УДК 532.516

К ТЕОРИИ КАТЯЩИХСЯ ВОЛН

В. В. Пухначев
(*Новосибирск*)

Задача о катящихся волнах в слое жидкости, стекающей по вертикальной плоскости [1], рассматривается на базе полных уравнений Навье—Стокса с условиями на неизвестной свободной границе. Доказано существование однопараметрического семейства катящихся волн, ответвляющихся от течения типа Пуазейля.

1. Постановка задачи. Известно, что одним из возможных режимов течения жидкого слоя по вертикальной плоскости под действием тяжести является плоское движение с прямолинейными траекториями и плоской свободной поверхностью (это движение далее называется основным). Выберем в качестве масштабов длины, времени, скорости и давления величины b, b/V, V и ρV^2 соответственно. Здесь b — толщина слоя; $V=gb^2/3\nu$—среднее по толщине значение продольной скорости; ρ — плотность; ν — вязкость жидкости; g—ускорение силы тяжести. В безразмерных переменных скорость $\vec{V}$ и давление P основного движения имеют вид

$$\vec{V}=[3(1-x_2^2)/2, 0] \quad P=0.$$

Прямая $x_2=1$ соответствует «дну», а прямая $x_2=0$ — свободной границе.

Будем искать плоские движения типа бегущей волны, которые ответвляются от основного. Поле скоростей и давлений разыскивается в форме $\tilde{\vec{v}}=\vec{V}+\vec{v}$, $\tilde{p}=p/\mathrm{Re}$, где

$$\vec{v}=(u(x, y), v(x, y)); \ p=p(x, y); \ x=x_1-ct; \ y=x_2;$$

c — некоторый параметр (скорость волны); $\mathrm{Re}=Vb/\nu$ — число Рейнольдса. Требуя, чтобы функции $\tilde{\vec{v}}, \tilde{p}$ удовлетворяли уравнениям Навье—Стокса, приходим к системе уравнений относительно u, v, p:

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}(\triangle u-p_x)-\left[\frac{3}{2}(1-y^2)-c\right]u_x+3yv=uu_x+vu_y; \tag{1.1}$$

$$\frac{1}{\mathrm{Re}}(\triangle v-p_y)-\left[\frac{3}{2}(1-y^2)-c\right]v_x=uv_x+vv_y, \ u_x+v_y=0.$$

Решение системы (1.1) ищется в области $\Omega=\{x, y: |x|<\infty, \eta(x)<y<1\}$. Линия $y=1$ соответствует твердой стенке, на ней задано условие прилипания

$$u=v=0 \text{ при } y=1. \tag{1.2}$$

Линия $y=\eta(x)$ является свободной границей. На этой линии ставятся следующие условия:

$$\left\{\left[\frac{3}{2}(1-\eta^2)-c+u\right]\eta'-v\right\}_{|y=\eta(x)}=0; \tag{1.3}$$

$$[(1-\eta'^2)(u_y+v_x-3\eta)+2\eta'(v_y-u_x)_{|y=\eta(x)}=0; \tag{1.4}$$

$$\{-p+2(1+\eta'^2)^{-1}[v_y-\eta'(u_y+v_x-3\eta)+\eta'^2u_x]\}_{y=\eta(x)}= \tag{1.5}$$

$$=-\mathrm{Re}\mathrm{W}^{-1}(1+\eta'^2)^{-3/2}\eta''.$$

Здесь $\mathrm{W}=\rho V^2b/\sigma$ — число Вебера (безразмерный параметр, обратно пропорциональный коэффициенту поверхностного натяжения σ); $\eta'=$

$=d\eta/dx$, $\eta''=d^2\eta/dx^2$. Условие (1.3) есть следствие кинематического условия на свободной границе. Условие (1.4) означает отсутствие касательного напряжения на свободной границе, а условие (1.5) — равенство нормального напряжения капиллярному давлению.

Дополнительно на решения системы (1.1) и функцию η накладывается условие периодичности по x

(1.6) $u(x+h,\ y)=u(x,\ y);\ v(x+h,y)=v(x,\ y);\ p(x+h,y)=p(x,y);\ \eta(x+h)=\eta(x),$

а также условие

$$\int_0^h \eta(x)\,dx=0, \tag{1.7}$$

фиксирующее среднюю глубину жидкости. Условие (1.7) позволяет исключить тривиальные решения задачи (1.1)—(1.6), в которых $v=p=0,\eta=\mathrm{const}$. Помимо перечисленных, в совокупность условий задачи следовало бы включить условие $\eta(x)<1$, обеспечивающее отсутствие контакта свободной поверхности с дном. Однако ниже найдены только малые решения типа бегущей волны, ответвляющиеся от основного, для которых указанное условие заведомо будет выполнено.

Математическая задача состоит в отыскании функции η и решения $u,\ v,\ p$ системы (1.1) в области Ω так, чтобы удовлетворялись условия (1.2)—(1.7). Задача (1.1)—(1.7) при любых значениях параметров Re, W, c и h имеет тривиальное решение $\eta=0,\ u=v=p=0$. Цель данной работы — доказать существование нетривиальных решений этой задачи.

Нетривиальные решения задачи (1.1)—(1.7) будем называть катящимися волнами. Приближенные теории катящихся волн, основанные па различных приближенных решениях поставленной задачи, даны в работах [1—5] и др. В каждой из этих работ строится однопараметрическое, с точностью до сдвига по x, семейство приближенных решений задачи (1.1)—(1.7). В данной работе устанавливается существование однопараметрического семейства решений задачи о катящихся волнах в точной постановке.

2. Вспомогательная задача с фиксированной границей. Для исследования задачи (1.1)—1.7) применяется вариант метода расщепления, изложенного в работе [6]. Обозначим через $C_h^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ подпространство функций $\varphi(x,\ y)$, принадлежащих классу Гёльдера $C^{l+\alpha}$ в области $\overline{\Omega}$ и периодических по x с периодом h ($l\geqslant 0$ — целое, $0<\alpha<1$). Через $C_{h,0}^{l+\alpha}$ (Re^1) (коротко $C_{h,0}^{l+\alpha}$) обозначается подпространство h-периодических функций с нулевым средним пространства $C^{l+\alpha}(\mathrm{Re}^1)$ (здесь Re^1— вещественная прямая). При фиксированном $\eta(x)$ рассмотрим задачу об определении в области Ω решения $\vec{v},\ p_0$ системы (1.1), удовлетворяющего условиям (1.2)—(1.4), (1.6) и дополнительному условию

$$\int_0^h\int_{\eta(x)}^1 p_0\,dx\,dy=0 \tag{2.1}$$

(эта задача называется вспомогательной по отношению к исходной задаче (1.1)—(1.7)).

