

К ЗАДАЧЕ ОБ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПОЛЕ ЭЛЕКТРОДА
С ПРИЭЛЕКТРОДНЫМ ПАДЕНИЕМ ПОТЕНЦИАЛА В СРЕДЕ
С ТЕНЗОРНОЙ ПРОВОДИМОСТЬЮ

Ю. П. Емец

(Киев)

Исследуется нелинейное распределение тока на электроде конечных размеров с приэлектродным слоем, в котором потенциал локально зависит от плотности тока. Электрод находится в контакте со средой, обладающей анизотропией проводимости, вызванной эффектом Холла.

Задача сведена к решению нелинейного интегро-дифференциального уравнения. Показано, что структура поля определяется величиной холловского параметра ωt и видом вольт-амперной характеристики в приэлектродном слое.

Согласно теоретическим рассуждениям, основанным на идеализированных предположениях относительно свойств проводников, диэлектриков и окружающей их среды, у электродов конечных размеров распределение тока становится существенно неравномерным с сингулярностями в концевых точках. Эта неравномерность растекания тока, как уже неоднократно отмечалось, усиливается в средах, в которых проявляется эффект Холла. В настоящее время получены все основные закономерности приближенной теории пространственных полей в потоках ионизованных газов и в полупроводниках. Выведенные следствия подтверждаются опытной проверкой [1,2].

Однако в отдельных случаях при сопоставлении теоретических расчетов с экспериментальными данными имеются расхождения, указывающие на ограниченность применения приближенной теории [3]. Можно отметить несколько наиболее важных физических явлений, не учтенных в исходных уравнениях и не отраженных в краевых условиях задач линейной теории, но, по-видимому, оказывающих существенное влияние на формирование поля. К этим явлениям следует отнести нелинейную проводимость среды в сильных электрических полях, наблюдаемую, например, в неравновесной плазме и в полупроводниках с «горячими электронами», а также контактные явления на границе разнородных сред. Учет новых факторов, характеризующих нелинейные свойства полей, как правило, чрезвычайно усложняет решения краевых задач. Тем не менее такое рассмотрение необходимо для анализа происходящих при этом процессов.

1. Рассмотрим в рамках феноменологической теории сплошной среды влияние падения потенциала в приэлектродном слое на распределение тока у электрода, граничащего с потоком анизотропно проводящей плазмы.

Применим теоретическое описание явлений в приэлектродном слое, предложенное Г. А. Любимовым и А. Б. Ватажиным и использованное ими же для расчета в линейном приближении двумерных полей в магнитогазодинамических каналах со скалярно проводящими потоками [4,5]. В этой теории делается два основных предположения:

- 1) толщина слоя считается малой по сравнению с характерным размером задачи;
- 2) падение потенциала в слое φ_* локально зависит от величины нормальной составляющей тока.

Вид функции φ_* определяется физико-химическими свойствами плазмы, материала электрода и устанавливается теоретическими расчетами или берется из экспериментов. В целом приэлектродные процессы отнесены к поверхности электрода и учитываются эффективным граничным условием $\varphi = \varphi_0 + \varphi_*(j_n)$, где φ_0 — действительный потенциал электрода. Иными

словами нормальная составляющая вектора плотности тока на поверхности согласована с некоторым дополнительным потенциалом, обусловленным чисто местным значением поля и предопределяемым граничными свойствами плазмы и поверхности электрода.

Положим, что электрод конечных размеров $ab = 2l$, $-l \leq x \leq l$ при $y = 0$ (остальные участки оси x — диэлектрики) находится в контакте с двумерным потоком несжимаемой анизотропно проводящей среды $\mathbf{v}(u(x, y), v(x, y), 0)$, заполняющим нижнюю полуплоскость. Внешнее магнитное поле $\mathbf{H}(0, 0, H_z)$ примем всюду однородным и значительно превышающим по величине собственное магнитное поле разыскиваемых токов, влиянием которого пренебрежем.

