

УДК 621.391

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ВРАЩЕНИЯ ТРЕХМЕРНЫХ ВЕКТОРНЫХ СИГНАЛОВ*

Я. А. Фурман, И. Л. Егошина

*Государственное образовательное учреждение высшего профессионального образования
«Марийский государственный технический университет»,
424000, г. Йошкар-Ола, пл. Ленина, 3
E-mail: rts@martsu.mari.ru*

Рассмотрено решение задачи определения параметров вращения: направляющего вектора оси вращения и величины угла поворота трехмерного изображения, точки на поверхности которого заданы векторами. Известными считаются исходный и повернутый векторы. Предложен подход, использующий кватернионное представление векторов, вычислительная эффективность которого в несколько раз выше, чем эффективность известных подходов. Исследован механизм влияния шума на точность определения параметров и даны рекомендации по минимизации возникающих ошибок. Рассмотрены особенности решения обратной задачи вращения применительно к системе распознавания изображений.

Ключевые слова: матрица вращения, вращающий кватернион, кватернионный сигнал, корректор угла поворота, формирователь меры схожести.

Введение и постановка задачи. Вращение векторных сигналов является одной из наиболее часто используемых операций при решении задач по обработке изображений. Различают два вида задач, связанных с поворотом вектора: прямую и обратную. При решении первой из них заданными считаются исходный вектор и параметры вращения, а неизвестным — повернутый вектор. Для второй, обратной, задачи известными являются исходный и повернутый векторы, а необходимо определить параметры вращения. Произвольные вращения трехмерных объектов усложняют их распознавание из-за изменения аналитического описания изображений этих объектов. Воздействие шумов приводит к аналогичному эффекту, но их негативное влияние можно значительно ослабить за счет увеличения энергии полезного сигнала или использования известных методов борьбы с шумами. Аналитически вращение точки на плоскости описывается выражением $\mathbf{q} = \exp\{i, \varphi\} \mathbf{p}$, где \mathbf{p} и \mathbf{q} — векторы, задающие исходную и повернутую на угол φ точки (рис. 1, а). Эту операцию с общих позиций можно рассматривать как поворот вектора \mathbf{p} на угол φ вокруг оси, проходящей через точку O перпендикулярно вектору \mathbf{p} . Вращение точки в трехмерном пространстве отличается тем, что ось вращения OO' может составлять с вектором \mathbf{p} произвольный угол α (рис. 1, б). Решение обратной задачи вращения векторных сигналов будем рассматривать применительно к системе распознавания трехмерных изображений с алфавитом $A = \{A_n\}_{n=0}^{M-1}$ из M классов. Класс A_n представлен одним эталонным изображением в виде поливекторного сигнала $\mathbf{p}_n = \{\mathbf{p}_n(u)\}_{u=0}^{s-1}$ размерностью s . Его компонентами являются также векторы $\mathbf{p}_n(u) = (p_{n,x}(u), p_{n,y}(u), p_{n,z}(u))$, задающие трехмерные координаты эталонного изображения n -го класса (рис. 2). Распознаваемое изображение также задается в виде поливекторного сигнала $\hat{\mathbf{q}} = \{\hat{\mathbf{q}}(u)\}_{u=0}^{s-1}$, $\hat{\mathbf{q}}(u) = (\hat{q}_x(u), \hat{q}_y(u), \hat{q}_z(u))$. Оно формируется из эталонного сигнала одного из классов (для определенности — класса A_l) масштабированием в μ раз, поворота вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$

*Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 07-01-00058, № 08-01-00854, № 08-01-120001 ОФИ).

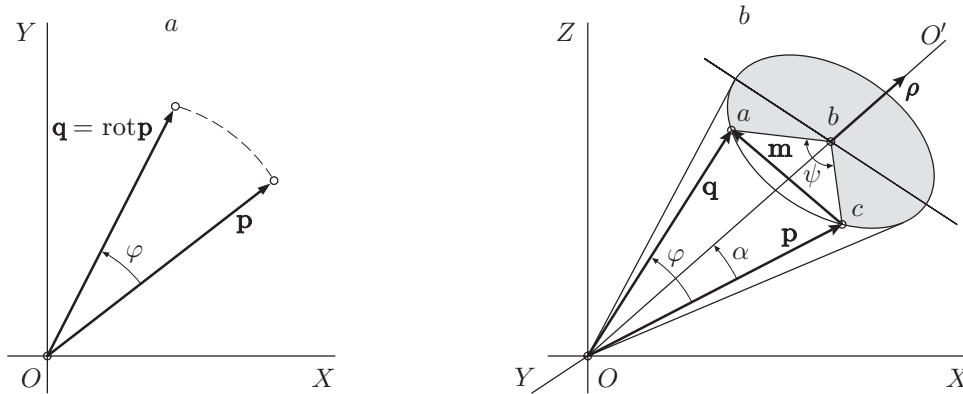


Рис. 1. Вращение точки (вектора): на плоскости (a), в трехмерном пространстве (b)

на угол ψ и подвергается действию аддитивного нормального центрированного шума с дисперсией $\sigma_{\text{вх}}^2$:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mu \text{rot}_{\rho, \psi} \mathbf{p}_l + \boldsymbol{\xi}. \tag{1}$$

Здесь $\boldsymbol{\xi} = \{\boldsymbol{\xi}(u)\}_{u=0}^{s-1}$ — шумовой вектор, а значения параметров μ , ρ и ψ являются ненулевыми. Подобные устройства используются при приеме сигналов по зашумленным каналам связи, при распознавании различного рода символьной информации (букв, цифр, маркеров), в системах навигации по карте местности [1–3]. В последнем случае алфавит представляет собой M участков трехмерной подстилающей поверхности в виде точечных полей $\{\mathbf{p}_n\}_{n=0}^{M-1}$ одинаковой мощности s из отсчетов с координатами (x, y, z) . Распознаваемый участок, соответствующий модели (1), необходимо обоснованно отнести к одному из участков \mathbf{p}_n . Предполагается, что точки пронумерованы (упорядочены), и поэтому существует возможность сравнения соответствующих точек l -го эталонного и распознаваемого участков. Процедура упорядочения точек участков представляет самостоятельную задачу. Поскольку далее рассматриваются вопросы, связанные только с вращениями в трехмерном пространстве, задачу упорядочения полей будем считать решенной.

