3. **Левицкий С. П., Листров А. Т.** О влиянии вязкоупругих свойств жидкости на динамику малых колебаний газового пузырька.— ПМТФ, 1976, № 3.
4. **Гасенко В. Г., Соболев В. В.** Пульсация газового пузырька в неньютоновской жидкости под действием звукового поля.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 2.
5. **Накоряков В. Е., Соболев В. В., Шрейбер И. Р.** Волны конечной амплитуды в двухфазных системах.— В кн.: Волновые процессы в двухфазных системах. Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1975.
6. **Devin C.** Survey of thermal, radiation and viscous damping of pulsating air bubbles in water.— «J. Acoust. Soc. Amer.», 1959, vol. 31, N 12.
7. **Chapman R. B., Plesset M. S.** Thermal effects in the free oscillations of gas bubbles.— «Trans. ASME, ser. D. J. Basic Engng», 1971, vol. 93, N 3. Рус. пер. Тепловые эффекты при свободном колебании газовых пузырьков.— «Теорет. основы инж. расчетов», 1971, т. 93, № 3.
8. **Macedo I. C., Yang Wen-Jei.** Acoustically forced oscillations of gas bubbles in liquids.— «Japan. J. Appl. Phys.», 1972, vol. 11, N 8.
9. **Shima A.** The natural frequency of a bubble oscillating in a viscous compressible liquid.— «Trans. ASME, ser. D. J. Basic Engng», 1970, vol. 92, N 3. Рус. пер. Собственная частота колебаний газового пузырька в вязкой сжимаемой жидкости.— «Теорет. основы инж. расчетов», 1970, т. 92, № 3.
10. **Миниович И. Я., Перник А. Д., Петровский В. С.** Гидродинамические источники звука. Л., «Судостроение», 1972.
11. **Френкель Я. И.** Кинетическая теория жидкостей. Л., «Наука», 1975.
12. **Михайлов И. Г., Соловьев В. А., Сырников Ю. П.** Основы молекулярной акустики. М., «Наука», 1964.
13. **Нигматулин Р. И., Хабеев И. С.** Теплообмен газового пузырька с жидкостью.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 5.
14. **Amato W. S., Tien Chi.** Natural convection heat transfer from a vertical plate to an Oldroyd fluid.— «Chem. Eng. Progr. Symp. Ser.», 1970, vol. 66, N 102.
15. **Реология** (полимеры и нефть). Новосибирск, изд. Ин-та теплофизики СО АН СССР, 1977.
16. **Литовиц Т., Дэвис К.** Структурная и сдвиговая релаксация в жидкостях.— В кн.: Физическая акустика. Т. 2, Ч. А. М., «Мир», 1968.
17. **Вязьменский Б. Э.** Влияние полимерных добавок на кавитацию.— ИФЖ, 1973, т. 25, № 6.

УДК 533 : 538; 536.46 : 533.6

О НЕЛИНЕЙНЫХ И ЛИНЕЙНЫХ ВОЛНОВЫХ ПРОЦЕССАХ В ЭЛЕКТРОГИДРОДИНАМИКЕ С УЧЕТОМ ДИФФУЗИИ ЗАРЯДОВ

Н. И. Кидин, Г. Г. Цыпкин

(Москва)

Проведенное ниже исследование применимо к нестационарным электрогидродинамическим течениям, в которых существенную роль играют процессы диффузии заряженных частиц. Примерами таких течений являются нестационарные течения с движущимися фронтами электрического заряда [1, 2], течения с разрывами газодинамических параметров, пограничные слои вблизи сеток электродов, течения с электризацией тел при движении в потоках, явления образования электрического заряда и методы борьбы с ним в различных технологических процессах [2] и др. Своеобразная электрогидродинамическая ситуация возникает также при горении в электрическом поле [3], например, когда ламинарный фронт пламени помещен между плоскими электродами [4, 5]. В этом случае с каждой стороны от фронта горения (между электродом и пламенем) образуются разноименно заряженные области. Массовые электрические силы, воздействуя на гидродинамику течения при горении, приводят к различным электрогидродинамическим эффектам, при описании которых, особенно вблизи фронта горения, необходимо учитывать диффузию зарядов. Изменяя приложенное напряжение, можно получать различные нестационарные переходные процессы с перестройкой электрических и гидродинамических параметров в заряженных областях и эффективно воздействовать на фронт горения.