Л е м м а 2.1. Существует такое ε ($0<\varepsilon<1$) и такое $\mathrm{Re}_0>0$, что при $\eta\in C_{h,0}^{3+\alpha}$, $|\eta|^{(3+\alpha)}\leqslant\varepsilon$ и $\mathrm{Re}\in[0,\mathrm{Re}_0]$ задача (1.1)—(1.4), (1.6), (2.1) имеет решение $\vec{v}\in \vec{C}_h^{2+\alpha}(\overline{\Omega})$, $p_0\in C_h^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$; это решение единственно в некотором шаре $|\vec{v}|_\Omega^{(2+\alpha)} + |p_0|_\Omega^{(1+\alpha)} \leqslant \text{const}$ пространства $\vec{C}_h^{2+\alpha}(\overline{\Omega}) \times C_h^{1+\alpha}(\overline{\Omega})$.

(Здесь и в дальнейшем выражения $|\cdot|^{(l+\alpha)}$, $|\cdot|_\Omega^{(l+\alpha)}$ означают соответствующие гёльдеровские нормы; запись $v \in \vec{C}_h^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$ означает, что каждая компонента вектора $\vec{v}$ принадлежит пространству $C_h^{l+\alpha}(\overline{\Omega})$.)

Приведем основные моменты доказательства леммы. Отобразим область Ω на полосу $\Pi=\{z_1, z_2\colon |z_1| < \infty,\ 0 < z_2 < 1\}$ плоскости z_1, z_2 с помощью преобразования

$$z_1 = x, \quad z_2 = \frac{y-\eta(x)}{1-\eta(x)}.$$

Вследствие (1.1) функции $\vec{u}(z_1, z_2)=\vec{v}(x, y)$, $q(z_1, z_2)=p_0(x,y)$ удовлетворяют в полосе Π системе уравнений

$$\Delta \vec{u}+\mathrm{Re}(\vec{a}\cdot \nabla\vec{u}+\vec{u}\cdot\nabla\vec{a}) - \nabla q=\vec{f},\quad \nabla\cdot\vec{u}=f_3, \tag{2.2}$$

где $\vec{a} = (c - 3(1 - z_2^2)/2, 0)$; ∇ и Δ—градиент и лапласиан по переменным z_1, z_2. Условия (1.2)—(1.4), (1.6), (2.1) порождают следующие краевые условия для системы (2.2):

$$\vec{u}=0 \text{ при } z_2=1; \tag{2.3}$$

$$u_2+(c - 3/2)\eta'=f_4 \text{ при } z_2=0; \tag{2.4}$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial z_2} + \frac{\partial u_2}{\partial z_1} - 3\eta = f_5 \text{ при } z_2 = 0; \tag{2.5}$$

$$\vec{u}(z_1+h,z_2)=\vec{u}(z_1, z_2),\quad q(z_1+h,z_2)=q(z_1, z_2); \tag{2.6}$$

$$\int_0^h\int_0^1 q\,dz_1dz_2 = \varkappa. \tag{2.7}$$

Выражения для компонент f_1, f_2 вектора $\vec{f}$, функций f_3, f_4, f_5 и постоянной $\varkappa$ здесь не приводятся. Для нас важно лишь то, что при $\vec{u}\in \vec{C}_h^{2+\alpha}(\overline{\Pi})$, $q \in C_h^{1+\alpha}(\overline{\Pi})$, $\eta \in C_{h,0}^{3+\alpha}(|\eta|^{(3+\alpha)} \leqslant \varepsilon_0 < 1)$, $\mathrm{Re}\in [0, \mathrm{Re}_0]$ и $c\in [-N, N](|N|< <\infty)$ справедливы включения $f_5 \in C_h^{1+\alpha}(\mathrm{Re}^1)$, $\vec{f} \in \vec{C}_h^{\alpha}(\overline{\Pi})$, $f_3 \in C_h^{1+\alpha}(\overline{\Pi})$, $f_4\in C_h^{2+\alpha}(\mathrm{Re}^1)$ и имеют место оценки

$$|\vec{f}|_\Pi^{(\alpha)}\leqslant C_1|\eta|^{(3+\alpha)}(|\vec{u}|_\Pi^{(2+\alpha)} + |q|_\Pi^{(1+\alpha)} + C_1(|\vec{u}|_\Pi^{(2+\alpha)})^2; \tag{2.8}$$

$$|f_3|_\Pi^{(1+\alpha)} + |f_4|_{\mathrm{Re}^1}^{(2+\alpha)} + |f_5|_{\mathrm{Re}^1}^{(1+\alpha)} + |\varkappa| \leqslant C_2|\eta|^{(3+\alpha)}|\vec{u}|_\Pi^{(2+\alpha)} + C_2(|\eta|^{(3+\alpha)})^2,$$

причем C_1, C_2 зависят лишь от ε_0, Re_0 и N (здесь и далее символы C_k, $k=1, 2, 3,\ldots$ обозначают положительные постоянные). Кроме того, если функция $\overline{f}_3$ соответствует решению $\overline{\vec{u}}$, $\vec{q}$ вспомогательной задачи, в которой η заменено на $\overline{\eta} \in C_{h,0}^{3+\alpha}$, $|\overline{\eta}|^{(3+\alpha)}\leqslant \varepsilon_0$, то

$$|f_3 - \overline{f}_3|_\Pi^{(1+\alpha)}\leqslant C_3|\eta - \overline{\eta}|^{(3+\alpha)}(|\vec{u}|_\Pi^{(\alpha)} + |\overline{\vec{u}}|_\Pi^{(\alpha)} + \tag{2.9}$$
$$+ C_3|\vec{u} - \overline{\vec{u}}|_\Pi^{(\alpha)}(|\eta|^{(3+\alpha)} + |\overline{\eta}|^{(3+\alpha)}),$$

где C_3 зависит только от ε_0, Re_0 и N. Аналогичными свойствами непрерывности в смысле Липшица обладают функционал $\varkappa$ и дифференциальные выражения $\vec{f}$, f_4 и f_5, трактуемые как операторы над η, $\vec{u}$, q.