Устройство распознавания для этого случая является многоканальным по числу классов M (рис. 3). Каждый канал содержит корректор угла поворота (КУП) и формирователь меры схожести (ФМС) распознаваемого изображения $\hat{\mathbf{q}}$ с эталонным поливекторным сигналом \mathbf{p} , соответствующего номеру канала класса. Сигнал $\hat{\mathbf{q}}$ подается одновременно на

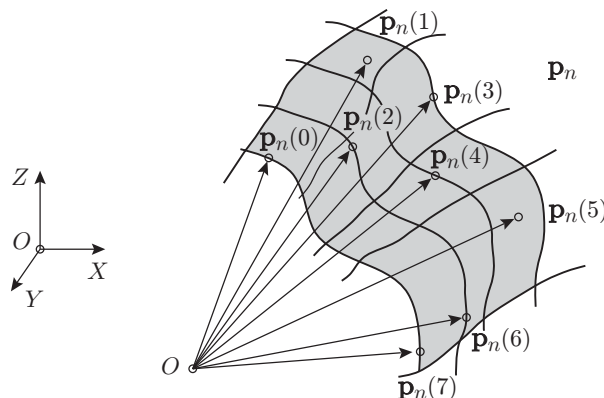


Рис. 2. Задание участка поверхности поливекторным сигналом $\mathbf{p}_n = \{\mathbf{p}_n(u)\}_{u=0}^7$

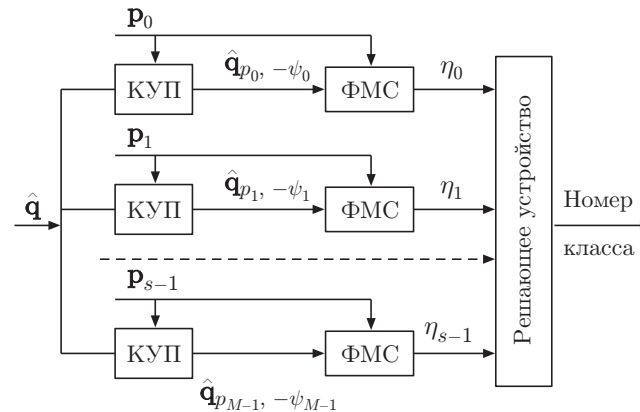


Рис. 3. Структура устройства распознавания

первые входы всех узлов КУП, а на их вторые входы поступают эталонные сигналы \mathbf{p}_n . КУП решает обратную задачу, определяя параметры ρ_n и ψ_n , для класса A_n и поворачивает входной сигнал $\hat{\mathbf{q}}$ вокруг оси ρ_n на угол $-\psi$. ФМС в n -м канале вычисляет меру схожести η_n сигнала $\hat{\mathbf{q}}_{\rho_n, -\psi_n}$ с эталонным сигналом класса A_n [4].

Таким образом, определение параметров вращения распознаваемого сигнала $\hat{\mathbf{q}}$ относительно эталонного сигнала \mathbf{p}_n , $n = 0, 1, \dots, M - 1$, каждого из классов алфавита является важной и, как будет показано далее, достаточно сложной задачей. По аналогии с подобными задачами, решаемыми в механике [2], будем ее называть обратной задачей вращения векторных сигналов.

Цель данной работы состоит в рассмотрении новых подходов к решению обратной задачи применительно к проблеме распознавания, обладающих более высокой по сравнению с известными эффективностью.

1. Существующие подходы к решению обратной задачи. Проблемы, связанные с вращением трехмерных векторов, являются традиционными для систем управления движением объектов. Для описания углового движения твердого тела предложен ряд кинематических параметров, таких как параметры Родрига — Гамильтона и Кейли — Клейна, углы Эйлера — Крылова и направляющие косинусы. Важность решения этих задач объясняет обширная библиография, в частности [2, 5, 6]. Различия подходов связаны с особенностями геометрических характеристик объекта управления, поиском удобных форм математических моделей, устойчивостью получаемых решений в области существования независимых переменных, точностью решений и необходимой трудоемкостью их получения.

Для решения прямой задачи часто применяются матричные методы [2]. Элементами матрицы вращения \mathbf{B} являются значения направляющих косинусов. Она описывает поворот вектора $\mathbf{p} = (p_x, p_y, p_z)$ на угол ψ вокруг оси с направляющим вектором $\boldsymbol{\rho} = (\rho_x, \rho_y, \rho_z)$ (не совпадающим ни с одной из трех координатных осей) и имеет вид

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \rho_x^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & \rho_x \rho_y(1 - \cos \psi) - \rho_z \sin \psi & \rho_x \rho_z(1 - \cos \psi) + \rho_y \sin \psi \\ \rho_x \rho_y(1 - \cos \psi) + \rho_z \sin \psi & \rho_y^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi & \rho_y \rho_z(1 - \cos \psi) - \rho_x \sin \psi \\ \rho_x \rho_z(1 - \cos \psi) - \rho_y \sin \psi & \rho_y \rho_z(1 - \cos \psi) + \rho_x \sin \psi & \rho_z^2(1 - \cos \psi) + \cos \psi \end{bmatrix}. \quad (2)$$

Данная матрица получается при перемножении в определенном порядке пяти матриц элементарных поворотов. В результате вектор $\boldsymbol{\rho}$ был совмещен с осью OZ , выполнен поворот на угол ψ , а затем этот вектор возвращен в исходное положение. Вектор \mathbf{p} искомого