1. Уравнение Бюргерса для напряженности электрического поля. В приведенных выше примерах процессы переноса и диссипации, обусловленные вязкостью и теплопроводностью, считаются несущественными; поэтому для описания электрогидродинамических течений с учетом диффузии заряженных частиц будем использовать следующую систему уравнений [1, 2, 4]:

(1.1) $$\partial \mathbf{E}/\partial t + 4\pi \mathbf{j} = (\mathrm{rot}\ \mathbf{H})c;$$

(1.2) $$\mathrm{rot}\ \mathbf{E} = 0;$$

(1.3) $$\mathrm{div}\ \mathbf{E} = 4\pi q;$$

(1.4) $$\mathbf{j} = q(b\mathbf{E} + \mathbf{v}) - D\ \mathrm{grad}\ q;$$

(1.5) $$\partial \rho/\partial t + \mathrm{div}\ \rho\mathbf{v} = 0;$$

(1.6) $$\rho d\mathbf{v}/dt + \mathrm{grad} p = q\mathbf{E};$$

(1.7) $$p = \rho R T;$$

(1.8) $$C_V \rho dT/dt + p\ \mathrm{div}\ \mathbf{v} = (\mathbf{j} - q\mathbf{v})\mathbf{E},$$

где $\mathbf{v}$, $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{j}$ — векторы скорости среды, напряженности электрического и магнитного полей и плотности тока; ρ, p, T — плотность, давление и температура; q — объемная плотность электрического заряда; R — газовая постоянная; C_V — теплоемкость при постоянном объеме; D и b — коэффициенты диффузии; c — скорость света.

Применив операцию дивергенции к обеим частям уравнения (1.1), получим закон сохранения заряда

$$\partial q/\partial t + \mathrm{div}\ \mathbf{j} = 0,$$

который вместе с уравнениями (1.2)—(1.8) составляет известную систему уравнений электрогидродинамики [1, 2]. Исключая из уравнений (1.1)—(1.4) $\mathbf{j}$ и q, получим уравнение для напряженности электрического поля

(1.9) $$\partial \mathbf{E}/\partial t + (\mathbf{v} + b\mathbf{E})\mathrm{div}\ \mathbf{E} - D\Delta \mathbf{E} = \mathrm{rot}\ \mathbf{H}c.$$

Предположив, что течение обладает какой-либо пространственной симметрией, положим правую часть уравнения тождественно равной нулю. В случае слабого ЭГД-взаимодействия (правые части уравнений (1.6), (1.8) равны нулю) можно считать $\mathbf{v} = \mathrm{const}$. Тогда уравнение (1.9) представляет собой трехмерный аналог известного в гидродинамике уравнения Бюргерса [6—8], описывающего возникновение и формирование ударной волны, в котором роль вязкости играет диффузия заряженных частиц. Переходя к инерциальной системе координат, в одномерном случае получаем

(1.10) $$\partial E/\partial t + bE\partial E/\partial t = D\partial^2 E/\partial x^2.$$

Уравнение (1.10) с помощью подстановки Хопфа [9]

$$E = -\frac{2D}{b}\frac{\partial}{\partial x}\ln F$$

сводится к линейному уравнению теплопроводности

$$\partial E/\partial t = D\partial^2 F/\partial x^2.$$

Тогда решение уравнения (1.10) с начальным условием $E(x, 0) = E_0(x)$ можно записать в виде

$$E = -\frac{2D}{b}\frac{\partial}{\partial x}\ln\left\{\frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left[-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt} - \frac{b}{2D}\int_0^{\xi}E_0(\eta)\,d\eta\right]d\xi\right\} = \frac{1}{b}\frac{x}{t} - \frac{1}{bt}\times$$
$$\times\frac{\int_{-\infty}^{+\infty}\xi\exp\left\{-\frac{(x-\xi)^2}{4Dt} - \frac{b}{2D}\int_0^{\xi}E_0(\eta)\,d\eta\right\}d\xi}{\int_{-\infty}^{+\infty}\exp\left\{\frac{(x-\xi)^2}{4Dt} - \frac{b}{2D}\int_0^{\xi}E_0(\eta)\,d\eta\right\}d\xi}. \tag{1.11}$$