Разрешимость задачи (2.2)—(2.7) при малых η доказывается методом последовательных приближений. За начальное приближение u^0, q^0 принимается решение линейной задачи

(2.10) $$\nabla \vec{u}^0 + \mathrm{Re}(\vec{a}\cdot\nabla\vec{u}^0 + \vec{u}^0\cdot\nabla\vec{a}) - \Delta q^0 = 0,\quad \nabla\cdot\vec{u}^0 = 0;$$

(2.11) $$\vec{u}^0 = 0 \text{ при } z_2 = 1;$$

(2.12) $$u_2^0 + (c - 3/2)\eta' = 0 \quad \text{при } z_2 = 0;$$

(2.13) $$\frac{\partial u_1^0}{\partial z_2} + \frac{\partial u_2^0}{\partial z_1} - 3\eta = 0 \quad \text{при } z_2 = 0;$$

(2.14) $$\vec{u}^0(z_1 + h, z_2) = \vec{u}^0(z_1, z_2),\quad q^0(z_1 + h, z_2) = q^0(z_1, z_2);$$

(2.15) $$\int_0^h\int_0^1 q^0 dz_1 dz_2 = 0.$$

Пусть $\vec{w}$ — произвольная соленоидальная h-периодическая по z_1 вектор-функция класса $\vec{C}^2(\overline{\Pi})$, удовлетворяющая условиям (2.11) и $w_2 = 0$, $\partial w_1/\partial z_2 + \partial w_2/\partial z_1 = 0$ при $z_2 = 0$; q — произвольная h-периодическая по z_1 функция класса $C^1(\overline{\Pi})$ и ω — прямоугольник $0 < z_1 < h$, $0 < z_2 < 1$. Справедливы неравенства

$$-\int_\omega [\Delta\vec{w} + \mathrm{Re}(\vec{a}\cdot\nabla\vec{w} + \vec{w}\cdot\nabla\vec{a}) - \nabla q]\cdot\vec{w}dz \geqslant$$

$$\geqslant \int_\omega\left[2\sum_{j,k=1}^{2}\left(\frac{\partial w_j}{\partial z_k} + \frac{\partial w_k}{\partial z_j}\right)^2 - 3|\vec{w}|^2\right]dz \geqslant$$

$$\geqslant (2 - 3\mathrm{Re}C_4C_5)C_4(1 + C_5)^{-1}(\|\vec{w}\|_{2,w}^{(1)})^2,$$

где $C_4(h)$, $C_5(h)$ — константы в неравенствах Корна и Пуанкаре для области ω [6]; $\|\cdot\|_{2,\omega}^{(1)}$ — обозначение нормы в пространстве Соболева $W_2^1(\omega)$. Выберем $\mathrm{Re}_0 = 1/2C_4C_5$ и зафиксируем его. Тогда при $\mathrm{Re} \in (0, \mathrm{Re}_0]$ решение задачи (2.10)—(2.15) допускает энергетическую априорную оценку. Наличие априорной оценки $\|\vec{u}^0\|_{2,\omega}^{(1)}$ дает возможность доказать существование и единственность обобщенного решения этой задачи (схема доказательства близка к изложенной в работе [6]). Следуя методике работы [7], можно показать, что при любом $\eta \in C_{h,0}^{3+\alpha}$ обобщенное решение $\vec{u}^0$ задачи (2.10) — (2.15) принадлежит классу $\vec{C}_h^{2+\alpha}(\overline{\Pi})$ (соответствующее $q^0 \in C_h^{1+\alpha}(\overline{\Pi})$) и верна оценка

(2.16) $$|\vec{u}^0|_\Pi^{(2+\alpha)} + |q^0|_\Pi^{(1+\alpha)} \leqslant C_6|\eta|^{(3+\alpha)}.$$

Последующие приближения $\vec{u}^{n+1}$, $q^{n+1} (n \geqslant 0)$ к решению задачи (2.2)—(2.7) определяются из линейных неоднородных задач типа (2.10) — (2.15). Правые части соответствующих уравнений и краевых условий получаются при подстановке в выражения $\vec{f}, \ldots, \varkappa$ функций $\vec{u}^n$, q^n. Исходя из начальной оценки (2.16), неравенств (2.8), (2.9) и аналогичных последнему неравенств для $|\vec{f} - \overline{\vec{f}}|_\Pi^{(\alpha)}, \ldots, |\varkappa - \overline{\varkappa}|$, удается доказать сходимость последовательности $\{\vec{u}^n, q^n\}$ к решению задачи (2.2)—(2.7), если $|\eta|^{(3+\alpha)} \leqslant \varepsilon$ и

$\varepsilon \in [0, \varepsilon_0]$, где $\varepsilon_0 > 0$ достаточно мало. (Утверждение о разрешимости вспомогательной задачи может быть усилено. В формулировке леммы 2.1 в качестве Re_0 можно выбрать любое число, меньшее критического числа Рейнольдса для течения Пуазейля в плоском канале.)

На основании леммы 2.1 при $\mathrm{Re} \in [0, \mathrm{Re}_0]$ определен оператор A, ставящий в соответствие функции $\eta \in C_{h,0}^{3+\alpha}$ с $|\eta|^{(3+\alpha)} \leqslant \varepsilon$ выражение

(2.17) $A(\eta) = \{-p_0 + 2(1+\eta'^2)^{-1}[v_y - \eta'(u_y + v_x - 3\eta) + \eta'^2 u_x]\}|_{y=\eta(x)}$,

причем $A[\eta(x)] \in C_h^{1+\alpha}(\mathrm{Re}^1)$. Заметим, что функция p_0 отличается на постоянную от составляющей p решения задачи (1.1)—(1.7), так что $p = p_0 + C$. Подставляя выражение (2.17) в неиспользованное еще условие на свободной границе (1.5) и исключая постоянную C, приходим к соотношению

(2.18) $$B(\eta) \equiv A(\eta) - \overline{A} + \mathrm{ReW}^{-1}(1+\eta'^2)^{-3/2}\eta'' = 0,$$

где $\overline{A}$ означает среднее значение функции $A[\eta(x)]$ на интервале $(0, h)$. Оператор B определен в шаре $|\eta(x)|^{3+\alpha} \leqslant \varepsilon$ пространства $C_{h,0}^{3+\alpha}$ и действует в пространство $C_{h,0}^{1+\alpha}$. Операторное уравнение (2.18) эквивалентно задаче о катящихся волнах (1.1)—(1.7).