Основные уравнения теории электрического поля в этом случае

$$j_x(x, y) = \sigma_{xx}(H) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c} vH \right) + \sigma_{xy}(H) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{c} uH \right) \quad (1.1)$$

$$j_y(x, y) = \sigma_{yx}(H) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial x} + \frac{1}{c} vH \right) + \sigma_{yy}(H) \left(-\frac{\partial \Phi}{\partial y} - \frac{1}{c} uH \right)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial j_x}{\partial x} + \frac{\partial j_y}{\partial y} &= 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \quad \left(\begin{array}{l} \sigma_{xx}(H) = \sigma_{yy}(H), \text{ для электронов} \\ \sigma_{xy}(H) = -\sigma_{yx}(H), \sigma_{xx}(H) > 0 \\ \sigma_{xy}(H) < 0 \end{array} \right)$$

должны решаться с граничными условиями

$$\Phi = \Phi_0 + \Phi_*(j_y) \quad -l < x < l \quad \text{при } y = 0$$

$$j_y(x) = 0 \quad |x| > l \quad \text{при } y = 0, \quad \mathbf{j} \rightarrow 0 \quad \text{при } (x, y) \rightarrow \infty \quad (1.2)$$

$$\int_{-l}^l j_y(x, 0) dx = I, \quad v = 0 \quad \text{при } y = 0$$

Здесь используются общепринятые обозначения.

При написании граничных условий принято, что заданы зависимость $\Phi_*(j_y)$ и величина суммарного тока I , протекающего через электрод. Другие электроды, через которые замыкается ток, для упрощения расчетов отнесены к бесконечно удаленной точке. Компоненты тензора электропроводности σ_{xx} , σ_{xy} в (1.1) зависят только от магнитного поля.

Система (1.1) позволяет вести комплексный ток, который представим интегралом типа Коши

$$j(z) = j_x(x, y) - ij_y(x, y) = \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{j_x(x) dx}{x - z} \quad (z = x + iy) \quad (1.3)$$

$$(-l < x < l, \quad \text{Im } z < 0)$$

Это представление удовлетворяет граничным условиям (1.2) и при больших $|z|$ характеризуется разложением

$$j(z) = -\frac{z^{-1}}{\pi} \int_{-l}^l j_y(x) dx - \frac{z^{-2}}{\pi} \int_{-l}^l x j_y(x) dx - \dots = -\frac{I}{\pi z} + O(z^{-2}) \quad (1.4)$$

Продифференцируем первое граничное условие (1.2) по x

$$\frac{d\varphi(x)}{dx} - \frac{d\varphi_*(j_y)}{dj_y} \frac{dj_y(x)}{dx} = 0 \quad (-l < x < l, \quad y=0) \quad (1.5)$$

и запишем (1.5) с помощью первых двух уравнений (1.1) в виде

$$\beta(H) j_y(x) + j_x(x) + \sigma(H) F(j_y) \frac{dj_y(x)}{dx} = 0, \quad F(j_y) = \frac{d\varphi_*(j_y)}{dj_y} \quad (1.6)$$

Здесь электропроводность $\sigma(H)$ и холловский параметр $\beta(H)$ в магнитном поле определяются формулами

$$\sigma(\vec{H}) = \frac{\sigma_{xx}^2(\vec{H}) + \sigma_{xy}^2(\vec{H})}{\sigma_{xx}(\vec{H})}, \quad R(H) = \frac{\sigma_{xy}(H)}{H[\sigma_{xx}^2(H) + \sigma_{xy}^2(H)]} \quad (1.7)$$

$$\beta(H) = \sigma(H) R(H) H$$

Подставив в (1.6) вместо $j_x(x)$ граничное значение интеграла (1.3) на ab , получим для нахождения нормальной компоненты вектора плотности тока на электроде нелинейное сингулярное интегро-дифференциальное уравнение вида

$$\beta(H) j_y(H) + \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l \frac{j_y(t) dt}{t-x} + \sigma(H) F(j_y) \frac{dj_y(x)}{dx} = 0 \quad (-l < x, t < l) \quad (1.8)$$

где β и σ — постоянные при фиксированном H . При электродном явлении в (1.8) соответствует третий член с коэффициентом $F(j_y) = d\varphi_*/dj_y$, вид которого конкретизируется заданием вольт-амперной характеристики $\varphi_*(j_y)$.

2. Построить аналитические решения уравнения (1.8) не удастся. Однако свойства полей, описываемые им, можно установить из анализа некоторых частных решений, которые получаются численными методами.