поворота будет равен

$$\mathbf{q}^T = \mathbf{B}\mathbf{p}^T. \quad (3)$$

Решение обратной задачи вращения связано с нахождением элементов матрицы \mathbf{B} [7]. При этом должны быть заданы три исходных и три повернутых вектора. Представленные как матрицы они имеют вид

$$\mathbf{P} = \begin{bmatrix} p_{0,x} & p_{0,y} & p_{0,z} \\ p_{1,x} & p_{1,y} & p_{1,z} \\ p_{2,x} & p_{2,y} & p_{2,z} \end{bmatrix}; \quad \mathbf{Q} = \begin{bmatrix} q_{0,x} & q_{0,y} & q_{0,z} \\ q_{1,x} & q_{1,y} & q_{1,z} \\ q_{2,x} & q_{2,y} & q_{2,z} \end{bmatrix}. \quad (4)$$

Из равенства $\mathbf{Q} = \mathbf{P}\mathbf{B}^T$, аналогичного равенству (3), можно получить

$$\mathbf{B}^T = \mathbf{P}^{-1}\mathbf{Q}. \quad (5)$$

Если размерность поливекторного сигнала \mathbf{p}_n больше трех, то матрица \mathbf{B} может быть найдена методом наименьших квадратов [8, 7].

Для нахождения параметров вращения на основании (5) вычисляются элементы матрицы \mathbf{B}^T , и с их помощью получают значения угла поворота ψ и направляющего вектора $\boldsymbol{\rho}$. Определение этих параметров связано с решением системы из девяти нелинейных уравнений с четырьмя неизвестными. Как показано в [7], из-за неоднозначности вычисления искомых параметров система имеет два избыточных решения. Для получения однозначного значения угла ψ следует выполнить совмещение исходных векторов, повернутых в соответствии с каждым из этих решений, с известными результатами их поворота.

2. Решение обратной задачи с применением кватернионов. 2.1. *Обозначения и основные аналитические выражения.* Рассмотрим геометрическую конструкцию, связанную с поворотом поливекторного сигнала $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1)\}$ вокруг оси OO' с направляющим вектором $\boldsymbol{\rho}$ (рис. 4). Она представляет собой два соосно вложенных конуса K_0 и K_1 . При

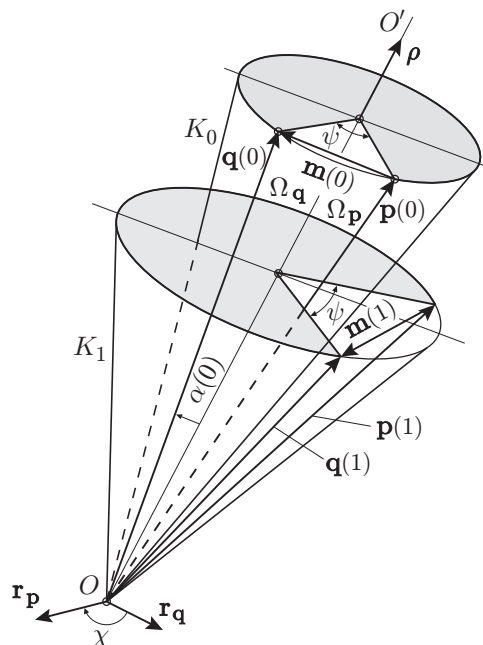


Рис. 4. Векторные диаграммы к решению обратной задачи

повороте конец вектора $\mathbf{p}(0)$, являющегося образующей конуса K_0 , скользит по окружности его основания. В результате поворота этого вектора на угол ψ получаем вектор $\mathbf{q}(0)$. Угол между векторами $\mathbf{q}(0)$ и $\mathbf{p}(0)$ обозначим через $\varphi(0)$, их разность $\mathbf{q}(0) - \mathbf{p}(0)$ — через $\mathbf{m}(0)$, а угол между образующей конуса и его осью — через $\alpha(0)$ (см. рис. 1, *b*). Собственные плоскости векторов $\mathbf{p}(0)$, $\boldsymbol{\rho}$ и $\mathbf{q}(0)$, $\boldsymbol{\rho}$ обозначены соответственно как $\Omega_{\mathbf{p}}$ и $\Omega_{\mathbf{q}}$, а нормали к ним — как $\mathbf{r}_{\mathbf{p}}$ и $\mathbf{r}_{\mathbf{q}}$. Аналогично, но с заменой внутреннего индекса 0 индексом 1 обозначены векторы и углы, связанные с вектором $\mathbf{p}(1)$ и конусом K_1 . Все перечисленные векторы будем задавать с помощью векторных кватернионов:

$$\begin{aligned}\mathbf{p}(0) &= p_1(0)\mathbf{i} + p_2(0)\mathbf{j} + p_3(0)\mathbf{k}, & \mathbf{p}(1) &= p_1(1)\mathbf{i} + p_2(1)\mathbf{j} + p_3(1)\mathbf{k}; \\ \mathbf{q}(0) &= q_1(0)\mathbf{i} + q_2(0)\mathbf{j} + q_3(0)\mathbf{k}, & \mathbf{q}(1) &= q_1(1)\mathbf{i} + q_2(1)\mathbf{j} + q_3(1)\mathbf{k}; \\ \mathbf{m}(0) &= m_1(0)\mathbf{i} + m_2(0)\mathbf{j} + m_3(0)\mathbf{k}, & \mathbf{m}(1) &= m_1(1)\mathbf{i} + m_2(1)\mathbf{j} + m_3(1)\mathbf{k}; \\ \mathbf{r}_{\mathbf{p}} &= \mathbf{r}_{\mathbf{p},1}\mathbf{i} + \mathbf{r}_{\mathbf{p},2}\mathbf{j} + \mathbf{r}_{\mathbf{p},3}\mathbf{k}, & \mathbf{r}_{\mathbf{q}} &= \mathbf{r}_{\mathbf{q},1}\mathbf{i} + \mathbf{r}_{\mathbf{q},2}\mathbf{j} + \mathbf{r}_{\mathbf{q},3}\mathbf{k}, & \boldsymbol{\rho} &= \rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k}.\end{aligned}$$