Определим функции $\vec{v}^0 = (u^0, v^0)$ и p_0^0 соотношениями

$$\vec{v}^0(x, y) = \vec{u}^0(z_1, z_2), \quad p_0^0(x, y) = q^0,$$

где $\vec{u}^0$, q^0 — решение задачи (2.10)—(2.15). Можно видеть, что $\vec{v}^0$, p_0^0 определяют решение линеаризованной вблизи $\eta = 0$ задачи (1.1)—(1.4), (1.6), (2.1), в которой условия (1.3), (1.4) снесены на невозмущенную свободную границу $\eta = 0$. Отметим, что $\vec{v}^0 \in C_h^{2+\alpha}(\overline{\Pi})$, $p_0^0 \in C_h^{1+\alpha}(\overline{\Pi})$, если $\eta \in C_{h,0}^{3+\alpha}$. Кроме того, вследствие (2.10)—(2.15) и (1.7) среднее значение функций $v_y^0(x, 0)$, $p_0^0(x, 0)$ на интервале $(0, h)$ равно нулю. Поскольку отображение $\eta \to (\vec{v}^0, p_0^0)$ является линейным, оно определяет линейный оператор

(2.19) $$L(\eta) = (-p_0^0 + 2v_y^0)|_{y=0},$$

действующий из $C_{h,0}^{3+\alpha}$ в $C_{h,0}^{1+\alpha}$.

Лемма 2.2. Оператор B дифференцируем по Фреше в шаре $|\eta|_{h,0}^{(3+\alpha)} \leqslant \varepsilon$. Его производная Фреше в нуле B_0' дается равенством

(2.20) $$B_0'(\eta) = L(\eta) + \mathrm{ReW}^{-1}\eta''.$$

Из определения производной Фреше и равенства $B(0) = 0$ вытекает представление $B(\eta) = B_0'(\eta) + F(\eta)$, где $|F(\eta)|^{(1+\alpha)} = 0(|\eta|^{(3+\alpha)})$ при $|\eta|^{(3+\alpha)} \to 0$. Нам потребуется более точная информация об операторе F. Она содержится в следующем утверждении.

Лемма 2.3. Для любых $\eta, \zeta \in C_{h,0}^{3+\alpha}$, таких, что $|\eta|^{(3+\alpha)}, |\zeta|^{(3+\alpha)} \leqslant \varepsilon$, справедлива оценка

(2.21) $$|F(\eta) - F(\zeta)|^{(1+\alpha)} \leqslant C_7 |\eta - \zeta|^{(3+\alpha)}(|\eta|^{(3+\alpha)} + |\zeta|^{(3+\alpha)}),$$

где C_7 не зависит от η, ζ.

Доказательства лемм 2.2, 2.3 несложны, но кропотливы и здесь не проводятся. Вследствие (2.20) и определения $F(\eta)$ операторное уравнение (2.18) может быть переписано в виде

(2.22) $$L(\eta) + \mathrm{ReW}^{-1}\eta'' + F(\eta) = 0.$$

3. Исследование свойств одного линейного оператора. Дальнейший ход исследования задачи о катящихся волнах состоит в сведении ее к операторному уравнению вида $\eta=\Phi(\eta)$, где Φ — оператор, дифференцируемый в шаре $|\eta|^{(3+\alpha)}\leqslant\varepsilon$ пространства $C_{h,0}^{3+\alpha}$, причем $\Phi(0)=0$, а производная Фреше Φ_0' является вполне непрерывным оператором. Для того чтобы осуществить такое сведение, необходимо изучить свойства оператора L.

Будет удобно распространить оператор L на комплексно-значные функции и рассматривать его как оператор из ${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$ в ${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{1+\alpha}$ (${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{l+\alpha}$—пространство функций вида $\varphi(x)+i\psi(x)$, где φ,ψ— вещественные функции класса $C_{h,0}^{l+\alpha}$). Далее n обозначает целое число, отличное от нуля, $\beta=2\pi/h$.

Лемма 3.1. Функции $\exp(in\beta x)$ являются собственными функциями оператора L.

Для доказательства заметим, что если $\eta=\exp(in\beta x)$, то функции v^0, p_0^0 вследствие (2.10)—(2.15) имеют вид

$$v^0=\chi_n(y)\exp(in\beta x),\qquad p_0^0=\gamma_n(y)\exp(in\beta x).$$

Отсюда и из определения (2.19) оператора L следует утверждение леммы.

Итак, $L[\exp(in\beta x)]=\lambda_n\exp(in\beta x)$. Разделяя переменные в задаче (2.10)—(2.15), получаем представление собственных чисел λ_n оператора L в виде

$$\lambda_n=-\frac{1}{(n\beta)^2}\dddot{\varphi}(0)+3\dot{\varphi}(0)-\frac{i\mathrm{Re}s}{n\beta}\dot{\varphi}(0),\tag{3.1}$$

где $\varphi=\varphi(y,\ \mathrm{Re},s,\ n\beta)$ — решение уравнения Орра — Зоммерфельда;

$$\ddddot{\varphi}-2k^2\ddot{\varphi}+k^4\varphi+ik\mathrm{Re}[(s+3y^2/2)\ (\ddot{\varphi}-k^2\varphi)-3\varphi]=0,\tag{3.2}$$

удовлетворяющее краевым условиям

$$\varphi(0)=-iks,\ \ddot{\varphi}(0)=-3ik+ik^3s,\ \varphi(1)=\dot{\varphi}(1)=0,\tag{3.3}$$

и введены обозначения $s=c-3/2$, $k=n\beta$; точка обозначает дифференцирование по y.

Обозначим через L_0 оператор L при $\mathrm{Re}=0$ и положим $\delta L=L-L_0$. Собственные числа λ_{n0} оператора L_0 вычисляются явно:

$$\lambda_{n0}=\frac{ik^2}{\operatorname{ch}k\operatorname{sh}k-k}[2s(\operatorname{ch}^2k+k^2)-3]\tag{3.4}$$

($k=n\beta$). Ввиду вещественности s все λ_{n0} чисто мнимые. При $n\to\infty$ справедливо представление

$$\lambda_{n0}=2is(n\beta)^2\operatorname{sign}n+O(e^{-|n|\beta}).\tag{3.5}$$

Оператор L отличается от L_0 подчиненными членами, малыми вместе с Re. Доказывается, что при $\mathrm{Re}\in[0,\mathrm{Re}_0]$ и любом целом $n\neq0$ выполнена оценка

$$|\lambda_n-\lambda_{n0}|\leqslant C_8\mathrm{Re}(|n|\beta+1),\tag{3.6}$$

где C_8 не зависит от Re и s при $0\leqslant\mathrm{Re}\leqslant\mathrm{Re}_0$, $|s|\leqslant N$ (N — любое положительное число). Доказательство оценки (3.6) опускается. Оно использует стандартную технику асимптотических разложений решений линейных обыкновенных уравнений, содержащих большой параметр (см., например, [8]).

Лемма 3.2. Существует такое $\gamma > 0$, что при $\mathrm{Re} \in [0, \mathrm{Re}_0]$, $|s| \leqslant N$ оператор $B_0' - \gamma$ имеет обратный $(B_0' - \gamma)^{-1} : C_{h,0}^{1+\alpha} \to C_{h,0}^{3+\alpha}$.