Необходимое условие сходимости интеграла в (1.11)

$$b\int_0^x E_0(\eta)\,d\eta \lessapprox \mathrm{const}\,x, \quad x\to\infty.$$

Рассматривая эволюцию начальных возмущений, затухающих при $x\to\pm\infty$, положим

$$b\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(\eta)\,d\eta \equiv b\Phi < \infty.$$

При любом t

$$\int_{-\infty}^{+\infty}E(x, t)\,dx = \int_{-\infty}^{+\infty}E_0(\eta)\,d\eta \equiv \Phi. \tag{1.12}$$

Отметим, что инвариант (1.12), являющийся для уравнения Бюргерса (1.10) интегралом движения, в нашем случае есть разность потенциалов начального возмущения на концах отрезка интегрирования, сохраняющаяся во времени. Асимптотический вид решения (1.11) при $t\to\infty$ с учетом

$$\int_{-\infty}^{0}E_0(x)\,dx = \int_0^{+\infty}E_0(x)\,dx = \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}E_0(x)\,dx = \frac{\Phi}{2}$$

имеет вид

$$\underset{t\to\infty}{E}(x, t) = -2\frac{D}{b}\frac{d}{dx}\ln\left[e^{-\frac{b\Phi}{4D}}\int_{-\infty}^{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}e^{-\eta^2}\,d\eta + e^{+\frac{b\Phi}{4D}}\int_{\frac{x}{\sqrt{4Dt}}}^{+\infty}e^{-\eta^2}d\eta\right]. \tag{1.13}$$

Из (1.13) следует, что при $t\to\infty$ решение зависит только от величины электрического потенциала начального возмущения.

При $D\to 0$ асимптотическая формула (1.13) упрощается

$$\underset{\substack{t\to\infty\\ D\to 0}}{E}(x, t) = \frac{1}{b}\frac{x}{t}\sqrt{Dt}\,\frac{e^{\frac{b\Phi}{2D}}+1}{\sqrt{Dt}\left(e^{\frac{b\Phi}{2D}}-1\right)+\sqrt{\pi}\,x\,e^{\frac{x^2}{4Dt}}},$$

что в пределе при $D \to 0$ дает

$$\lim_{D \to 0} E(x,\ t \to \infty) = \begin{cases} \dfrac{1}{b}\dfrac{x}{t}, & 0 < x < \sqrt{2b\Phi t}, \\ 0, & x < 0, \quad x > \sqrt{2b\Phi t}. \end{cases}$$

2. Стационарное решение уравнения Бюргерса. Уравнение Бюргерса допускает также стационарное решение в виде бегущей волны, распространяющейся без деформации с постоянной скоростью W. Подставляя $E = f(x - Wt) = f(\xi)$ и интересуясь ограниченными решениями, получим для волны, распространяющейся вправо,

$$E(\xi) = \frac{W}{b} + c_1 - \frac{2c_1}{1 - c_2 \exp\left[-\dfrac{bc_1\xi}{D}\right]} \tag{2.1}$$

(c_1 и c_2 — постоянные интегрирования). Решение (2.1) представляет собой некоторую волну напряженности электрического поля, подобную ударной волне или волне разрежения. Величина скачка и характерная величина переходной области равны соответственно $2c_1$ и D/bc_1, т. е. определяются из краевых условий задачи. Для того чтобы проиллюстрировать свойства стационарной волны, зададимся (пока формально) следующими условиями:

$$x = 0,\ E = E_1,\ x \to \infty,\ E = E_0. \tag{2.2}$$

Отсюда получаем

$$c_1 = \frac{W}{b} - E_0, \quad c_2 = \frac{E_1 - E_2}{E_1 - 2\dfrac{W}{b} + E_0}.$$