Здесь через \mathbf{i}, \mathbf{j} и \mathbf{k} обозначены мнимые единицы. Необходимые сведения по кватернионам, используемые в данной работе, имеются в [2, 5, 9]. Поливекторный сигнал $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}(u)\}_{u=0}^{s-1}$, компонентами которого служат кватернионы, будем называть кватернионным сигналом (КТС). Произвольный поворот вектора \mathbf{p} в пространстве с помощью кватерниона \mathbf{f} происходит в результате операции

$$\mathbf{q} = \text{rot}_{\boldsymbol{\rho}, \psi} \mathbf{p} = \mathbf{f}\mathbf{p}\mathbf{f}^{-1}, \quad (6)$$

где $\mathbf{f} = \cos \psi/2 + \boldsymbol{\rho} \sin \psi/2$ — вращающий кватернион; $\boldsymbol{\rho}$ — направляющий вектор оси вращения, $|\boldsymbol{\rho}| = 1$; ψ — угол поворота; \mathbf{f}^{-1} — обратный кватернион. Скалярное (внутреннее) произведение векторов, представленное в кватернионном виде, записывается как [9]

$$(\mathbf{q}, \mathbf{p})_H = (\mathbf{q}, \mathbf{p})_E - [\mathbf{q}, \mathbf{p}]. \quad (7)$$

Здесь $(\mathbf{q}, \mathbf{p}) = |\mathbf{q}||\mathbf{p}| \cos \varphi$ — скалярное произведение векторов, заданных в действительном пространстве E ; $[\mathbf{q}, \mathbf{p}] = \mathbf{r}|\mathbf{q}||\mathbf{p}| \sin \varphi$ — векторное произведение векторов; \mathbf{r} — нормаль к собственной плоскости Ω этих векторов, $|\mathbf{r}| = 1$; φ — угол между векторами.

Непосредственный подход к решению обратной задачи вращения базируется на соотношении (6) и связан с решением системы уравнений вида $\mathbf{q}(u) = \mathbf{f}\mathbf{p}(u)\mathbf{f}^{-1}$, $u = 0, 1, \dots, s-1$. В более подробной записи эта система имеет вид

$$\begin{aligned}q_1(u)\mathbf{i} + q_2(u)\mathbf{j} + q_3(u)\mathbf{k} &= [\cos \psi/2 + (\rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k}) \sin \psi/2] \times \\ &\times [p_1(u)\mathbf{i} + p_2(u)\mathbf{j} + p_3(u)\mathbf{k}] \times \\ &\times [\cos \psi/2 - (\rho_1\mathbf{i} + \rho_2\mathbf{j} + \rho_3\mathbf{k}) \sin \psi/2], \quad u = 0, 1, \dots, s-1.\end{aligned} \quad (8)$$

Ее решение сводится к решению системы из 16 нелинейных уравнений относительно неизвестных ρ_1, ρ_2, ρ_3 и ψ так же, как и при использовании методов, представленных в разд. 1. Некоторые подходы к решению обратной задачи с привлечением кватернионов описаны в [9–11].

Рассмотрим два подхода к решению обратной задачи, в которых применение кватернионов упрощает получение этого решения по сравнению с решением системы (7). Подходы основаны на двухэтапной процедуре. На первом этапе определяется направляющий вектор $\boldsymbol{\rho}$ оси вращения, а на втором — угол поворота ψ .

2.2. *Подход к решению на основе равенства углов между образующими и осью конуса с применением элементарных поворотов* [10]. 2.2.1. *Направляющий вектор $\boldsymbol{\rho}$ оси вращения OO'* . На основании равенства углов α между каждым из векторов $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{q} с осью вращения OO' (см. рис. 1, *b*) запишем

$$(\mathbf{p}(u), \boldsymbol{\rho})_E = (\mathbf{q}(u), \boldsymbol{\rho})_E, \quad u = 0, 1, \dots, s-1. \quad (9)$$

В отсутствие координатных шумов вектор $\boldsymbol{\rho} = \rho_1 \mathbf{i} + \rho_2 \mathbf{j} + \rho_3 \mathbf{k}$ может быть получен уже при $u = 0, 1$. Система из двух уравнений при условии $\rho_1 = 1$ имеет следующие решения:

$$\rho_2 = \frac{[q_1(0) - p_1(0)][q_3(1) - p_3(1)] - [q_1(1) - p_1(1)][q_3(0) - p_3(0)]}{[q_2(0) - p_2(0)][q_3(1) - p_3(1)] - [q_2(1) - p_2(1)][q_3(0) - p_3(0)]},$$

$$\rho_3 = \frac{[q_2(0) - p_2(0)][q_1(1) - p_1(1)] - [q_2(1) - p_2(1)][q_1(0) - p_1(0)]}{[q_2(0) - p_2(0)][q_3(1) - p_3(1)] - [q_2(1) - p_2(1)][q_3(0) - p_3(0)]}.$$

Поскольку длина вектора $\boldsymbol{\rho}$ равна единице, то полученные значения ρ_1 , ρ_2 и ρ_3 уточняются из условия его нормировки. Кроме того, априорно должно быть известно, что вектор $\boldsymbol{\rho}$ не совпадает с координатными осями.

2.2.2. *Угол поворота ψ* . Сведем задачу нахождения угла ψ к задаче с элементарным поворотом. Для этого вычислим нормированное векторное произведение $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{k} , равное нормали к собственной плоскости этих векторов:

$$\mathbf{v} = v_1 \mathbf{i} + v_2 \mathbf{j} + v_3 \mathbf{k} = \frac{[\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}]}{|\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k}|} = \frac{\rho_2 \mathbf{i} - \rho_1 \mathbf{j}}{|\rho_2 \mathbf{i} - \rho_1 \mathbf{j}|}.$$

Совместим ось вращения OO' с осью OZ путем поворота вектора $\boldsymbol{\rho}$ вокруг этой нормали на угол $-\delta$, где δ — угол между осями. Косинус этого угла равен $(\boldsymbol{\rho}, \mathbf{k})_E = \rho_3$, а вращающий кватернион \mathbf{d} , совмещающий оси OO' и OZ , имеет вид $\mathbf{d} = \cos \delta/2 - \mathbf{v} \sin \delta/2$. Поворачивая с его помощью КТС $\mathbf{q} = \{\mathbf{q}(0), \mathbf{q}(1)\}$ и $\mathbf{p} = \{\mathbf{p}(0), \mathbf{p}(1)\}$, получим новые КТС $\mathbf{t} = \{\mathbf{t}(0), \mathbf{t}(1)\}$ и $\mathbf{w} = \{\mathbf{w}(0), \mathbf{w}(1)\}$: $\mathbf{t} = \mathbf{d}\mathbf{q}\mathbf{d}^{-1}$, $\mathbf{w} = \mathbf{d}\mathbf{p}\mathbf{d}^{-1}$.