Доказательство. Согласно определению (2.20), $B_0' = L_0 + \mathrm{Re}W^{-1} \times \times d^2/dx^2 + \delta L$. Функции $\exp(in\beta x)$ — собственные функции оператора $B_0' - \delta L$, которым соответствуют собственные числа $\lambda_{n,0} - \mathrm{Re}W^{-1}(n\beta)^2$. Отсюда и из (3.5) следует: если $(B_0' - \delta L)(f) \in {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{1+\alpha}$ и $f \in {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{1+\alpha}$, то $f \in {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$. Из определения операторов L_0, δL и оценок решения задачи (2.10) — (2.15) в классе Гёльдера вытекает, что $\delta L(f) \in {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{2+\alpha}$, если $f \in {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$. Это означает, что оператор $D = (B_0' - \delta L)^{-1}(\delta L - \gamma)$ вполне непрерывен в ${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$, а оператор $I + D$ является фредгольмовым. Для обратимости оператора $I + D$ достаточно отсутствие нетривиальных решений у уравнения $(I + D)(f) = 0$. Всякое решение этого уравнения класса ${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$ представимо в виде $\Sigma f_n \exp(in\beta x)$, где коэффициенты f_n подчинены условиям

$$[\lambda_n - \mathrm{Re}W^{-1}(n\beta)^2 - \gamma] f_n = 0.$$

Выбирая $\gamma = C_\xi^2 \mathrm{Re}_0 W/2$ и учитывая (3.4), (3.6), получаем, что все $f_n = 0$, если $\mathrm{Re} \in [0, \mathrm{Re}_0]$. В силу тождества $(B_0' - \delta L)(I + D) = B_0' - \gamma$ существование операторов $(I + D)^{-1}$, $(B_0' - \delta L)^{-1}$ влечет существование оператора $(B_0' - \gamma)^{-1} : {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{1+\alpha} \to {}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$. Для завершения доказательства леммы остается заметить, что оператор $(B_0' - \gamma)^{-1}$ переводит вещественные функции в вещественные.

Ясно, что оператор $(B_0' - \gamma)^{-1}$ можно рассматривать и как оператор, действующий в пространстве ${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$. Исходя из оценок шаудеровского типа для решений задачи (2.10)—(2.15), можно установить полную непрерывность этого оператора в ${}^{\mathrm{com}}C_{h,0}^{3+\alpha}$ (а следовательно, и в вещественном пространстве $C_{h,0}^{3+\alpha}$). Обозначим через ${}^{\mathrm{com}}L_2'$ подпространство комплексного пространства ${}^{\mathrm{com}}L_2(0, h)$, состоящее из функций с нулевым средним значением на интервале $(0, h)$. Оператор $(B_0' - \gamma)^{-1}$ может быть расширен до вполне непрерывного оператора в ${}^{\mathrm{com}}L_2'$, поскольку он имеет полную в ${}^{\mathrm{com}}L_2'$ систему собственных функций $\{\exp(in\beta x)\}$, которым отвечают собственные значения

$$\mu_n = [\lambda_n - \mathrm{Re}W^{-1}(n\beta)^2 - \gamma]^{-1}. \tag{3.7}$$

Собственные числа μ_n являются комплексными. Однако, если μ_n — вещественное собственное число, то оно является по меньшей мере двукратным; соответствующие (вещественные) собственные функции — $\cos(n\beta x)$ и $\sin(n\beta x)$. Двукратность вещественного спектра оператора $(B_0' - \gamma)^{-1}$ связана с инвариантностью задачи (2.10)—(2.15) относительно переноса по x.

Лемма 3.3. При достаточно малом $\mathrm{Re} > 0$ существуют значения s и β такие, что оператор $(B_0' - \gamma)^{-1}$ имеет двукратное собственное число $\mu_1 = -\gamma^{-1}$.

Доказательство. Вследствие (3.7) собственному числу $\mu_1 = -\gamma^{-1}$ оператора $(B_0' - \gamma)^{-1}$ соответствует собственное число $\lambda_1 = \mathrm{Re}W^{-1}\beta^2$ оператора L. Покажем, что при малых Re система уравнений относительно s и β

$$\begin{aligned} &\mathrm{Real}\lambda_1(\mathrm{Re}, s, \beta) - \mathrm{Re}W^{-1}\beta^2 = 0; \\ &\mathrm{Im}\lambda_1(\mathrm{Re}, s, \beta) = 0 \end{aligned} \tag{3.8}$$

имеет вещественное решение.

Обозначим $\delta\lambda_1=\lambda_1-\lambda_{10}$, где λ_{10} определяется формулой (3.4), в которой следует положить $k=\beta$. Из определения (3.1)—(3.3) собственных чисел оператора L вытекает оценка

$$|\delta\lambda_1|\leqslant C_9\mathrm{Re},$$

где C_9 не зависит от Re, s, β при $0\leqslant \mathrm{Re}\leqslant \mathrm{Re}_0$, $|s|\leqslant N$, $0\leqslant\beta\leqslant\beta_0$ (β_0 — произвольное положительное число). Кроме того, из определения λ_n следует представление $\lambda_n=\Lambda(\mathrm{Re},\ s,\ n\beta)$, где Λ — некоторая стандартная (гладкая) функция. Отсюда и из оценки (3.6) получим неравенство

$$|\delta\lambda_1|\leqslant C_{10}\mathrm{Re}\beta \tag{3.9}$$

при $\mathrm{Re}\in[0,\mathrm{Re}_0]$, $|s|\leqslant N$, $\beta\geqslant\beta_0$, причем C_{10} не зависит от Re, s и β.

При фиксированном $\beta\geqslant 0$ рассмотрим второе из соотношений (3.8) как уравнение относительно s. Это уравнение может быть записано в виде

$$s=\frac{3}{2(\mathrm{ch}^2\beta+\beta^2)}-\frac{\mathrm{ch}\,\beta\,\mathrm{sh}\,\beta-\beta}{2\beta^2(\mathrm{ch}^2\beta+\beta^2)}\mathrm{Im}\delta\lambda_1(\mathrm{Re},s,\beta). \tag{3.10}$$

Учитывая (3.6), получим априорную оценку решений (3.10):

$$\left|s-\frac{3}{2(\mathrm{ch}^2\beta+\beta^2)}\right|\leqslant\frac{C_{11}C_8(N)\,\mathrm{Re}\,\beta}{\beta^2+1}, \tag{3.11}$$

где C_{11}— некоторая абсолютная постоянная. Выберем некоторое $N\geqslant 2$ и зафиксируем его. Тогда при $0\leqslant\mathrm{Re}\leqslant\mathrm{Re}_1=\min\,(\mathrm{Re}_0,\ 1/C_{11}C_8\,(N))$ и любом $\beta\geqslant 0$ будет выполнено $|s|\leqslant 2$.