Скорость распространения стационарной волны W при этом остается произвольной. Чтобы ее определить, необходимы некоторые дополнительные соображения. В качестве дополнительного условия к (2.2) необходимо задать либо плотность электрического заряда, распространяющуюся вместе с волной (т. е. производную электрического поля по координате), либо скорость его образования при бесконечно узкой зоне генерации ионов во фронте волны. Задавая при

$$x = 0, \quad q_0 = \frac{\varepsilon_0}{4\pi}\frac{dE}{dx}\bigg|_{x=0} = -\frac{b\varepsilon_0}{2\pi D}\frac{c_1^2 c_2}{(1 - c_2)^2},$$

получаем

$$W = \frac{b(E_1 + E_0)}{2} + \frac{4\pi D}{\varepsilon_0}\frac{q_0}{E_1 - E_0}, \tag{2.3}$$

$$c_1 = \frac{E_1 - E_2}{2} + \frac{4\pi D}{b\varepsilon_0}\frac{q_0}{E_1 - E_0}, \quad c_2 = \frac{b\varepsilon_0}{8\pi D}\frac{(E_1 - E_0)}{q_0}.$$

Из (2.3) видно, что полуширина $2c_1$ и скорость распространения волны W зависят от значений E_1 и E_0 и свойств заряженного газа.

Сделаем численные оценки. Например, при горении в электрическом поле характерные величины электрических параметров с каждой стороны от фронта горения следующие: в положительно заряженной области $E_1 \sim 10^3$ В/см, $E_0 \sim 10$ В/см, $q_0 \sim 10^9$ см$^{-3}\cdot e$ (e — заряд электрона), $b \sim 1$ см^2/В·с, $D \sim 1$ см^2/с, $\varepsilon_0 \sim 1$. Тогда величина скачка $2c_1 \sim 10^3$ В/см, полуширина волны $\Delta = D/bc_1 \sim 2\cdot 10^{-3}$ см и скорость волны $W \sim$ $\sim 5\cdot 10^2$ см/с. В этих оценках предполагается, что объемный заряд образован ионами. В случае, когда основным носителем заряда являются электроны, положив $E_1 \sim 10^2$ В/см, $E_0 \sim 0$, $q_0 \sim 10^9$ см$^{-3}\cdot e$, $b \sim 10^3$ см^2/В·с, $D \sim$

$\sim 10^3$ см²/с, $\varepsilon_0 \sim 1$, получаем $2c_1 \sim 1{,}4 \cdot 10^2$ В/см, $\Delta = D/bc_1 \sim 1{,}4 \cdot 10^{-2}$см; $W \sim 7 \cdot 10^4$ см/с. Как видно из приведенных оценок, величина скачка и полуширина волны определяются в основном напряженностью электрического поля перед фронтом волны и за ним, а скорость распространения волны существенно зависит от подвижности заряженных частиц, образующихся в волне в результате ионизации, либо образованных в начальный момент времени каким-либо источником.

Отметим, что приведенное выше исследование может быть применимо к нестационарным электрогидродинамическим течениям, когда скорость среды v в уравнении (1.9) определяется из гидродинамики течения, т. е. в приближении слабого электрогидродинамического взаимодействия.

3. Линейные ЭГД волны с учетом диффузии зарядов. Рассмотрим теперь случай, когда электрогидродинамическим взаимодействием пренебречь нельзя.

