

Кривизна температурного поля в окрестности  $x = 0$  оказывается весьма значительной, что может вызвать большие термические напряжения при вытягивании кристаллов и существенно увеличить их дефектность. Выражение (9) показывает также, что для подогрева полупрозрачной пластины экраны оказываются не очень эффективными, поскольку значительная часть их излучения отражается от поверхности пластины. Поэтому, чтобы компенсировать ту часть энергии, которая уносится вдоль пластины, как по световоду, экраны в окрестности фронта кристаллизации необходимо нагревать значительно выше температуры плавления. На фиг. 4 представлено распределение температуры в пластине для двух экранов, когда коэффициент поглощения зависит только от температуры ( $1 - T_2 = 2326$  К,  $2 - T_2 = 2500$  К). Видно, что при повышении температуры экранов изменение температурного поля вблизи  $x = 0$  становится существенно менее резким.

Поступила 13 XI 1979

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Юферев В. С. Радиационно-кондуктивный теплообмен в тонком полупрозрачном цилиндре в световодном приближении. — ПМТФ, 1979, № 4.
2. Антонов П. И., Баходдин С. И., Васильев М. Г., Тропи Э. А., Юферев В. С. Распределение температуры в прозрачных профилированных кристаллах. — Изв. АН СССР. Сер. физическая, 1980, т. 44, № 2.
3. Gryvnak D. A., Burch D. E. Optical and infrared properties of  $Al_2O_3$  at elevated temperatures. — J. Optical Soc. Amer., 1965, vol. 55, p. 625.
4. Кондильченко И. И., Коротков П. А. Введение в атомную спектроскопию. — Киев, Вища школа, 1976.

УДК 534.2 :532

### О СОБСТВЕННЫХ ЧАСТОТАХ КОЛЕБАНИЙ ГАЗА ВНЕ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ПОВЕРХНОСТИ, ОБРАЗОВАННОЙ ДУГОЙ ОКРУЖНОСТИ

В. Б. Курзин, С. В. Сухинин  
(Новосибирск)

В теории волновых процессов одним из малоизученных является вопрос о собственных колебаниях в открытых областях, т. е. в областях, имеющих бесконечно удаленные точки. В литературе имеются примеры решения соответствующих задач лишь в приближенной постановке. К их числу, например, относятся теория резонаторов, разработанная еще в прошлом веке Гельмгольцем и Рэлеем, а также теория открытой трубы в акустике [1]. В предположении, что процесс собственных колебаний внутри резонатора является установившимся, авторы этих работ дали оценку поправки частоты колебаний на отверстие и приближенно определили степень их затухания вследствие излучения энергии во внешнее пространство. При этом характер колебаний газа вдали от резонатора ими не изучался.

Предположим теперь, что колебания газа можно считать установившимися во всей области, вплоть до бесконечно удаленных точек. Тогда, введя зависимость от времени, с помощью множителя

$$\exp\left(-i \frac{kat}{l}\right) \quad (k = k' + ik'', k' = k_0 + \Delta k, k'' < 0)$$

(где  $a$  — скорость звука,  $l$  — некоторый характерный размер резонатора,  $k_0$  — приведенная частота собственных колебаний газа в резонаторе с закрытым

отверстием,  $\Delta k$  — поправка частоты на отверстие,  $k''$  — величина, характеризующая затухание колебаний), перейдем от волнового уравнения к уравнению Гельмгольца во всей области, занимаемой газом. При физическом условии об отсутствии волн, приходящих из бесконечности, решение этого уравнения для  $k'' < 0$  на бесконечном удалении от резонатора будет возрастать по экспоненциальному закону. Оно, очевидно, не удовлетворяет условию излучения Зоммерфельда и противоречит привычным представлениям о постановке внешних краевых задач для уравнения Гельмгольца. В действительности такой результат, конечно, не реализуется, так как процесс затухающих свободных колебаний бесконечно долго продолжаться не может. Однако уравнение Гельмгольца является удобной моделью для описания колебаний сплошной среды, поэтому возник вопрос о строгой математической формулировке условия излучения для случая комплексных значений волнового числа  $k$  при  $k'' < 0$ . Впервые оно было сформулировано для плоского случая в работе [2] и обобщено в дальнейшем на пространственный случай в работе [3].