Чтобы доказать существование решения (3.10), следует оценить величину производной $\partial(\mathrm{Im}\delta\lambda_1)/\partial s$. Оказывается, что при любых $\beta\geqslant 0$, $\mathrm{Re}\in[0,\ \mathrm{Re}_0]$ и s, $|s|\leqslant N$ справедлива оценка

$$\left|\frac{\partial}{\partial s}(Im\delta\lambda_1)\right|\leqslant C_{12}(N)\,\mathrm{Re}. \tag{3.12}$$

Доказательство этой оценки несложно, но громоздко и здесь не приводится. Ввиду (3.11), (3.12) существует такое $\mathrm{Re}_2(0<\mathrm{Re}_2\leqslant\mathrm{Re}_1)$, что при $\mathrm{Re}\in[0,\ \mathrm{Re}_2]$ и любом $\beta\geqslant 0$ уравнение (3.10) имеет единственное на отрезке $|s|\leqslant 2$ решение s_*. Это решение является непрерывной функцией параметров Re и β.

Обозначая

$$\xi(\mathrm{Re},\ \beta)=\mathrm{Real}\lambda_1[\mathrm{Re},\ s_*(\mathrm{Re},\ \beta),\beta]-\mathrm{ReW}^{-1}\beta^2, \tag{3.13}$$

перепишем первое уравнение (3.8) в виде

$$\xi(\mathrm{Re},\ \beta)=0. \tag{3.14}$$

Функция ξ непрерывна в области $0\leqslant\mathrm{Re}\leqslant\mathrm{Re}_2$, $\beta\geqslant 0$ и $\xi(0,\ \beta)=0$. Соотношения (3.13), (3.4) и (3.9) показывают, что $\xi\to-\infty$ при $\beta\to-\infty$ и любых $W>0$, $\mathrm{Re}\in(0,\mathrm{Re}_2)$. Таким образом, для разрешимости уравнения (3.14) при малых Re достаточно установить, что $\xi(\mathrm{Re},0)>0$.

Для доказательства этого факта воспользуемся вытекающим из (3.1)—(3.3) представлением

$$\mathrm{Real}\lambda_1=\mathrm{Re}\lambda_{11}+\tau(\mathrm{Re},\beta), \tag{3.15}$$

где $\tau=O(\mathrm{Re}^2)$ при $\mathrm{Re}\to 0,\beta\in[0,\beta_0]$ и $\lambda_{11}(\beta)=-\frac{i}{\beta^2}\dddot{\psi}(0)+3\dot{\psi}(0)-\frac{is_0}{\beta}\dot{\psi}_0(0)$.

Здесь функция $\varphi_0(y)$ есть решение краевой задачи (3.1), (3.2) при $\mathrm{Re}=0$, $s_0=s_*(0, \beta)=3/2(\mathrm{ch}^2\beta+\beta^2)$ (3.10), (3.11), а $\psi(y)$ удовлетворяет уравнению

$$\dddot{\psi} - 2\beta^2\ddot{\psi}+\beta^4\psi=-i\beta[(s_0+3y^2/2)\ (\ddot{\varphi}_0-\beta^2\varphi_0)-3\varphi_0]$$

и краевым условиям $\psi(0) = \ddot{\psi}(0) = \psi(1) = \dot{\psi}(1) = 0$ (отметим, что функция φ_0 принимает чисто мнимые значения). Несложные вычисления дают значение $\lambda_{11}(0)=18/5$. В силу (3.15), (3.13) и оценки $\tau=O(\mathrm{Re}^2)$ заключаем, что $\xi(\mathrm{Re}, 0)>0$ при $0<\mathrm{Re}\leqslant\mathrm{Re}_3$, где $\mathrm{Re}_3\leqslant\mathrm{Re}_2$ достаточно мало. Это доказывает разрешимость уравнения (3.14), а следовательно, и системы (3.8).

Пусть $\mathrm{Re}\in(0,\mathrm{Re}_3]$ и s_*, β_* — решение системы (3.8). Покажем, что для малых Re ни при каком n, отличном от 1 или — 1, не может быть выполнено равенство $\lambda_n\equiv\Lambda(\mathrm{Re}, s_*, n\beta_*) = \mathrm{Re}\,\mathrm{W}^{-1}\beta_*^2$. Вследствие соотношений (3.4), (3.6) и (3.11) имеем

$$\mathrm{Im}\,\lambda_n = \frac{3\,(n\beta_*)^2}{\mathrm{ch}\,(n\beta_*)\,\mathrm{sh}\,(n\beta_*) - n\beta_*}\left[\frac{\mathrm{ch}^2\,(n\beta_*) + (n\beta_*)^2}{\mathrm{ch}^2\,\beta_* + \beta_*^2} - 1\right] + \theta\,(\mathrm{Re}, n),$$

где функция θ допускает оценку $|\theta| \leqslant C_{13}\mathrm{Re}\,[n]^2$ с некоторой постоянной C_{13}. Если $|n| > 1$ и $\mathrm{Re} \leqslant \mathrm{Re}_3$ достаточно мало, то $\mathrm{Im}\,\lambda_n \neq 0$, что и влечет желаемый результат. Из неравенства $\lambda_n \neq \mathrm{Re}\,\mathrm{W}^{-1}\beta_*^2$ ввиду (3.7) следует, что $\mu_n\neq-\gamma^{-1}$ при $|n|\neq1$. Это означает, что число $-\gamma^{-1}$ является не более чем двукратным собственным числом оператора $(B_0' - \gamma)^{-1}$. Будучи вещественным, оно в точности имеет кратность два. Лемма 3.3 доказана.

Отметим, что система (3.8) рассматривалась в работе [9], посвященной анализу устойчивости по линейному приближению течения по наклонной плоскости. Однако в этой работе параметр β считался заданным, зато искомая величина s не предполагалась вещественной. Численному исследованию указанной задачи об устойчивости в широком диапазоне определяющих параметров посвящена работа [10].

4. Существование катящихся волн. Теорема 4.1. Существует такое $\mathrm{Re}_*>0$, что при $0<\mathrm{Re}\leqslant\mathrm{Re}_*$ задача (1.1)—(1.7) имеет однопараметрическое с точностью до сдвига по x семейство решений.

Доказательство. Выберем Re_* так, чтобы при $\mathrm{Re}\in(0, \mathrm{Re}_*]$ выполнялось утверждение леммы 3.3.