В случае, когда электрические массовые силы оказывают существенное воздействие на гидродинамику течения, скорость среды зависит от величины напряженности поля и определяется из уравнений (1.5)—(1.8). В одномерном случае при $\operatorname{rot} \mathbf{H} \equiv 0$ получим

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho + \frac{\partial}{\partial x}\rho v = 0, \quad \rho\frac{d}{dt}v = -\frac{\partial}{\partial x}\left(p - \frac{E^2}{8\pi}\right), \quad p = \rho RT,$$
$$C_V\rho\frac{d}{dt}T + p\frac{\partial}{\partial x}v = \frac{b}{4\pi}E^2\frac{\partial}{\partial x}E - \frac{D}{4\pi}E\frac{\partial^2}{\partial x^2}E,$$
$$\frac{\partial E}{\partial t} + (v + bE)\frac{\partial E}{\partial x} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2}. \tag{3.1}$$

Система уравнений (3.1) представляет собой полную систему уравнений электрогидродинамики для одномерных течений с учетом диффузии зарядов. Линейные электрогидродинамические волны без учета диффузии рассматривались в работах [5, 10]. В частности, в [5] исследовалось распространение акустических волн в заряженной среде, образующейся при горении в электрическом поле.

Линеаризуем систему уравнений (3.1), обозначая индексом нуль параметры невозмущенного состояния, которые будем считать постоянными величинами, а возмущения отметим штрихами сверху. В системе координат, движущейся со скоростью v_0, получаем

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + bE_0\frac{\partial E'}{\partial x} = \frac{\partial^2 E'}{\partial x^2}; \tag{3.2}$$

$$\frac{\partial^2 p'}{\partial t^2} = a^2\frac{\partial^2 p'}{\partial x^2} - \frac{E_0}{4\pi}\left[a^2\frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} - (\gamma - 1)bE_0\frac{\partial^2 E'}{\partial t\partial x} + (\gamma - 1)D\frac{\partial^3 E'}{\partial t\partial x^2}\right], \tag{3.3}$$

где $a = \sqrt{\gamma p_0/\rho_0}$ — термодинамическая скорость звука; γ — показатель адиабаты.

В отсутствие электрического поля ($E_0 = 0$) из (3.3) следует обычное уравнение акустики.

Как видно из уравнения (3.2), в линейном приближении при $v = \mathrm{const}$ газодинамические параметры не оказывают влияния на формирование поля. Решение уравнения (3.2), являющегося линейным уравнением теплопроводности, можно записать в виде

$$E'(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi Dt}}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{4Dt}(\xi - x + bE_0 t)^2} E'(\xi, 0)\, d\xi, \tag{3.4}$$

где $E'(\xi, 0) = E'(\xi, \tau)|_{\tau=0}$ — начальное возмущение.

Теперь уравнение (3.3) представляет собой неоднородное волновое уравнение, в котором $E'(x, t)$ выражается из (3.4). Запишем решение этого волнового уравнения

$$p'(x, t) = \frac{\varphi(x+at)+\varphi(x-at)}{2} + \tag{3.5}$$
$$+\frac{1}{2a}\int_{x-at}^{x+at}\psi(\xi)\,d\xi + \frac{1}{2a}\int_0^t d\tau\int_{x-a(t-\tau)}^{x+a(t-\tau)} f(\xi, \tau)\,d\xi,$$
$$\varphi(\xi) = p'(\xi, 0), \quad \psi(\xi) = \frac{\partial}{\partial\tau}p'(\xi, \tau),$$
$$f(\xi, \tau) = -\frac{E_0}{4\pi}\left[a^2\frac{\partial^2 E'}{\partial\xi^2} - (\gamma-1)bE_0\frac{\partial^2 E'}{\partial\tau\partial\xi} + (\gamma-1)D\frac{\partial^3 E'}{\partial\tau\partial\xi}\right].$$

В частном случае, когда среда описывается политропным законом состояния

$$p = \mathrm{const}\ \rho^n, \tag{3.6}$$

где n — показатель политропы, система уравнений существенно упрощается: вместо третьего и четвертого уравнений из системы (3.1) выписывается соотношение (3.6). В этом случае также получаем систему уравнений, аналогичных (3.2), (3.3), с той лишь разницей, что функция $f(\xi, \tau)$, входящая в правую часть неоднородного волнового уравнения (3.3) и в его решение (3.5), имеет вид

$$f(\xi, \tau) = -\frac{np_0}{\rho_0}\frac{E_0}{4\pi}\frac{\partial^2 E'}{\partial\xi^2}.$$