Поскольку при вращении КТС углы между его векторами сохраняются, то КТС \mathbf{t} будет повернут относительно КТС \mathbf{w} на искомый угол ψ , но уже вокруг оси OZ . Такой поворот относится к классу элементарных, и для него существуют простые соотношения. Используя их, получим [9]

$$\psi = \arcsin \frac{t_1(0)w_2(0) - t_2(0)w_1(0)}{t_1^2(0) + t_2^2(0)}. \quad (10)$$

2.3. *Подход на основе параллельности оснований конусов K_0 и K_1 и равенства углов ψ и χ* . 2.3.1. *Направляющий вектор $\boldsymbol{\rho}$ оси вращения OO'* . Ось вращения OO' служит одновременно осью вложенных конусов K_0 и K_1 . Поэтому плоскости их оснований параллельны между собой, а ось вращения OO' перпендикулярна каждой из них (см. рис. 4). Образует два разностных вектора $\mathbf{m}(0) = \mathbf{q}(0) - \mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{m}(1) = \mathbf{q}(1) - \mathbf{p}(1)$. Их можно считать расположенными в одной плоскости, нормаль $\boldsymbol{\rho}$ к которой служит направляющим вектором оси OO' . В ненормированном виде этот вектор равен

$$\boldsymbol{\rho} = [\mathbf{m}(0), \mathbf{m}(1)] = [[\mathbf{q}(0) - \mathbf{p}(0)], [\mathbf{q}(1) - \mathbf{p}(1)]]. \quad (11)$$

2.3.2. *Косинус угла поворота*. Нетрудно показать равенство угла поворота ψ и угла χ между нормальными $\mathbf{r}_{\Omega_{\mathbf{p}}}$ и $\mathbf{r}_{\Omega_{\mathbf{q}}}$ к собственным плоскостям $\Omega_{\mathbf{p}}$ и $\Omega_{\mathbf{q}}$, образованными соот-

ветственно парами векторов \mathbf{p} , $\boldsymbol{\rho}$ и \mathbf{q} , $\boldsymbol{\rho}$. При коррекции угла поворота для распознавания необходимо знать величину $\cos \psi$. С учетом равенства $\psi = \chi$ получим

$$\cos \psi = \frac{(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p)E}{|(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p)|E}, \quad (12)$$

где

$$\mathbf{r}_q = [\boldsymbol{\rho}, \mathbf{q}(0)] = [\rho_2, q_3(0) - \rho_3, q_2(0)]\mathbf{i} + [\rho_3, q_1(0) - \rho_1, q_3(0)]\mathbf{j} + [\rho_1, q_2(0) - \rho_2, q_1(0)]\mathbf{k}, \quad (13)$$

$$\mathbf{r}_p = [\boldsymbol{\rho}, \mathbf{p}(0)] = [\rho_2, p_3(0) - \rho_3, p_2(0)]\mathbf{i} + [\rho_3, p_1(0) - \rho_1, p_3(0)]\mathbf{j} + [\rho_1, p_2(0) - \rho_2, p_1(0)]\mathbf{k}. \quad (14)$$

Так как $|p(0)| = |q(0)|$, то нормали \mathbf{r}_q и \mathbf{r}_p имеют равные модули, т. е.

$$|(\mathbf{r}_q, \mathbf{r}_p)| = |\mathbf{r}_q|^2. \quad (15)$$

3. Вычислительная эффективность рассмотренных способов решения обратной задачи. В работе [7] приводятся данные о количестве операций при решении обратной задачи путем вычисления элементов матрицы вращений (см. разд. 1). Как следует из этой же работы, для решения обратной задачи при $s = 2$ на основе равенства углов между образующими и осью конуса с применением элементарных поворотов (см. разд. 2.2) требуется 170 операций: сложений/вычитаний — 61, умножений — 91, делений — 8, тригонометрических операций — 5, извлечений квадратного корня — 5.

Трудоемкость решения обратной задачи на основе подхода, рассмотренного в разд. 2.3, определяется следующим количеством операций: сложений — 19, умножений — 24, делений — 1. Всего 44 простые операции.

Для сравнения вычислительной эффективности описанных подходов в таблице для каждого из них представлено необходимое количество операций для нахождения параметров вращения, приходящееся на одну пару векторов \mathbf{q} и \mathbf{p} ($s = 1$).

4. Помехоустойчивость операций, используемых для решения обратной задачи. В описанных выше подходах считалось, что шумы отсутствуют. Такое предположение справедливо лишь для вектора \mathbf{p} исходного изображения, но для распознаваемого вектора $\hat{\mathbf{q}}$ пренебречь действием шума нельзя. Он не только повернут по отношению к вектору \mathbf{p} , но и искажен шумами:

$$\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{b}\mathbf{p}\mathbf{b}^{-1} + \boldsymbol{\xi} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\xi}. \quad (16)$$

Здесь $\mathbf{b} = \cos \psi/2 + \boldsymbol{\rho} \sin \psi/2$ — вращающий кватернион, а $\boldsymbol{\xi}$ — шумовой вектор размерности s . Обычно его компонентами служат нормально распределенные случайные величины с дисперсией $\sigma_{\text{вх}}^2$. В связи с тем, что действие шума приводит к ошибкам определения параметров поворота трехмерного вектора, проанализируем влияние шума на точность определения нормали $\boldsymbol{\rho}$ к собственной плоскости Ω векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} .