Как показано в п. 2, задача о ветвлении(1.1)—(1.7) эквивалентна операторному уравнению (2.22). Это уравнение может быть приведено к виду

$$\eta = -\gamma\,(B_0' - \gamma)^{-1}\,(\eta) - (B_0' - \gamma)^{-1}\,F\,(\eta). \tag{4.1}$$

Докажем существование нетривиальных решений уравнения (4.1). Заметим, что если $\eta(x)$ — решение этого уравнения, то и $\eta(x+a)$ будет его решением при любом $a=\mathrm{const}$. Это следует из инвариантности уравнений (1.1) и условий (1.2)—(1.7) относительно переноса по x.

Операторы $(B_0' - \gamma)^{-1}$ и F непрерывно зависят от параметров Re, W, $s=c-3/2$ и $\beta=2\pi/h$. Зафиксируем $\mathrm{Re}\in(0,\mathrm{Re}_*]$, $\mathrm{W}_0 > 0$ и выберем в качестве s, β решение системы (3.8), соответствующее данным Re и W_0. Параметр W остается в нашем распоряжении. Обозначив

$$Q = -\gamma\,(B_0' - \gamma)^{-1}_{|\mathrm{W}=\mathrm{W}_0};\quad \delta Q = -\gamma\,(B_0' - \gamma) - Q;\quad T = -\,(B_0' - \gamma)^{-1}\,F,$$

запишем уравнение (4.1) в форме

$$\eta=Q(\eta)+\delta Q(\eta)+T(\eta). \tag{4.2}$$

Из определения нелинейного оператора T, неравенства (2.21) и утверждения леммы 3.2 следует оценка

$$|T(\eta)-T(\zeta)|^{(3+\alpha)}\leqslant C_{14}|\eta-\zeta|^{(3+\alpha)}(|\eta|^{(3+\alpha)}+|\zeta|^{(3+\alpha)}) \tag{4.3}$$

для любых $\eta, \zeta\in C^{3+\alpha}_{h,0}$ с $|\eta|^{(3+\alpha)}$, $|\zeta|^{(3+\alpha)}\leqslant\varepsilon$ и любого $W\in[W_1, W_2]$, $0<W_1<W_0<W_2<\infty$ (C_{14} не зависит от η, ζ и W). Линейные операторы Q и δQ вполне непрерывны в $C^{3+\alpha}_{h,0}$ (см. п. 3). Из определения δQ и свойств оператора B_0' вытекает справедливость неравенства

$$|\delta Q(\eta)|^{(3+\alpha)}\leqslant C_{15}|W-W_0||\eta|^{(3+\alpha)} \tag{4.4}$$

при любых $\eta\in C^{3+\alpha}_{h,0}$, $W\in[W_1, W_2]$.

Линейный оператор Q имеет двукратное собственное число 1, которому соответствуют собственные функции $\cos\beta x$ и $\sin\beta x$. Можно видеть, что эти функции являются также собственными функциями оператора, сопряженного с Q. Введем в рассмотрение оператор S, действующий по правилу

$$S(\eta)=Q(\eta)-\pi^{-1}\beta[(\eta, \cos\beta x)\cos\beta x+(\eta, \sin\beta x)\sin\beta x]$$

(символ (,) означает скалярное произведение в $L_2(0,h)$). Согласно обобщенной лемме Шмидта (см., например, [11]), единица не является собственным значением оператора S. Полагая

$$\pi^{-1}\beta(\eta, \cos\beta x)=\xi_1,\quad \pi^{-1}\beta(\eta, \sin\beta x)=\xi_2, \tag{4.5}$$

получим из (4.2) уравнение

$$(I-S)(\eta)=\xi_1\cos\beta x+\xi_2\sin\beta x+\delta Q(\eta)+T(\eta). \tag{4.6}$$

Вследствие ограниченности оператора $(I-S)^{-1}$ и оценок (4.3), (4.4) заключаем, что при достаточно малых $|\vec{\xi}|=(\xi_1^2+\xi_2^2)^{1/2}$ и $|W-W_0|$ уравнение (4.6) имеет единственное решение $\eta\in C^{3+\alpha}_{h,0}$, такое, что $|\eta|^{(3+\alpha)}\to 0$, когда $\vec{\xi}\to 0$, $W\to W_0$.

Для определения возможных значений $\vec{\xi}=(\xi_1, \xi_2)$ нужно подставить полученное выражение $\eta(x)$ в равенства (4.5), что приводит к системе уравнений разветвления

$$\varphi_1(\xi_1, \xi_2, W)=\xi_1,\quad \varphi_2(\xi_1, \xi_2, W)=\xi_2. \tag{4.7}$$

Оказывается, что система (4.7) может быть сведена к одному уравнению, связывающему лишь ξ_1 и W. Для этого воспользуемся инвариантностью уравнения (4.2) относительно переноса по x. Указанная инвариантность влечет групповое свойство уравнения (4.6): оно допускает преобразование

$$x\to x+a,\quad \xi_1\to\xi_1\cos\beta a-\xi_2\sin\beta a,$$
$$\xi_2\to\xi_1\sin\beta a+\xi_2\cos\beta a,\quad \eta\to\eta.$$

Это означает, что если система (4.7) имеет нетривиальное решение ξ_1, ξ_2, то она имеет однопараметрическое семейство решений, получаемых из данного поворотом вектора $\vec{\xi}$ на произвольный угол. Поэтому можно заранее положить $\xi_2=0$ и рассматривать вместо (4.7) уравнение

$$\varphi_1(\xi_1, 0, W)=\xi_1. \tag{4.8}$$

Тем самым при заданном $|\vec{\xi}|$ выделяется одно из решений уравнения (4.6), для которого $(\eta, \sin\beta x)=0$. Возможность редукции системы уравнений разветвления за счет использования групповых свойств задачи о ветвлении была установлена в работе [12].

В уравнении (4.8) удобно считать ξ_1 заданной, а W искомой величинами. Аналогичный прием использовался в работе [13]. Из определения функции φ_1 вытекает представление $\varphi_1(\xi_1, 0, W)=\xi_1[1+r(\xi_1, W)]$, где r — гладкая функция, причем $r(0, W_0)=0$. Для локальной разрешимости уравнения (4.8) относительно W достаточно проверить, что $r_W(0, W_0)\neq 0$. Вычисления показывают, что

$$r_W(0, W_0) = -\gamma \frac{\partial \mu_1}{\partial W}\Big|_{W=W_0} = \frac{\operatorname{Re}\beta^2}{\gamma W_0^2} > 0$$

(здесь μ_1—первое собственное значение оператора $(B_0' - \gamma)^{-1}$, определяемое по формуле (3.7), положительные параметры Re и β фиксированы ранее). Разрешимость уравнения (4.8) означает, что при любом W, достаточно близком к W_0, уравнение (4.2) имеет нетривиальное решение $\eta \in C^{3+\alpha}_{h,0}$, причем $|\eta|^{(3+\alpha)} \to 0$, когда $W \to W_0$. Ввиду произвольности $W_0 > 0$ отсюда следует, что для любых фиксированных $\operatorname{Re} \in (0, \operatorname{Re}_*]$ и $W > 0$ уравнение (4.1) имеет однопараметрическое с точностью до сдвига по x семейство малых решений (в качестве параметра можно принять $|\eta|^{(3+\alpha)}$). Тем самым установлено существование однопараметрического семейства решений задачи (1.1)—(1.7).