Следует отметить, что вопросы, связанные с собственными колебаниями в открытых областях, возникают в теории рассеяния. Так, в книге [4] асимптотическое решение задачи рассеяния вне препятствия представлено в виде ряда по собственным функциям соответствующих краевых задач для уравнения Гельмгольца. При этом строго показано, что собственные функции, удовлетворяющие уходящему условию излучения, на больших расстояниях от препятствия экспоненциально возрастают, а соответствующие собственные значения являются комплексными и находятся в нижней полуплоскости. В трехмерном случае была доказана и дискретность собственных значений внешней задачи для ограниченных препятствий.

Некоторые качественные результаты, касающиеся «внешних» собственных значений, получены в работах [5, 6], посвященных исследованию резонансных свойств решения задачи рассеяния для областей типа объемного резонатора. Автором этих работ было показано, что полюса искомого решения при достаточно малом отверстии резонатора расположены в окрестности собственных значений внутренних и внешних краевых задач для соответствующих областей без отверстий.

В данной работе в точной постановке исследуется зависимость комплексных собственных значений уравнения Гельмгольца от величины отверстия резонатора, представляющего собой бесконечный цилиндр с продольной щелью.

1. Рассмотрим собственные колебания идеального газа в плоскости поперечного сечения бесконечно длинной круговой цилиндрической поверхности (фиг. 1). Соответствующая математическая задача сводится к нахождению функции  $\varphi(x, y)$ , определяющей амплитуду потенциала скорости в плоскости вне контура  $L$ .

Она должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(1.1) \quad \varphi_{xx} + \varphi_{yy} + k^2\varphi = 0,$$

где  $x, y$  — безразмерные координаты, отнесенные к радиусу цилиндра, при условии непротекания

$$(1.2) \quad \nabla\varphi \cdot \mathbf{v} = 0, \quad (x, y) \in L,$$

где  $\mathbf{v}$  — орт нормали к  $L$ , и условия излучения, которое, согласно [2], будет иметь вид

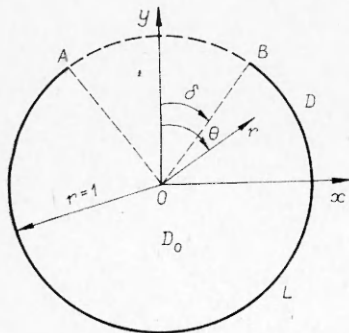
$$(1.3) \quad \varphi = \sum_{s=-\infty}^{\infty} a_s H_s^{(1)}(kr) e^{is\theta} \quad \text{для } r > 1,$$

где  $H_s^{(1)}(kr)$  — функция Ганкеля 1-го рода;  $r, \theta$  — цилиндрические координаты точек рассматриваемой плоскости.

В силу симметрии области решение задачи будем предполагать симметричным относительно оси  $y$ , т. е. полагаем, что

$$(1.4) \quad \varphi(r, \theta) = \varphi(r, -\theta).$$

2. Решение поставленной задачи будем искать с помощью метода склеивания. С этой



Ф и г. 1

целью, учитывая (1.4), представим функцию  $\varphi$  в области  $D_0$  ( $r < 1$ ) в виде

$$(2.1) \quad \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} b_s J_s(kr) \cos(s\theta)$$

(где  $J_s(kr)$  — функции Бесселя), в области  $D$  ( $r > 1$ ) с учетом (1.3), (1.4) в виде

$$(2.2) \quad \varphi = \sum_{s=0}^{\infty} a_s H_s^{(1)}(kr) \cos(s\theta).$$

Значение производной искомой функции по нормали к дуге  $AB$  ( $r = 1$ ,  $|\theta| < \delta$ ) представим в виде ряда

$$(2.3) \quad \left. \frac{\partial \varphi}{\partial r} \right|_{r=1} = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \cos\left(\frac{\pi n \theta}{\delta}\right) = \tau(\theta).$$

