ПМТФ, № 2, 1970

ОБ УРАВНЕНИЯХ ПОЛУЭМПИРИЧЕСКОЙ ТЕОРИИ ТУРБУЛЕНТНОГО ПЕРЕНОСА

А. Т. Онуфриев

(Долгопрудный)

Строится замкнутая система уравнений для неизотропного характера течения в предположении, что длина пути смешения не является малой по сравнению с характерным размером потока. Принимается, что поле пульсаций скорости можно характеризовать многоточечной функцией распределения, которая удовлетворяет уравнению непрерывности.

Это позволяет получить уравнения для одноточечной и двухточечной функций распределения. Делается ряд предположений о характере сил, действующих на турбулентное образование («моль» или вихрь) в потоке, о связи времени корреляции случайной силы с масштабом и интенсивностью турбулентности, о выражении интеграла в уравнении для одноточечной функции распределения и о выражении для тензора корреляции в изотропном случае. После вычисления моментов получается система уравнений Рейнольдса, в которой для ряда слагаемых следуют аппроксимации, обычно принимаемые из соображений размерности. Здесь это — следствие аппроксимаций для сил в уравнении для функции распределения. Замыкание системы уравнений для моментов сводится к решению уравнения для функции распределения. При этом оказывается, что интегральный характер переноса (диффузия неградиентного типа) связан с учетом моментов третьего порядка. Рассмотрен ряд примеров течений, определены значения эмпирических постоянных. Полученная система уравнений позволяет рассматривать течения с сильной анизотропией турбулентного переноса.

Общеизвестные результаты, основанные на привлечении уравнений для вторых моментов и соображений размерности для выражения соответствующих слагаемых в уравнении баланса турбулентной энергии через интенсивность и масштаб турбулентности, содержатся в исследованиях А. Н. Колмогорова, Л. Прандтля, Дж. Ротта и др. (библиографию и обзор этих работ можно найти в книге [1]).

В ряде работ была сделана попытка для описания процесса турбулентного переноса применить кинетические уравнения [2], а также использовать аналогию с процессами переноса нейтронов и излучения [3, 4]; соответствующая библиография приведена в работе [4].

1. Модель турбулентного переноса. Полагается, что многоточечная функция распределения, которой можно характеризовать поле пульсации скоростей, $f^{(N)}(q_i, p_i, T, \chi)$ $(i = 1, \ldots, N)$, где q_i — координаты, p_i — импульсы образований, T — температура, χ — концентрация примеси, удовлетворяет уравнению неразрывности

$$\frac{\partial f^{(N)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{p_i}{m} f^{(N)}\right] + \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{dp_i}{dt} f^{(N)}\right] + \frac{\partial}{\partial T_i}\left[\frac{dT}{dt} f^{(N)}\right] + \frac{\partial}{\partial \chi}\left[\frac{d\chi}{dt} f^{(N)}\right] = 0 \quad (1.1)$$

(будет рассматриваться только поток с малыми изменениями температуры и концентрации, так что величинами с пульсацией плотности следует пренебречь везде, кроме слагаемого с ускорением силы тяжести [1]).

Что касается масштабов образований, то принято самое простое предположение: в каждой точке потока размер молей характеризуется одним значением масштаба, пропорциональным интегральному масштабу корреляции, с которым связана величина пути смешения, определяемая как расстояние, характеризующее потерю корреляции между начальным и конечным положениями моля [5].

Функция совместного распределения в n точках

$$f^{(n)} = \int f^{(N)} \prod_{n+1}^{N} d\mathbf{p}_m \, d\mathbf{q}_m$$

удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{p_i}{m} f^{(n)}\right] + \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \int \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\frac{dp_i}{dt} f^{(N)}\right] \prod_{n+1}^{N} d\mathbf{p}_m \, d\mathbf{q}_m + \\ + \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{dT}{dt} f^{(n)}\right] + \frac{\partial}{\partial \chi}\left[\frac{d\chi}{dt} f^{(n)}\right] = 0 \qquad (1.2)$$