Прежде всего отметим случай, когда потенциал в приэлектродном слое не зависит от тока, т. е. при $\varphi_* = \text{const}$, $F = 0$. Тогда уравнение (1.8) становится линейным сингулярным интегральным уравнением с разомкнутым контуром интегрирования и его решение, получаемое из решения соответствующей ему краевой задачи Римана, имеет вид [6,7]

$$\begin{aligned} j_x(x) &= \frac{\beta(H) I}{\sqrt{1 + \beta^2(H)}} (l+x)^{-1/2-\varepsilon} (l-x)^{-1/2+\varepsilon} \\ j_y(x) &= \frac{-I}{\sqrt{1 + \beta^2(H)}} (l+x)^{-1/2-\varepsilon} (l-x)^{-1/2+\varepsilon} \end{aligned} \quad (-l < x < l) \quad (2.1)$$

$$\varepsilon = \pi^{-1} \arctg \beta \quad (0 \leq \varepsilon < 1/2)$$

т. е. представляет собой известное решение задачи о распределении тока на идеальном электроде при анизотропии электропроводности окружающей его среды.

Переходя к численному решению уравнения (1.7), проинтегрируем его один раз

$$\beta(H) \int_0^x j_y(x) dx - \frac{1}{\pi} \int_{-l}^l j_y(t) \ln |t-x| dt + \sigma(H) \int_0^{j_y} F(j_y) dj_y = C = \text{const} \quad (2.2)$$

и примем, что вольт-амперная характеристика задана функцией $\Phi_* = aj_y + b$, где a и b — постоянные ($F = a$). Методом конечных разностей уравнение (2.2) приводится к системе алгебраических уравнений, которую запишем в безразмерном виде ($j^0 = j_y l / I$, $x^0 = x / l$; верхние индексы в последующих формулах опущены)

$$\frac{\beta}{n} \sum_{p=1}^p j_p - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{2n} j_k \left(\frac{2k-2p+1}{2n} \ln \left| \frac{2k-2p+1}{2n} \right| - \frac{2k-2p-1}{2n} \times \right. \quad (2.3)$$

$$\left. \times \ln \left| \frac{2k-2p-1}{2n} \right| - \frac{1}{n} \right) + \gamma j_p = C, \quad \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{2n} j_k = 2 \quad (\gamma = a\sigma(H))$$

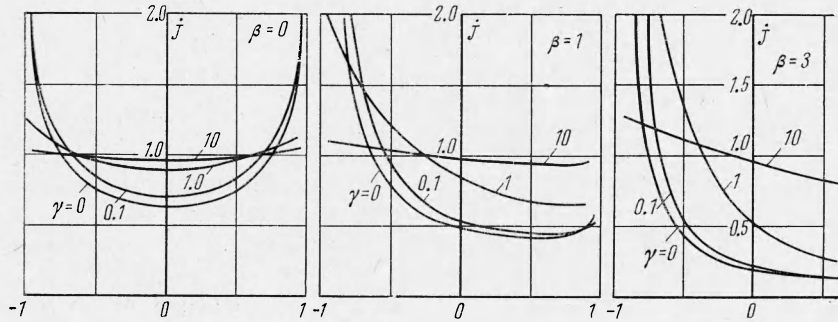
Последнее уравнение соответствует интегральному условию

$$\int_{-l}^l j_y(x) dx = I$$

в (1.2) и его необходимо включить в систему для определенности уравнений (2.3), поскольку после интегрирования уравнения (1.8) в правой части (2.2) появляется неизвестная постоянная C . Система уравнений (2.3) в точках

$$\xi = -1 + \frac{2p-1}{2n}, \quad -1 + \frac{k-1}{n} < \xi < \frac{k}{n} - 1 \quad (p, k = 1, \dots, 2n) \quad (2.4)$$

точно удовлетворяет уравнению (1.8) или эквивалентному ему уравнению (2.2).