Тогда, удовлетворяя условию (1.2) и выражению (2.3), на границе областей  $D_0$  и  $D$  соответственно получим

$$(2.4) \quad b_0 = \frac{\delta}{\pi} c_0 (J'_0(kr)|_{r=1})^{-1}, \quad b_s = \frac{2\delta}{\pi} (J'_s(kr)|_{r=1})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_{sn} c_n;$$

$$(2.5) \quad a_0 = \frac{\delta}{\pi} c_0 (H_0^{(1)'}(kr)|_{r=1})^{-1}, \quad a_s = \frac{2\delta}{\pi} (H_s^{(1)'}(kr)|_{r=1})^{-1} \sum_{n=0}^{\infty} g_{sn} c_n,$$

$$g_{sn} = \frac{(-1)^n s \sin \bar{s}}{s^2 - n^2}, \quad \bar{s} = s\delta, \quad \bar{n} = \pi n.$$

Для склеивания решений в областях  $D_0$  и  $D$  на дуге  $AB$ , помимо равенства их нормальных производных, которое обеспечивается соотношениями (2.4), (2.5), потребуем равенства функций, представленных выражениями (2.1), (2.2) на этой дуге. В результате получим соотношение

$$(2.6) \quad \sum_{s=0}^{\infty} h_s \cos(s\theta) \sum_{n=0}^{\infty} g_{sn} c_n = 0,$$

где  $h_0 = \frac{1}{2} \left( \frac{J_0}{J'_0} - \frac{H_0^{(1)}}{H_0^{(1)'}} \right)_{r=1}$ ;  $h_s = \left( \frac{J_s}{J'_s} - \frac{H_s^{(1)}}{H_s^{(1)'}} \right)_{r=1}$  для  $s \neq 0$ , в котором

неизвестными являются лишь коэффициенты  $c_n$  ряда (2.3).

Разлагая левую часть уравнения (2.6) в ряд Фурье по  $\cos(\pi m \theta / \delta)$  и приравнявая каждый член этого ряда нулю, получим однородную бесконечную систему алгебраических уравнений

$$(2.7) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_{mn} c_n = 0 \quad (m = 0, 1, 2, \dots),$$

$$\text{где } a_{mn} = \sum_{s=0}^{\infty} g_{ms} g_{sn} h_s \left( g_{ms} = \frac{(-1)^m \bar{s} \sin \bar{s}}{s^2 - m^2}, \quad \bar{m} = m\pi \right).$$

Таким образом, поставленная задача свелась к нахождению нетривиального решения однородной бесконечной системы алгебраических уравнений (2.7). Комплексные значения параметра  $k$ , при которых это решение существует, будут определять собственные частоты и соответствующие коэффициенты затухания колебаний газа в рассматриваемой области.

3. Покажем, что эта задача может быть решена методом редукции и каждое собственное значение ее является пределом собственных значений соответствующей усеченной системы.

С этой целью запишем уравнение (2.6) в виде

$$(3.1) \quad h_0 c_0 + \sum_{s=1}^{\infty} h_s \cos(s\theta) \int_0^{\delta} \tau(u) \cos(su) du = 0.$$

Воспользовавшись представлением цилиндрических функций в виде рядов, для  $s \gg |k|$  получим асимптотические выражения функций

$$\frac{J_s(k)}{J'_s(k)} = \frac{1}{s} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{s} \right)^2 \left( 1 - \frac{k^2}{4} \right) \right] + O\left(\frac{k^4}{s^4}\right),$$

$$\frac{H_s^{(1)}(k)}{H_s^{(1)'}(k)} = -\frac{1}{s} \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{k}{s} \right)^2 \right] + O\left(\frac{k^4}{s^4}\right).$$

Отсюда имеем

$$(3.2) \quad h_s = \frac{2}{s} \left[ 1 + \left( \frac{k}{s} \right)^2 \left( 1 - \frac{k^2}{8} \right) \right] + O\left(\frac{k^4}{s^4}\right).$$