Одно из основных предположений касается вида выражения для силы, действующей на моль. Предполагается, что эта сила состоит из двух частей: первая часть $F_i = (dp_i \, / \, dt)_1$ описывает гидродинамическое взаимодействие моля с потоком благодаря существованию относительной скорости и имеет вид, аналогичный виду для силы, действующей на сферу радиуса L; вторая часть связана с действием на моль пульсаций давления. Это — случайная сила, зависящая от всех координат поля. Метод случайных сил для описания поля турбулентного потока использовался Е. А. Новиковым в работе [6]. Принято, что пульсации давления изменяются достаточно быстро по сравнению с изменением функций распределения, и сила, связанная с их воздействием, имеет время корреляции τ. Тогда интегрирование уравнения (1.2) в пределах времени корреляции от $-\tau$ до 0 дает [7]

$$\frac{\partial f^{(n)}}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{p_i}{m} f^{(n)}\right] + \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_1 f^{(n)}\right] + \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{dT}{dt} f^{(n)}\right] + \\ + \frac{\partial}{\partial \chi}\left[\frac{d\chi}{dt} f^{(n)}\right] = \frac{1}{\tau}\left[- f^{(n)} + \int f^{(n)} (\mathbf{p}_s - \Delta\mathbf{p}_s) \, W(\Delta\mathbf{p}_s) \, \Pi d(\Delta\mathbf{p}_s)\right] \qquad (1.3)$$

Здесь $W(\Delta p)$ — вероятность отклонения импульса на Δp. Не имея возможности получить точное решение уравнений (1.3), делается попытка использовать их для получения выражений для одноточечной и двухточечной функций распределения в зависимости от параметров поля неоднородного потока.

Для $n = 1$ полагаем $f^{(1)} = f$ и

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{p_i}{m} f\right] + \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_1 f\right] + \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{dT}{dt} f\right] + \frac{\partial}{\partial \chi}\left[\frac{d\chi}{dt} f\right] = \\ = \frac{1}{\tau}\left[- f + \int f(\mathbf{p} - \Delta\mathbf{p}) \, W(\Delta\mathbf{p}) \, d(\Delta\mathbf{p})\right] \qquad (1.4)$$

Для выражения интеграла в правой части принято приближение

$$\int f(\mathbf{p} - \Delta\mathbf{p}) \, W(\Delta\mathbf{p}) \, d(\Delta\mathbf{p}) = f_0$$

$$f_0 = \langle\rho\rangle \left(\frac{4\pi E}{3}\right)^{-3/2} \exp\left[-\frac{3(u_i - \langle u_i\rangle)^2}{4E}\right] (\pi \langle T'^2\rangle)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(T - \langle T\rangle)^2}{\langle T'^2\rangle}\right] \times \\ \times (\pi \langle \chi'^2\rangle)^{-1/2} \exp\left[-\frac{(\chi - \langle\chi\rangle)^2}{\langle\chi'^2\rangle}\right], \qquad E = \frac{1}{2}\langle u_k'^2\rangle$$

Здесь f_0 — локально-равновесное значение функции распределения. Соображения для такого приближения чисто качественные и основаны на том, что это так в полностью равновесном случае, и на широком использовании такого приближения в кинетической теории газов, хотя смысл правой части там другой.

Для величин τ соотношение, как это делается и обычно, принято на основании соображений размерности

$$\tau = ALE^{-1/2} \tag{1.5}$$

где A — эмпирическая постоянная. Уравнение (1.4) при этом значительно упрощается

$$\frac{\partial f}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial q_i}\left[\frac{p_i}{m} f\right] + \frac{\partial}{\partial p_i}\left[\left(\frac{dp_i}{dt}\right)_1 f\right] + \frac{\partial}{\partial T}\left[\frac{dT}{dt} f\right] + \frac{\partial}{\partial \chi}\left[\frac{d\chi}{dt} f\right] = (f_0 - f)/\tau \tag{1.6}$$

Для величин $F_i = (dp_i / dt)_1$, dT / dt и $d\chi / dt$ нужно принять некоторые соотношения, основываясь на опытных данных о процессах трения, теплообмена и массообмена для тела, двигающегося в жидкости. В частности, принято

$$F_i = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \langle P\rangle}{\partial x_i} - g\delta(x_i, z) - |C|\, u_i' \frac{3\alpha_0}{8L}. \tag{1.7}$$

Здесь сила сопротивления аппроксимирована выражением, справедливым при больших значениях локального числа Рейнольдса (см. также [3, 8]).

Желательно было бы полностью сохранить интегральный характер решения для функций распределения f и $f^{(2)}$, однако это удалось сделать только для функции f. Развитое построение можно будет усовершенствовать, если удастся получить более удовлетворительное представление для f и $f^{(2)}$.