Если искать решения (3.2), (3.3) в виде плоских волн $\left(p'(x, t) = p'_* e^{i(kx-\omega t)},\ E'(x, t) = E'_* e^{i(kx-\omega t)}\right.$ [11, 12], где p'_* и E'_* — $\left.\mathrm{const}\right)$, то при помощи стандартных операций можно получить дисперсионное соотношение

$$(\omega - bE_0k + iDk^2)(\omega^2 - a^2k^2) = 0. \tag{3.7}$$

Это дисперсионное соотношение определяет три волны: две акустические волны, распространяющиеся в противоположные стороны со скоростью a, и волну напряженности электрического поля, фазовая скорость которой равна

$$\frac{\mathrm{Re}\,\omega}{\mathrm{Re}\,k} = bE_0 + 2D\,\mathrm{Im}\,k.$$

Заметим, что линеаризованная система уравнений (3.2), (3.3), строго говоря, справедлива только для квазинейтральной в невозмущенном состоянии среды ($E_0 = \mathrm{const}$).

В случае, если среда имеет объемный заряд $q_0 \neq 0$, в невозмущенном состоянии стационарные распределения напряженности электрического поля, давления, плотности и температуры подчиняются следующим соотношениям (при $v_0 = 0$):

$$E_0 = c_0 - \frac{2c_0}{1-\exp\left(-\frac{bc_0x}{D}+c_1\right)}, \quad p_0 = c_2 + \frac{E_0^2}{8\pi}, \tag{3.8}$$
$$\rho_0 = \frac{c_2 + \frac{E_0^2}{8\pi}}{RT_0}, \quad T_0 = c_3,$$

где c_0, c_1, c_2, c_3 — константы интегрирования. Эти соотношения следуют из системы уравнений (3.1), записанной в стационарном случае при $v_0 = 0$.

Если невозмущенные параметры среды определяются из (3.8), то линеаризованная система уравнений (3.1) имеет вид

$$\frac{\partial E'}{\partial t} + bE'\frac{\partial E_0}{\partial x} + bE_0\frac{\partial E'}{\partial x} - D\frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} + v'\frac{\partial E_0}{\partial x} = 0,$$

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho_0\frac{\partial v'}{\partial x} = 0, \quad \rho_0\frac{\partial v'}{\partial t} + \frac{\partial p'}{\partial x} - \frac{1}{4\pi}\left(E_0\frac{\partial E'}{\partial x} + E'\frac{\partial E_0}{\partial x}\right) = 0,$$

$$\frac{C_V\partial p'}{R\partial t} - C_V T_0\frac{\partial \rho'}{\partial t} + p_0\frac{\partial v'}{\partial x} - \frac{b}{4\pi}E_0^2\frac{\partial E'}{\partial x} - \frac{b}{2\pi}E_0E'\frac{\partial E_0}{\partial x} +$$

$$+ \frac{D}{4\pi}E_0\frac{\partial^2 E'}{\partial x^2} + \frac{D}{4\pi}E'\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} = 0.$$

Отыскивая решения этой системы в виде плоских волн и приравнивая нулю определитель этой системы, можно получить следующее дисперсионное соотношение:

$$\omega^3 + \left[iDk^2 - bE_0k + ib\frac{\partial E_0}{\partial x}\right]\omega^2 - \tag{3.9}$$

$$- \left[a^2k^2 + \frac{i}{4\pi}\frac{E_0}{\rho_0}\frac{\partial E_0}{\partial x}k + \frac{1}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)^2\right]\omega -$$

$$- iDa^2k^4 + E_0\left[a^2b - \frac{D}{4\pi}\frac{\gamma-1}{\rho_0}\frac{\partial E_0}{\partial x}\right]k^3 -$$

$$- ib\left[a^2 + \frac{\gamma-1}{4\pi}\frac{E_0^2}{\rho_0}\right]k^2 + \frac{\gamma-1}{4\pi\rho_0}\frac{\partial E_0}{\partial x}\left[D\frac{\partial^2 E}{\partial x^2} - 2bE_0\frac{\partial E_0}{\partial x}\right]k = 0.$$

Одним из четырех решений дисперсионного соотношения является тривиальное решение $\omega = 0$, которое в (3.9) уже не включено. Очевидно также, что дисперсионное соотношение (3.7) является частным случаем уравнения (3.9) при $E_0 = \text{const}$. Не выписывая явно громоздкие решения кубического уравнения, приведем лишь некоторые приближенные результаты.