Учитывая (3.2), представим функции  $h_s$  в виде

$$h_s = \frac{1}{s} \left( 2 + \frac{\bar{h}_s}{s^2} \right)$$

и подставим это выражение в (3.1). Тогда получим

$$(3.3) \quad h_0 c_0 + 2 \sum_{s=1}^{\infty} \int_0^{\delta} \frac{\cos(s\theta) \cdot \cos(su)}{s} \tau(u) du + \delta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{h}_s}{s^3} \cos(s\theta) \sum_{n=0}^{\infty} g_{sn} c_n = 0.$$

С помощью известного выражения

$$\sum_{s=1}^{\infty} \frac{\cos(s\varphi)}{s} = -\ln \left| 2 \sin \frac{\varphi}{2} \right|$$

из (3.3) получим

$$(3.4) \quad \int_0^{\delta} \ln 2 |\cos \theta - \cos u| \tau(u) du = h_0 c_0 + \delta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{h}_s}{s^3} \cos(s\theta) \sum_{n=0}^{\infty} g_{sn} c_n.$$

Далее, предполагая, что искомая функция  $\tau(u)$  абсолютно интегрируема и непрерывна на всем отрезке  $[0, \delta]$ , за исключением, быть может, конца  $u = \delta$ , введем функцию

$$(3.5) \quad F(u) = \int_0^u [\tau(v) - c_0] dv = \frac{\delta}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{n} \sin\left(\frac{\pi n u}{\delta}\right).$$

Тогда, интегрируя левую часть уравнения (3.4) по частям, получим

$$(3.6) \quad \int_0^{\delta} F(u) \frac{\sin u du}{\cos u - \cos \theta} = f(\theta),$$

$$\text{где } f(\theta) = c_0 \left( h_0 - \delta \ln 2 |\cos \theta - \cos \delta| + \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{h}_s}{s^4} \sin \bar{s} \cos \theta \right) + \delta \sum_{s=1}^{\infty} \frac{\bar{h}_s}{s^3} \cos(s\theta) \sum_{n=1}^{\infty} g_{sn} c_n.$$

Для дальнейших преобразований необходимо отметить, что функции  $h_s(k)$  являются аналитическими во всей комплексной плоскости, за исключением корней уравнений

$$(3.7) \quad J'_s(k) = 0, \quad H_s^{(1)'}(k) = 0 \quad (s = 0, 1, \dots).$$

Однако эти корни определяют собственные значения задачи при  $\delta = 0$ , т. е. при закрытом отверстии цилиндра, поэтому малые их окрестности исключены из рассмотрения.

Учитывая это обстоятельство и суммируя ряды по  $s$  в выражении для  $f(\theta)$ , получим

$$(3.8) \quad f(\theta) = c_0 [h_0 - \delta \ln 2 |\cos \theta - \cos \delta| + f_0(\theta)] + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{f_n(\theta)}{n} c_n,$$

где функции  $f_n(\theta)$  являются непрерывными на  $[0, \pi]$  и обладают непрерывными производными, причем при  $\theta \rightarrow 0$   $f'_n(\theta) = O(\theta \ln n)$ .

С помощью замены переменных

$$(3.9) \quad \cos u = t, \quad \cos \theta = t_0$$

преобразуем уравнение (3.6) к виду

$$(3.10) \quad \int_1^{\cos \delta} F(t) \frac{dt}{t-t_0} = -f(t_0),$$

левая часть которого рассматривается как интеграл типа Коши. В силу непрерывности функции  $F(t)$  на  $[1, \cos \delta]$  этот интеграл обращается по формуле

$$(3.11) \quad F(t_0) = \sqrt{(t_0 - \cos \delta)(1 - t_0)} \int_1^{\cos \delta} \frac{f(t)}{\sqrt{(t - \cos \delta)(1 - t)}} \frac{dt}{t - t_0}$$

при условии

$$(3.12) \quad \int_1^{\cos \delta} \frac{f(t) dt}{\sqrt{(1 - \cos \delta)(1 - t)}} = 0.$$