В заключение отметим, что рассмотренная нами задача ветвления является весьма частным случаем общей задачи о катящихся волнах. Представляет несомненный интерес обобщение теоремы 4.1 на случай произвольных чисел Рейнольдса, а также доказательство существования катящихся волн на наклонной плоскости. Основным препятствием на этом пути является отсутствие в настоящее время какого-либо аналога леммы 3.3 в данных случаях.

Еще более трудным является вопрос о существовании трехмерных пространственно-периодических движений в слое жидкости, стекающей по наклонной плоскости. Отметим, что в случае вертикальной плоскости в рамках длинноволнового приближения этот вопрос положительно решен в работе [14].

В данной работе не затрагивались вопросы устойчивости катящихся волн. Устойчивость по линейному приближению волновых режимов течения по наклонной плоскости изучалась в работах [15—17]. Вопрос об устойчивости волновых движений вязкой жидкости в точной постановке является совершенно открытым.

Поступила 3 IV 1975

ЛИТЕРАТУРА

1. **Капица П. Л.** Волновое течение тонких слоев вязкой жидкости.— ЖЭТФ, 1948, т. 18, № 1, с. 3—18.
2. **Иванилов Ю. П.** Катящиеся волны в наклонном канале.— ЖВМ и МФ, 1961, т. 1, № 6, с. 1061—1076.
3. **Шкадов В. Я.** Волновые режимы течения тонкого слоя вязкой жидкости под действием силы тяжести.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1967, № 1, с. 43—51.
4. **Mei C. C.** Nonlinear gravity waves in a thin sheet of viscous fluid.—«J. Math. and Phys.», 1966, vol. 45, N 3, p. 266—288.
5. **Крылов В. С., Воротилин В. П., Левич В. Г.** К теории волнового движения тонких пленок жидкости.— ТОХТ, 1969, т. 3, № 4, с. 499—507.
6. **Пухначев В. В.** Плоская стационарная задача со свободной границей для уравнений Навье—Стокса.— ПМТФ, 1972, № 3, с. 91—102.
7. **Солонников В. А., Щадилов В. Е.** Об одной краевой задаче для стационарной системы уравнений Навье — Стокса. — «Труды МИ АН СССР», 1973, т. 125, с. 196—210.

8. **Вазов В.** Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений. М., «Мир», 1968.
9. **Yih Chia-shun.** Stability of liquid down an inclined plan.—«Phys. Fluids», 1963, vol. 6, N 3, p. 321—334.
10. **Гончаренко Б. Н., Уринцев А. Л.** Об устойчивости течения вязкой жидкости по наклонной плоскости.— ПМТФ, 1975, № 3.
11. **Вайнберг М. М., Треногин В. А.** Теория ветвления решений нелинейных уравнений. М., «Наука», 1969.
12. **Логинов Б. В., Треногин В. А.** Об использовании групповых свойств для определения многопараметрических семейств решений нелинейных уравнений. Мат. сборник, 1971, т. 85 (127), №3 (7), с. 440—454.
13. **Юдович В. И.** Возникновение автоколебаний в жидкости.—ПММ, 1971, т. 35, № 4, с. 638—655.
14. **Непомнящий А. А.** Трехмерные пространственно-периодические движения в пленке жидкости, стекающей по вертикальной плоскости.—В кн.: Гидродинамика. Вып. VII. Пермь, 1974, с. 43—52.
15. **Шкадов В. Я.** Некоторые методы и задачи теории гидродинамической устойчивости.—«Труды НИИ механики МГУ», 1973, № 25, с. 3—192.
16. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке, стекающей по наклонной плоскости.—«Изв. АН СССР. МЖГ», 1974, № 3, с. 28—33.
17. **Непомнящий А. А.** Устойчивость волновых режимов в пленке жидкости относительно трехмерных возмущений.— В кн.: Гидродинамика, Вып. V. Пермь, 1974 с. 91—104.

УДК 532.5.4

ВИХРЕВЫЕ ВОЗМУЩЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ДВИЖЕНИЯ ЖИДКОСТИ СО СВОБОДНОЙ ГРАНИЦЕЙ

В. К. Андреев

(Новосибирск)

Первые работы об устойчивости неустановившихся движений жидкости со свободной границей появились недавно [1—4]. Были исследованы на устойчивость течения в сферической полости [1,2], сферическом слое [3], полосе и кольце идеальной жидкости. В этих работах как основное движение, так и возмущенное предполагались потенциальными. Переходом к лагранжевым координатам удавалось существенно упростить решение задачи. Л. В. Овсянниковым [5] были получены в лагранжевых координатах уравнения малых потенциальных возмущений произвольного потенциального движения. На основе полученных уравнений решены типичные примеры, показывающие степень трудности исследования устойчивости неустановившихся движений [5—8]. Во всех работах устойчивость характеризуется отклонением свободной границы от ее невозмущенного состояния, т. е. нормальной составляющей вектора возмущений.

В данной работе получены общие уравнения малых возмущений неустановившегося течения жидкости со свободной границей в лагранжевых координатах. Для нормальной составляющей вектора возмущений найдено простое выражение. В случае потенциальных массовых сил полученная система сводится к одному уравнению для некоторой скалярной функции с эволюционным условием на свободной границе. Доказана теорема существования и единственности решения, в частности, решен вопрос о корректности линейной задачи о малых потенциальных возмущениях, поставленный в [5]. Исследованы два примера на устойчивость: а) растяжение полосы, б) сжатие круглого цилиндра при условии непотенциальности начального возмущения.

1. Постановка задачи со свободной границей. Общая задача со свободной границей формулируется следующим образом: в начальный момент времени заданы область Ω и поле скоростей $\mathbf{u}|_{t=0} = \mathbf{u}_0(\mathbf{x})$, $\operatorname{div}\mathbf{u}_0=0$, $\mathbf{x}\in\Omega$,