В частности, для коротких волн высокочастотной ветви имеем

$$\omega^3 = iDa^2k^4, \tag{3.10}$$

а для длинных

$$\omega^3 = \frac{1-\gamma}{2\pi\rho_0}\left[\frac{D}{4}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)^2 - bE_0\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)^2\right]k.$$

В низкочастотной ветви дисперсионное соотношение для коротких волн имеет вид

$$\omega = -iDk^2, \tag{3.11}$$

а для длинных

$$\omega = (\gamma - 1)\left[D\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial^2 E_0}{\partial x^2} - 2bE_0\right]k.$$

Анализируя выписанные соотношения, можно сделать вывод, что для коротких волн определяющую роль играют процессы диффузии зарядов. Этот результат вполне естествен, так как члены с диффузией являются доминирующими для мелкомасштабных явлений.

В случае, когда среда подчиняется политропному закону состояния (3.6), дисперсионное соотношение принимает вид

$$\omega^3+i\left(Dk^2+ibE_0k+b\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)\omega^2-\left[n\frac{p_0}{\rho_0}k^2+i\left(\frac{E_0}{4\pi\rho_0}\frac{\partial E_0}{\partial x}-n\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_0}{\rho_0}\right)k+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{4\pi\rho_0}\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)^2\right]\omega-\left(Dk^3+ibE_0k^2+b\frac{\partial E_0}{\partial x}k\right)\left(in\frac{p_0}{\rho_0}k+n\frac{\partial}{\partial x}\frac{p_0}{\rho_0}\right)=0.$$

Выделяя высоко- и низкочастотные ветви решения, получим для коротких волн в высокочастотной ветви

$$\omega^3=iDn\frac{p_0}{\rho_0}k^4, \tag{3.12}$$

а для длинных

$$\omega^3=bn\frac{\partial E_0}{\partial x}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)k.$$

Соответственно в низкочастотной ветви дисперсионное уравнение для коротких волн имеет вид

$$\omega=-iDk^2, \tag{3.13}$$

а для длинных

$$\omega=4\pi\rho_0bn\left(\frac{\partial E_0}{\partial x}\right)^{-1}\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{p_0}{\rho_0}\right)k.$$

Отметим совпадение результатов для коротких волн в случае, когда среда подчиняется политропному закону состояния, и в общем случае, когда выписывается уравнение энергии. В частности, между (3.10) и (3.12) будет полное соответствие, если ввести политропную скорость звука как $a=\sqrt{np_0/\rho_0}$, а уравнение (3.11) совпадает с (3.13). Следует заметить, что политропный закон достаточно хорошо описывает состояние среды, например, для адиабатических процессов, протекающих столь быстро, что тепло не успевает передаваться от одной точки к другой.

В заключение отметим, что проведенный анализ и полученные результаты справедливы для униполярно заряженных течений, в которых существенную роль играют процессы взаимодействия заряженной среды и электрического поля, а также диффузии зарядов.

Авторы выражают благодарность А. Г. Куликовскому и В. Б. Либровичу за полезные обсуждения и сделанные замечания.

Поступила 2 I 1978

ЛИТЕРАТУРА

1. **Ватажин А. Б.** Сглаживание разрывов электрического заряда в электрогидродинамике в результате диффузионных процессов.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1975, № 1, с. 59.
2. **Гогосов В. В., Полянский В. А.** Электрогидродинамика: Задачи и приложения, основные уравнения, разрывные решения.— В кн.: Механика жидкости и газа (итоги науки и техники). Т. 10. М., 1976.
3. **Лаутон Дж., Вайнберг Ф.** Электрические аспекты горения. М., «Энергия», 1976.
4. **Кидин Н. И., Либрович В. Б.** Ламинарное пламя в постоянном электрическом поле.— В кн.: Физика горения и методы ее исследования. Чебоксары, изд. Чебоксар. ун-та им. И. Н. Ульянова, 1976.
5. **Кидин Н. И., Либрович В. Б.** Акустические свойства продуктов горения в электрическом поле.— ФГВ, 1977, № 5.
6. **Burgers J. M.** A mathematical model illustrating the theory of turbulence.— In: Advances in Applied Mechanics. Vol. 1. N. Y., 1948.
7. **Уизем Дж.** Линейные и нелинейные волны. М., «Мир», 1977.