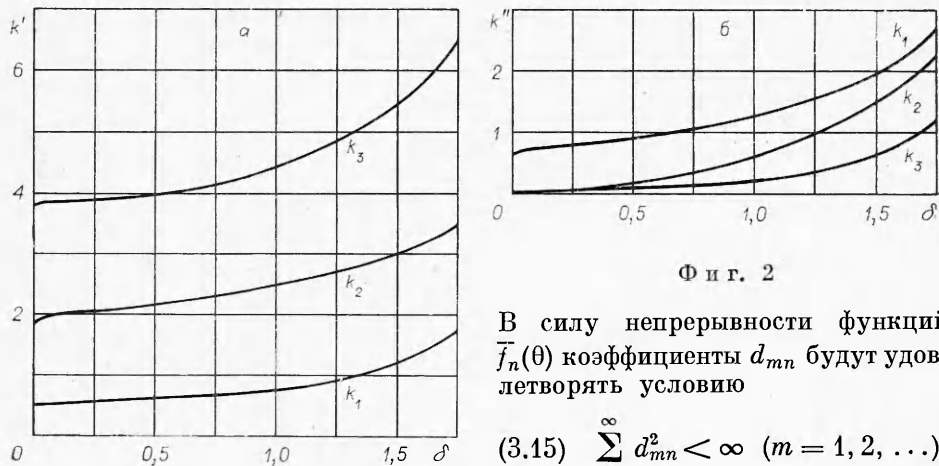
Подставляя выражение (3.8) для  $f(t)$  в формулу (3.11) и почленно интегрируя соответствующий ряд, получим

$$(3.13) \quad F(t_0) = c_0 \bar{f}_0(t_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \bar{f}_n(t_0) c_n,$$

где функции  $\bar{f}_n(t_0)$  являются непрерывными на  $[1, \cos \delta]$ , что следует из теоремы Племеля — Привалова с учетом поведения интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования [7] в силу непрерывности функций  $f(t)$  и их производных.

Переходя в уравнении (3.13) к переменным  $\theta$  по (3.9), разложим его правую часть в ряд Фурье по синусам на отрезке  $[0, \delta]$  и с учетом (3.5) приравняем соответствующие коэффициенты левой и правой части

$$(3.14) \quad \bar{c}_m = d_{m0} c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{mn}}{n} \bar{c}_n \quad \left( \bar{c}_n = \frac{c_n}{n} \right) \quad (m = 1, 2, \dots).$$



Ф и г. 2

В силу непрерывности функций  $\bar{f}_n(\theta)$  коэффициенты  $d_{mn}$  будут удовлетворять условию

$$(3.15) \quad \sum_{n=0}^{\infty} d_{mn}^2 < \infty \quad (m = 1, 2, \dots).$$

Далее, подставляя выражение (3.8) в формулу (3.12), получим уравнение, замыкающее систему (3.14):

$$(3.16) \quad d_{00}c_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_{0n}}{n} \bar{c}_n = 0,$$

где  $d_{0n}$  — некоторые ограниченные константы. Представим систему (3.14), (3.16) в матричной форме

$$(J + \bar{A})\bar{C} = 0.$$

Матрица  $\bar{A}$  в силу (3.15) удовлетворяет условию

$$B = \left\{ \sum_{m=0}^{\infty} \sum_{n=0}^{\infty} |\bar{a}_{mn}|^2 \right\}^{1/2} < \infty.$$

Отсюда следует [8], что оператор  $\bar{A}$  является компактным из  $l_2$  в  $l_2$ , причем

$$\|\bar{A}\| \leq B.$$

Согласно известному критерию [9], операторнозначная функция  $\bar{A}(k)$  из  $l_2$  в  $l_2$  является и аналитической, так как в силу равномерной сходимости рядов, определяющих элементы  $\bar{a}_{mn}$  матрицы  $\bar{A}$ , является аналитической функция

$$\psi(k) = X\bar{A}(k)Y = \sum_{m=0}^{\infty} x_m \sum_{n=0}^{\infty} \bar{a}_{mn} y_n,$$

где  $X, Y$  — произвольные множества, принадлежащие пространству  $l_2$ .

Если учесть, что соответствующая неоднородная задача для некоторого множества значений  $k$  имеет единственное решение [10], то все условия аналитической теоремы Фредгольма [11] будут выполняться. Из этой теоремы следует, что множество собственных значений поставленной задачи является дискретным, и для их приближенного определения может быть применен метод редукции.