Фиг. 1

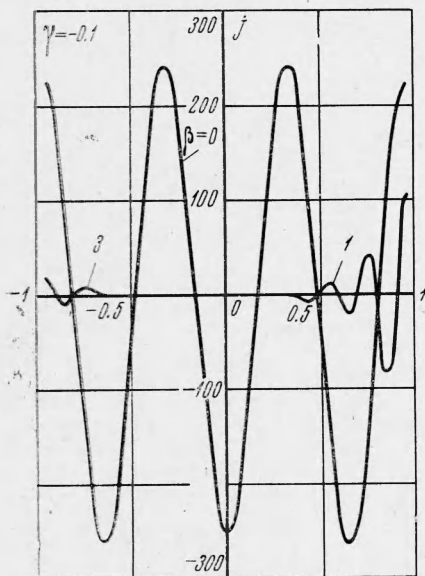
Фиг. 2

Фиг. 3

Результаты вычислений при помощи ЦВМ для трех значений холловского параметра $\beta(H) = 0, 1, 3$ и четырех значений безразмерного параметра $\gamma = a\sigma(H) = 0, 0.1, 1, 10$ ($a > 0$) приведены на фиг. 1, 2 и 3. Из вида кривых следует, что при всех β проявляется общее свойство — распределение нормальной компоненты плотности тока по длине электрода при увеличении параметра γ выравнивается. Этот результат можно объяснить следующим образом. В точках, где градиент тока отличен от нуля ($dj_y/dx \neq 0$), большим значениям j_y , согласно принятой возрастающей вольт-амперной характеристики, в приэлектродном слое соответствуют большие потенциалы Φ_* , что ограничивает рост j_y . Вследствие такого согласования между Φ_* и j_y распределение тока на электроде перестраивается, j_y уменьшается в области больших Φ_* и, напротив, увеличивается там, где Φ_* малые; неоднородность функции $j_y(x)$ уменьшается и при $\gamma \rightarrow \infty$ вообще исчезает ($dj_y/dx \rightarrow 0$). Отмеченное свойство поля проявляется в меньшей степени при увеличении β и уменьшении σ , последнее связано с тем, что $\gamma = a\sigma$ ($a = \text{const}$).

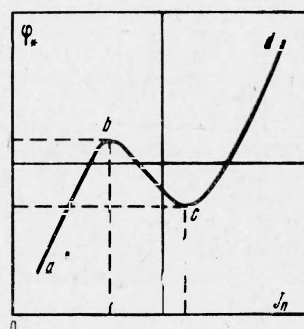
Совершенно иным становится распределение тока при подающей вольт-амперной характеристике ($a < 0$). Здесь рост j_y приводит к уменьшению Φ_* и неравномерность распределения тока у электрода должна возрастать. Однако предсказать вид функции $j_y(x)$ трудно. Решение системы уравнений (2.3) в этом случае зависит от взаимного со-

отношения между величинами β , a , σ и чувствительно к их изменению, малые варьирования коэффициентов в уравнении (1.8) приводят к большим изменениям плотности тока, который на электроде может становиться знакопеременным. В этом смысле можно говорить о неустойчивости распределения $j_y(x)$. Для примера на фиг. 4 приведены результаты решения уравнения для трех значений $\beta (H) = 0, 1, 3$ при $\gamma = -0.1$. Графики показывают, что возле электрода вследствие изменения знака $j_y(x)$ имеются вихри тока, форма которых сильно зависит от величины внешнего магнитного поля, или, точнее, от значения холловского параметра $\beta (H)$.



Фиг. 4

Если вольт-амперная характеристика $\Phi_*(j_y)$ содержит возрастающие и падающие участки (например, имеет N -образный вид; фиг. 5), то распределение тока будет обладать свойствами, присущими двум рассмотренным выше случаям при $a > 0$ и $a < 0$.



Фиг. 5

Возможно, что с наличием падающих участков вольт-амперной характеристики приэлектродного слоя связано образование экспериментально наблюдаемых на электроде дуг и пятен, а также возникновение флуктуаций тока и напряжения в нагрузке.

Поступила 12 X 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Louis I. F., Lothrop I., Brogan T. R. Fluid dynamic studies with a magnetohydrodynamic generator. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7, No. 3, pp. 362—374.
2. Баранский П. И., Емец Ю. П. Электрическое поле в круглой полупроводниковой пластине, помещенной в магнитное поле. *ПМТФ*, 1966, № 5, стр. 64—72.
3. Brederlow G., Zinko H. Measurement of potential distribution, elevation of electron temperature and voltage current characteristics of an alkali-seeded rare-gas Faraday-type MHD generator. *Electricity from MHD. Proc. Sympos., Warsaw, 1968; Vienna, 1968, vol. 1, pp. 409—417.*
4. Ватажин А. Б., Любимов Г. А. Влияние приэлектродных слоев на характеристики МГД-генератора. В сб. «Проблемы гидродинамики и механики сплошной среды», М., «Наука», 1969, стр. 93—102.
5. Ватажин А. Б. Электрические поля в магнитогидродинамических каналах при наличии приэлектродного падения потенциала. *ПММ*, 1966, т. 30, № 3, стр. 441—450.
6. Мусхелишвили Н. И. Сингулярные интегральные уравнения. М., Физматгиз, 1962.
7. Емец Ю. П. О распределении тока на проницаемых электродах при наличии эффекта Холла в потоке электропроводной среды. *ПМТФ*, 1966, № 3, стр. 35—4.