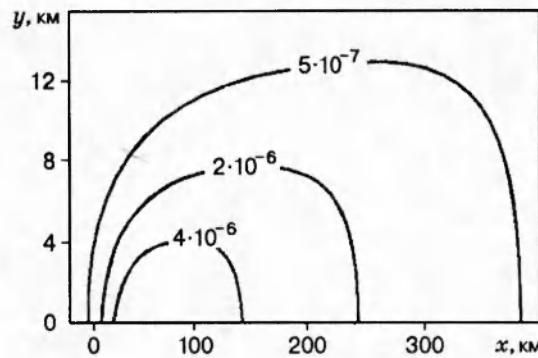
$$d\sigma/dt = j, \quad (2.1)$$

где j — поток частиц из облака: $j = \rho v_* \theta \left[\xi_* r_0(t) - \sqrt{(x - v_1 t)^2 + y^2} \right]$; ρ — плотность частиц в облаке; v_* — характерная скорость выпадения частиц из облака, которая полагается постоянной; $\theta[z]$ — единичная функция Хевисайда:

$$\theta[z] = \begin{cases} 1, & z \geq 0, \\ 0, & z < 0; \end{cases}$$

v_1 — скорость ветра на высоте зависания облака.

Функция Хевисайда фиксирует границу облака в проекции на поверхность земли. Далее, $\rho = M/2V$ (M — общая масса частиц в облаке).



В (2.1) неявно заключено допущение, что частицы в облаке распределены равномерно. Это положение грубое, но оно сильно упрощает модель, так как отпадает необходимость в рассмотрении динамики частиц в облаке. Для M справедливо уравнение

$$\frac{dM}{dt} = -\rho v_* S(t) = -\frac{M}{2V} v_* S(t) \quad (S(t) = \pi \xi_*^2 r_0^2(t)).$$

Последнее уравнение при начальном условии $M = M_0$ при $t = 0$ дает

$$M = M_0 \exp \left\{ -\lambda \left[\left(\frac{t+t_1}{t_*} \right)^{13/9} - \left(\frac{t_1}{t_*} \right)^{13/9} \right] \right\}, \quad \lambda = \frac{v_* t_*}{\sqrt[3]{V}} (2\pi)^{5/3} \frac{9}{52} \left(\frac{4}{9} \right)^{4/9} \xi_*^2 = 17,9 \frac{v_* t_*}{\sqrt[3]{V}}. \quad (2.2)$$

Таким образом, для нахождения $\sigma(t, x, y)$ имеем одно обыкновенное дифференциальное уравнение первого порядка

$$\frac{d\sigma}{dt} = \frac{v_* M}{2V} \theta \left[\xi_* r_0(t) - \sqrt{(x - v_1 t)^2 + y^2} \right]$$

с начальным условием $\sigma(t = 0) = 0$. Здесь M определяется согласно формуле (2.2).

Поставленная задача численно решалась методом Рунге — Кутты — Мерсона. Функция Хевисайда аппроксимировалась выражением $\theta[z] = (1 + e^{-\chi z})^{-1}$, где $1/\chi$ — характерная длина, которую необходимо брать достаточно малой. В проведенных расчетах она полагалась равной 0,1 м. Согласно известной формуле Стокса [7], характерная скорость выпадения частиц в ламинарной среде $v_* = (2/9) \rho_p a_p^2 g / \mu$ (a_p — радиус частиц, μ — динамическая вязкость газа облака).

В случае турбулентной среды последнее выражение должно быть умножено на коэффициент, который учитывал бы временную задержку частиц в облаке. Если следовать авторам [8], то этим коэффициентом является интенсивность турбулентности ϵ в облаке. Такой подход, на наш взгляд, сильно упрощен. Вопрос об указанном коэффициенте остается нерешенным, хотя в расчетах авторы брали ϵ , вполне сознавая грубость (или даже возможную ошибочность) сделанного. Значение ϵ для $Re = 10^6 \div 10^7$ составляет $0,03 \div 0,05$ [7, 8]. Что касается коэффициента ϵ , то из рассуждений авторов [8] видно, что он непосредственно связан с турбулентными диффузионными процессами в облаке. Это означает, что предложенная здесь модель может быть расширена и для тех случаев, когда частицы рассеиваются в пространстве не только посредством механизма интрузии. Облако может активно взаимодействовать с окружающим воздухом. Но этот вопрос пока еще авторами детально не проработан.