Методы решения обратной задачи	Требуемое количество операций
На основе вычисления элементов матрицы вращений (см. разд. 1)	53
На основе равенства углов между образующими и осью конуса с применением элементарных поворотов	83
На базе параллельности оснований конусов K_0 и K_1 и равенства ψ и χ	22

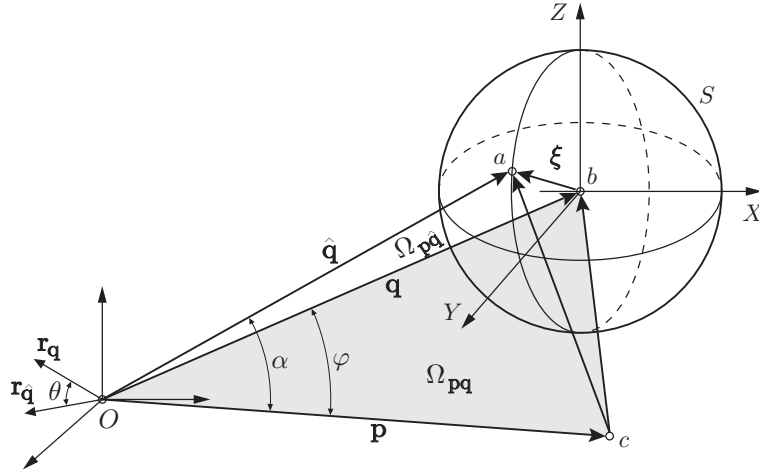


Рис. 5. Векторная диаграмма возникновения ошибки определения нормали \mathbf{r}_q

4.1. *Помехоустойчивость операции вычисления нормали к собственной плоскости двух векторов.* Диаграмма соотношений между векторами при вычислении нормали представлена на рис. 5. Здесь \mathbf{p} и \mathbf{q} , $|\mathbf{p}| = |\mathbf{q}| = 1$, — исходный и повернутый векторы, задающие собственную плоскость Ω_{pq} . Треугольник Obc лежит в этой плоскости. Обработке подвергается вектор $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\xi}$. Реализации шумового вектора $\boldsymbol{\xi}$ с заданным значением вероятности расположены внутри сферы S с центром в точке b конца вектора \mathbf{q} . С ростом дисперсии шума радиус сферы увеличивается. Векторы \mathbf{p} и $\hat{\mathbf{q}}$ задают собственную плоскость $\Omega_{p\hat{q}}$, в которой находится треугольник Oac . Далее нас будет интересовать поведение нормали $\hat{\mathbf{r}}_q$ к этой плоскости [12]. При наличии шумов между этой нормалью и нормалью \mathbf{r}_q к собственной плоскости Ω_{pq} незашумленных векторов возникает угловое рассогласование θ , приводящее к ошибкам определения параметров вращения вектора \mathbf{p} . Средний уровень этих ошибок зависит не только от величины дисперсии $\sigma_{\text{вх}}^2$, но и от величины угла φ между векторами \mathbf{p} и \mathbf{q} . Исследование механизма зависимости $\theta = f(\varphi)$ дает возможность снизить ошибку θ за счет выбора пар векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} с соответствующей величиной угла φ . Воспользуемся выражением для скалярного произведения исходного \mathbf{p} , $|\mathbf{p}| = 1$, и зашумленного $\hat{\mathbf{q}}$ векторов:

$$(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}}) = |\hat{\mathbf{q}}| \cos \alpha - \mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}} |\hat{\mathbf{q}}| \sin \alpha. \quad (17)$$

Здесь α — угол между этими векторами (см. рис. 5). С учетом $\hat{\mathbf{q}} = \mathbf{q} + \boldsymbol{\xi}$ получим

$$(\mathbf{p}, \hat{\mathbf{q}}) = (\mathbf{p}, \mathbf{q}) + (\mathbf{p}, \boldsymbol{\xi}) = \cos \varphi - \mathbf{r}_q \sin \varphi + |\boldsymbol{\xi}| \cos \beta - \mathbf{r}_{\boldsymbol{\xi}} \sin \beta, \quad (18)$$

где β — угол между векторами \mathbf{p} и $\boldsymbol{\xi}$; $\mathbf{r}_{\boldsymbol{\xi}}$ — нормаль к собственной плоскости векторов \mathbf{p} и $\boldsymbol{\xi}$; $|\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}}| = |\mathbf{r}_q| = |\mathbf{r}_{\boldsymbol{\xi}}| = 1$. Гиперкомплексные части выражений (17) и (18) равны между собой:

$$\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}} |\hat{\mathbf{q}}| \sin \alpha = \mathbf{r}_q \sin \varphi + \mathbf{r}_{\boldsymbol{\xi}} |\boldsymbol{\xi}| \sin \beta. \quad (19)$$

Видно, что взвешенная нормаль $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}}$ равна сумме чисто детерминированной $\mathbf{r}_q \sin \varphi$ и чисто шумовой $\mathbf{r}_{\boldsymbol{\xi}} |\boldsymbol{\xi}| \sin \beta$ компонент. При $\varphi = 0$ выражение (19) принимает вид $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}} |\hat{\mathbf{q}}| \sin \alpha = \mathbf{r}_{\boldsymbol{\xi}} |\boldsymbol{\xi}| \sin \beta$. В данном случае нормаль $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}}$ является случайной величиной без детерминированной составляющей, т. е. отношение шум/сигнал бесконечно велико (рис. 6). Если зафиксировать вектор ошибки $\boldsymbol{\xi}$, т. е. положить