8. **Карпман В. И.** Нелинейные волны в диспергирующих средах. М., «Наука», 1973.
9. **Hopf E.** The partial differential equation.— «Comm. Pure Appl. Math.», 1950, vol. 3, p. 201.
10. **Гогосов В. В., Полянский В. А.** О слабых волнах, характеристиках и задаче об обтекании тонкого профиля в электрогидродинамике.— «Изв. АН СССР. МЖГ», 1972, № 3, с. 137.
11. **Куликовский А. Г., Любимов Г. А.** Магнитная гидродинамика. М., «Наука», 1962.
12. **Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М.** Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1954.

УДК 532.135

САМОРАЗОГРЕВ ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ПРИ ЦИКЛИЧЕСКОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ

Л. М. Бучацкий, А. М. Столин, С. И. Худяев

(Черноголовка)

Важнейшей особенностью процесса деформирования является выделение диссипативного тепла. Хорошо исследованы тепловые режимы течения лишь в случае простого сдвигового деформирования, при этом обнаружены интересные явления: гидродинамические аналоги тепловому взрыву [1—3], воспламенению и потуханию [4, 5], зажиганию [6, 7], неизотермические автоколебания вязкоупругих жидкостей [8]. Возникает интерес к исследованию влияния циклического деформирования на диссипативный разогрев и связанные с ним явления. Этот вопрос, хорошо изученный для твердых полимеров [9—12], для текучих систем практически не исследован, хотя представляет интерес для ряда прикладных задач химической технологии (вибропрессование, виброшнекование и др.) и вискозиметрии.

1. В данной работе проведено теоретическое исследование саморазогрева текучих систем при циклическом деформировании в модели ротационного вибровискозиметра. Рассматривается сдвиговое неизотермическое течение ньютоновской жидкости между двумя соосными бесконечными цилиндрами, один из которых вращается с постоянной скоростью, а другой совершает вынужденные тангенциальные колебания. Математическое описание процесса содержит уравнения движения и теплового баланса

$$\rho\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}(r^2\sigma), \quad \sigma = \mu_0 e^{-\beta(T-T_0)} r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right); \tag{1.1}$$

$$c\rho\frac{dT}{dt} = q - \frac{2\alpha}{r_2 - r_1}(T - T_0), \quad q = \frac{2}{r_2^2 - r_1^2}\int\limits_{r_1}^{r_2} \sigma r\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{v}{r}\right) r\,dr, \tag{1.2}$$

где v — скорость течения; σ — напряжение сдвига; T — температура; t — время; $r_1 \leqslant r \leqslant r_2$, r_1, r_2 — радиусы цилиндров; c — теплоемкость; ρ — плотность; q — функция диссипации; T_0 — температура окружающей среды; α — коэффициент теплоотдачи с поверхности; μ_0 — вязкость при $T = T_0$; β — температурный коэффициент вязкости.

Принятая в (1.1) рейнольдсовская зависимость вязкости от температуры $\mu = \mu_0 \exp[-\beta(T - T_0)]$ получается разложением экспоненты аррениусовской зависимости $\mu = A \exp(B/T)$ [13] (A и B — константы) по методу Франк-Каменецкого [14] при условии $(T - T_0)/T_0 \ll 1$. Уравнение (1.2) предполагает отсутствие распределения температуры по объему жидкости, однако такая модель не теряет смысла и при наличии распределения температуры по объему. В этом случае уравнение (1.2) следует понимать как приближенное относительно средней по объему температуры.