4. Расчет зависимостей собственных значений поставленной задачи от величины отверстия  $\delta$  был проведен с помощью нахождения нулевых значений определителя усеченной системы (2.7). При этом в соответствии с результатами работы [6] за начало кривых зависимостей  $k_r(\delta) = k_r'(\delta) - ik_r''(\delta)$  ( $r = 1, 2, \dots$ ) были взяты корни уравнений (3.7), равные собственным значениям задачи для внутренней и внешней области по отношению к цилиндру с закрытым отверстием. Точность расчета контролировалась варьированием числа уравнений усеченной системы.

На фиг. 2 приведены расчетные зависимости собственных значений  $k_r(\delta)$ , соответствующих корню  $k_1(0) = 0,5012 - i0,6435$  функции  $H_1^{(1)}(k)$ , корню  $k_2(0) = 1,8406$  функции  $J_1(k)$  и корню  $k_3(0) = 3,8261$  функции  $J_0(k)$ . Для более полного физического представления о характере затухания процесса собственных колебаний на фиг. 3 приведены зависимости соответствующих логарифмических декрементов, которые вычисляются по формуле

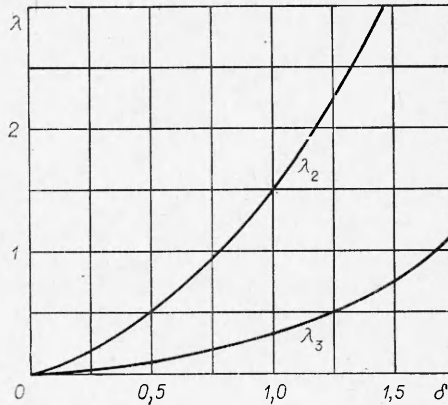
$$\lambda_r(\delta) = \frac{2\pi k_r''(\delta)}{k_r'(\delta)}.$$

Следует отметить, что возрастание значений  $k_r'(\delta)$  при увеличении  $\delta$  не противоречит тем представлениям, которые известны из приближенной теории резонаторов [1] о зависимости собственных частот колебаний газа от величины отверстия. В данной работе эти зависимости удалось получить до значений  $\delta > \pi/2$ . Для исследования же асимптотического поведения функций  $k_r(\delta)$  при  $\delta \rightarrow \pi$  и  $r \rightarrow \infty$ , видимо, целесообразно применять другие методы решения поставленной задачи.

Поступила 26 III 1980

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Лэмб Г. Динамическая теория звука. М., ГИФМЛ, 1960.
2. Reichardt H. Ausstrahlungsbedingungen für die Wellengleichung.— In: Abhandlungen aus dem Mathematischen Seminar Universität. Hamburg, 1960.
3. Schwarze G. Über die 1 und 2 äußere Randwertaufgabe der Schwingungsgleichung  $\Delta F + k^2 F = 0$ .— Mathematische Nachrichten, 1965, Bd 28, Ht 5/6.
4. Лакс П. Д., Филлипс Р. С. Теория рассеяния. М., Мир, 1971.
5. Арсеньев А. А. Об особенностях аналитического продолжения и резонансных свойствах решения задачи рассеяния для уравнения Гельмгольца.— ЖВММФ, 1972, т. 12, № 1.
6. Арсеньев А. А. О существовании резонансных полюсов и резонансов при рассеянии в случае краевых условий II и III рода.— ЖВММФ, 1976, т. 16, № 3.
7. Мухелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Наука, 1968.
8. Канторович Л. В., Акилов Г. П. Функциональный анализ. М., Наука, 1977.
9. Като Т. Теория возмущений линейных операторов. М., Мир, 1972.
10. Hayashi Yoshio. A singular integral equation approach to electromagnetic fields for circular boundaries with slots.— J. Appl. Sci. Res., B, 1965—1966, vol. 12, p. 331—359.
11. Рид М., Саймон Б. Методы современной математической физики. Т. 1. Функциональный анализ. М., Мир, 1977.



Фиг. 3