$$|\boldsymbol{\xi}| = \text{const}, \quad \beta = \text{const}, \quad (20)$$

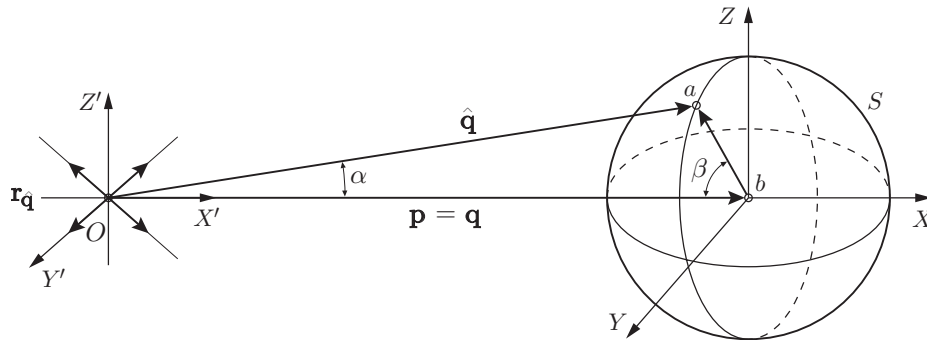


Рис. 6. Векторная диаграмма для $\varphi = 0$

то соотношение между компонентами регулируется только величиной угла φ . Действительно, как следует из (17), взвешенная нормаль $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}}$ является суммой двух независимых друг от друга компонент. Поэтому рост первой компоненты $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}} \sin \varphi$ за счет стремления $\varphi \rightarrow \pi/2$ при выполнении условия (20) уменьшает величину угла θ и, следовательно, ошибку вычисления нормали $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}}$ к собственной плоскости векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} . Таким образом, $\theta = \theta_{\min}$ при $\varphi \rightarrow \pi/2$.

Как следует из выражения (1), векторы $\hat{\mathbf{q}}(u)$, $u = 0, 1, \dots, s-1$, распознаваемого кватернионного сигнала получаются преобразованием векторов $\mathbf{p}_l(u)$ эталонного (исходного) кватернионного сигнала \mathbf{p}_l класса A_l . Это преобразование реализуется путем масштабирования в μ раз и вращения вокруг оси OO' с одним и тем же направляющим вектором $\boldsymbol{\rho}$ на один и тот же угол ψ с последующим аддитивным зашумлением вектором $\boldsymbol{\xi}$. Несмотря на это, углы $\varphi(u)$ между векторами $\mathbf{p}_l(u)$ и $\hat{\mathbf{q}}(u)$, $u = 0, 1, \dots, s-1$, будут разными. Данный эффект вызывается зависимостью величины $\varphi(u)$ не только от угла поворота ψ , но и от угла $\alpha(u)$ между вектором $\mathbf{p}(u)$ и осью вращения OO' . В результате каждая пара векторов $\mathbf{p}_l(u)$ и $\hat{\mathbf{q}}(u)$ будет характеризоваться своим значением угла $\varphi(u)$. На основании выполненного выше анализа следует, что нормали $\mathbf{r}_{\hat{\mathbf{q}}(u)}$ к собственным плоскостям $\Omega_{\hat{\mathbf{q}}(u)}$ имеют разные значения ошибок их вычисления. Отбирая для решения обратной задачи лишь те пары векторов, которые характеризуются низким значением модуля $|\hat{\mathbf{q}} \cos \alpha|$ реальной части их скалярного произведения (17), можно повысить точность решения обратной задачи.

4.2. *Помехоустойчивость процедуры вычисления направляющего вектора оси вращения.* На помехоустойчивость данной процедуры кроме рассмотренной в разд. 4.1 операции вычисления нормали влияет вычисление разностных зашумленных векторов (рис. 7, а):

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{m}}(0) &= \hat{\mathbf{q}}(0) - \mathbf{p}(0) = \mathbf{q}(0) + \boldsymbol{\xi}(0) - \mathbf{p}(0), & |\mathbf{p}(0)| &= |\mathbf{q}(0)| = 1; \\ \hat{\mathbf{m}}(1) &= \hat{\mathbf{q}}(1) - \mathbf{p}(1) = \mathbf{q}(1) + \boldsymbol{\xi}(1) - \mathbf{p}(1), & |\mathbf{p}(1)| &= |\mathbf{q}(1)| = 1, \end{aligned} \quad (21)$$

где $\boldsymbol{\xi}(0)$ и $\boldsymbol{\xi}(1)$ — различные реализации шумовых векторов.

Направляющий вектор $\hat{\boldsymbol{\rho}}$ получается при нахождении векторного произведения разностных векторов (рис. 7, б):

$$\hat{\boldsymbol{\rho}} |\hat{\mathbf{m}}(1)| |\hat{\mathbf{m}}(0)| \sin \hat{\gamma} = [\hat{\mathbf{m}}(1), \hat{\mathbf{m}}(0)].$$

Это произведение на основе (21) можно представить как

$$[\hat{\mathbf{m}}(1), \hat{\mathbf{m}}(0)] = [\mathbf{m}(1), \mathbf{m}(0)] + [\mathbf{m}(1), \boldsymbol{\xi}(0)] + [\boldsymbol{\xi}(1), \mathbf{m}(0)] + [\boldsymbol{\xi}(0), \boldsymbol{\xi}(1)]. \quad (22)$$

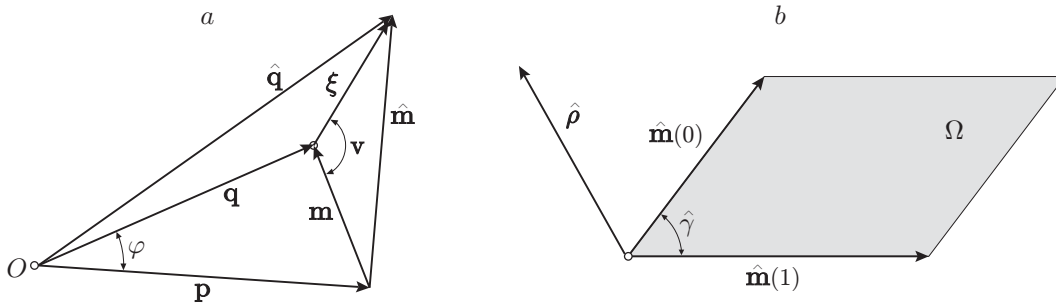


Рис. 7. Оценка помехоустойчивости вычисления направляющего вектора $\hat{\rho}$: a — получение незашумленного \mathbf{m} и зашумленного $\hat{\mathbf{m}}$ разностных векторов; b — направляющий вектор $\hat{\rho}$ оси вращения как нормаль к собственной плоскости разностных векторов $\hat{\mathbf{m}}(0)$ и $\hat{\mathbf{m}}(1)$