В качестве примера на рисунке приведен результат расчета поверхностной концен-

трации σ , кг/м². Численные значения физических параметров взяты в следующем виде: $\rho_p = 3010$ кг/м³, $a_p = 7 \cdot 10^{-6}$ м, $g = 9,81$ м/с², $v_1 = 10$ м/с, $\mu = 1,8 \cdot 10^{-5}$ кг/(м · с), $V = 4,2 \cdot 10^9$ м³, $\alpha = 0,3$, $\varepsilon = 0,03$, $M_0 = 1,8 \cdot 10^4$ кг.

Расчеты также показывают, что наиболее сильно влияющими на $\sigma(x, y)$ размерными параметрами являются v_* и v_1 (точнее, безразмерный комплекс v_*/v_1).

Сделаем несколько замечаний. В практическом приложении изложенной модели необходимо иметь в виду, что частицы, покинув облако, преодолевают еще расстояние от облака до поверхности земли. Поэтому, если за точку выброса считать начало координат, результаты расчетов σ по вышеприведенным уравнениям должны быть смещены на некоторое расстояние x_0 (в самом уравнении для σ этого можно достичь, заменив $x \rightarrow x + x_0$). Расстояние x_0 должно определяться с учетом неравномерности скорости ветра с высотой.

Преимуществом изложенной модели по сравнению с известными являются простота и как следствие наличие всего лишь одного подгоночного параметра — коэффициента при v_* .

В данной работе поверхность земли полагалась гладкой и однородной, что позволяло пренебречь крупномасштабными турбулентными процессами. В противном случае их роль была бы значительной даже в предположении малости скорости ветра, и закон рассеяния частиц отличался бы от полученного выше $r_0 \sim t^{2/9}$.

У человечества имеется большой опыт «общения» с радиоактивными облаками. Но, к сожалению, в открытой печати не приводятся экспериментальные данные об их эволюции, откуда можно было бы определить закон рассеяния, выяснить роль крупномасштабных процессов и проверить справедливость изложенной модели.

В заключение отметим, что в [9] для случаев малых скоростей ветра используется уравнение турбулентной диффузии. Как сказано выше, параметр v_*/u' проводит границу между диффузионной теорией и гравитационной. Подход, развитый в [9], справедлив для достаточно малых размеров частиц при ненулевой скорости ветра.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Теверовский Е. Н., Дмитриев Е. С.** Перенос аэрозольных частиц турбулентными потоками. М.: Энергоатомиздат, 1988.
2. **Медников Е. П.** Турбулентный перенос и осаждение аэрозолей. М.: Наука, 1981.
3. **Wu J.** Mixed region collapse with internal wave generation in a density stratified medium // J. Fluid Mech. 1969. V. 35, N 3. P. 531–544.
4. **Баренблатт Г. И.** Подobie, автомодельность, промежуточная асимптотика. Л.: Гидрометеоздат, 1982.
5. **Зацепин А. Г., Федоров К. Н., Воропаев С. И., Павлов А. М.** Экспериментальное исследование растекания перемешанного пятна в стратифицированной жидкости // Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана. 1978. Т. 14, № 2. С. 234–237.
6. **Баренблатт Г. И.** Динамика турбулентных пятен и интрузии в устойчиво стратифицированной жидкости // Там же. С. 195–206.
7. **Лойцянский Л. Г.** Механика жидкости и газа. Л.: Гидрометеоздат, 1985.
8. **Монин А. С., Яглом А. М.** Статистическая гидромеханика. Ч. 1. М.: Наука, 1965.
9. **Берлянд М. Е.** Современные проблемы атмосферной диффузии и загрязнения атмосферы. Л.: Гидрометеоздат, 1975.

Поступила в редакцию 21/III 1995 г.,
в окончательном варианте — 10/VII 1995 г.