Видно, что лишь первое векторное произведение задает безошибочное (незашумленное) значение направляющего вектора оси вращения с весом

$$|\mathbf{m}(1)||\mathbf{m}(0)| \sin \gamma. \tag{23}$$

Поэтому чем больше значение веса (23) по сравнению с весами при зашумленных нормалях, задаваемых тремя остальными векторными произведениями в (22), тем точнее будет определен этот вектор. Модули разностных векторов на основании теоремы косинусов для треугольников с учетом соотношений (21) будут иметь вид

$$|\mathbf{m}(0)| = \sqrt{2(1 - \cos \varphi(0))}, \quad |\mathbf{m}(1)| = \sqrt{2(1 - \cos \varphi(1))},$$

где $\varphi(0)$ и $\varphi(1)$ — углы между $\mathbf{q}(0), \mathbf{p}(0)$ и $\mathbf{q}(1), \mathbf{p}(1)$. Таким образом, для минимизации ошибки вычисления направляющего вектора оси вращения OO' необходимо формировать разностные векторы $\hat{\mathbf{m}}$ из пар векторов \mathbf{q} и \mathbf{p} с углом $\hat{\varphi}$, значение которого близко к $\pi/2$. Для таких векторов модуль реальной части их скалярного произведения не должен превышать малой пороговой величины ε , причем угол $\hat{\gamma}$ между разными векторами $\hat{\mathbf{m}}(0)$ и $\hat{\mathbf{m}}(1)$ также должен быть близок к $\pi/2$:

$$|\operatorname{Re}(\hat{q}, p)| \leq \varepsilon, \quad |\operatorname{Re}(\hat{\mathbf{m}}(0), \hat{\mathbf{m}}(1))| \leq \varepsilon.$$

Заключение. Произвольный поворот распознаваемого изображения по отношению к эталонному изображению объекта наряду с воздействием шумов и помех усложняет процесс принятия решения о классе объекта. Мера схожести векторного сигнала, задающего изображение, с его повернутой копией уменьшается в результате вращения. Так как класс распознаваемого изображения при этом не меняется, то неконтролируемое преобразование поворота является помеховым фактором. Поэтому меру схожести распознаваемого изображения с эталонными изображениями классов алфавита требуется определять в условиях нулевого (или близкого к нему) углового рассогласования. Обеспечение таких условий связано с необходимостью решения обратной задачи вращения векторного сигнала.

Применение кватернионов для решения задач обработки трехмерных изображений основано на «дуализме кватернионных единиц, являющихся, с одной стороны, ортами реального трехмерного пространства, а с другой — операторами преобразования» [5]. Применительно к решению обратной задачи положительный эффект состоит в следующем:

1. Возможность декомпозиции задачи путем разделения ее на две подзадачи: определение направляющего вектора оси вращения и вычисление угла поворота.

2. Подход, рассмотренный в разд. 2.3 и основанный на кватернионном представлении векторов, требует на одну пару векторов \mathbf{p} и \mathbf{q} порядка 20 простейших арифметических операций вместо 50 более сложных операций при использовании матричных методов.

3. Декомпозиция задачи позволила выяснить механизм влияния шума на точность определения параметров вращения и дать рекомендации для выбора пар векторов, обеспечивающих минимальное влияние шума на результаты вычислений.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Бакулев П. А., Сосновский А. А.** Радиолокационные и радионавигационные системы: Учеб. пособие для вузов. М.: Радио и связь, 1994. 296 с.
2. **Fu K. S., Gonzalez R. C., Lee C. S. G.** Robotics: Control, Sensing, Vision, and Intelligence. McGraw-Hill, Inc., 1987. 624 p.
3. **Gonzalez R. C., Woods R. E.** Digital Image Processing. Prentice Hall, 2002. 1072 p.
4. **Фурман Я. А., Хафизов Д. Г.** Распознавание групповых точечных объектов в трехмерном пространстве // Автометрия. 2003. **39**, № 1. С. 3–18.
5. **Бранец В. Н., Шмыглевский И. П.** Применение кватернионов в задачах ориентации твердого тела. М.: Наука, 1973. 320 с.
6. **Ишлинский А. Ю.** Ориентация, гироскопы и инерциальная навигация. М.: Наука, 1976. 672 с.
7. **Роженцов А. А., Хафизов Р. Г., Егошина И. Л., Хафизов Д. Г.** Оценка трудоемкости определения параметров вращений трехмерных объектов // Вест. Марийского гос. техн. ун-та. Сер. Радиотехнические и инфокоммуникационные системы. 2008. № 3. С. 51–62.
8. **Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.** Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1979. 285 с.
9. **Фурман Я. А., Кревецкий А. В., Роженцов А. А. и др.** Комплекснозначные и гиперкомплексные системы в задачах обработки многомерных сигналов /Под. ред. Я. А. Фурмана. М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. 456 с.
10. **Egoshina I. L., Furman Ya. A.** Defining the parameters of quaternion signals rotation // Proc. of the 9th Intern. Conf. "Pattern Recognition and Image Analysis: New Information Technologies" (PRIA-9-2008). Nizhni Novgorod, 2008. Vol. 1. P. 116–119.
11. **Furman Ya. A., Ryabinin K. B.** Determining the rotational variables of a spatial group point object from the object's filtering results // Journ. Commun. Techn. and Electron. 2008. **53**, N 1. P. 78–89.
12. **Рябинин К. Б., Фурман Я. А., Хафизов Р. Г.** Выбор посадочной площадки для беспилотного летательного аппарата // Сб. докл. 14-й Всерос. конф. «Математические методы распознавания образов». М.: МАКС Пресс, 2009. С. 437–440.

Поступила в редакцию 21 октября 2009 г.