2. Уравнения. Умножая уравнение (1.6) на величину $Q(u, T, \chi)$ и интегрируя по всему пространству переменных u, T, χ, получаем уравнение переноса

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle\rho\rangle\langle Q\rangle + \frac{\partial}{\partial x_i}\langle\rho\rangle\langle u_i Q\rangle - \langle\rho\rangle\left\langle F_i \frac{\partial Q}{\partial u_i}\right\rangle - \langle\rho\rangle\left\langle\frac{dT}{dt}\frac{\partial Q}{\partial T}\right\rangle -$$
$$- \langle\rho\rangle\left\langle\frac{d\chi}{dt}\frac{\partial Q}{\partial \chi}\right\rangle = \int \tau^{-1} Q(f_0 - f)\, du\, dT\, d\chi \tag{2.1}$$

Полагая $Q = 1$, u_α, u_α^2, $u_\alpha u_\beta$, T, $u_\alpha T$, T^2, χ, $u_\alpha\chi$, χ^2, можно получить уравнения для средних величин и вторых моментов (по α и β суммирование не проводится). Далее принимается, что величина $\langle\rho\rangle$ — постоянная. Строго это соответствует постоянству в потоке значения энергии пульсационного движения. При рассмотрении всего потока, включая и области вблизи твердой стенки или свободной границы, где это условие нарушается, надо вводить величину «плотности турбулентного состояния потока» $\langle\rho\rangle$, которая связана с коэффициентом перемежаемости, и рассматривать поток, состоящий из двух состояний среды: ламинарного и турбулентного.

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial\langle u_k\rangle}{\partial x_k} = 0 \tag{2.2}$$

Уравнение движения для средних значений скорости

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u_i\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}[\langle u_k\rangle\langle u_i\rangle + \langle u_i' u_k'\rangle] = -\frac{1}{\langle\rho\rangle}\frac{\partial\langle P\rangle}{\partial x_i} - g\delta(x_i, z) \tag{2.3}$$

Уравнения для составляющих тензора Рейнольдсовых напряжений

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u_\alpha' u_\beta'\rangle + \frac{\partial}{\partial x_k}[\langle u_k\rangle\langle u_\alpha' u_\beta'\rangle + \langle u_k' u_\alpha' u_\beta'\rangle] + \langle u_\beta' u_k'\rangle\frac{\partial\langle u_\alpha\rangle}{\partial x_k} +$$

$$+ \langle u_\alpha' u_k'\rangle\frac{\partial\langle u_\beta\rangle}{\partial x_k} = -g\frac{\langle\rho' u_\beta'\rangle}{\langle\rho\rangle}\delta(x_\alpha, z) - g\frac{\langle\rho' u_\alpha'\rangle}{\langle\rho\rangle}\delta(x_\beta, z) - \quad (2.4)$$

$$-\langle|C|\, u_\alpha' u_\beta'\rangle\, 3a_0/4L + \tau^{-1}[{}^2/_3 E\delta(\alpha,\beta) - \langle u_\alpha' u_\beta'\rangle]$$

Уравнение энергии

$$\frac{\partial C_p\langle T\rangle}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x_k}[C_p\langle T\rangle\langle u_k\rangle + C_p\langle T' u_k'\rangle] = \frac{1}{\langle\rho\rangle}\frac{d\langle P\rangle}{dt} \quad (2.5)$$

Уравнения для составляющих вектора турбулентного потока тепла

$$\frac{\partial}{\partial t}C_p\langle T' u_i'\rangle + \langle u_i' u_k'\rangle\frac{\partial C_p\langle T\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}[\langle u_k\rangle\langle C_p T' u_i'\rangle] +$$

$$+ C_p\langle T' u_k'\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_k} + \frac{\partial}{\partial x_k}C_p\langle T' u_i' u_k'\rangle = -C_p\langle T' u_i'\,|C|\rangle\frac{3a_0}{8L} - \quad (2.6)$$

$$-\frac{1}{\langle\rho\rangle}\frac{d\langle P\rangle}{dt}\frac{\langle\rho' u_i'\rangle}{\langle\rho\rangle} - \tau^{-1}\langle C_p T' u_i'\rangle - C_p\langle T'\rho'\rangle g\delta(x_i, z)$$

Уравнение для интенсивности пульсаций температуры

$$\frac{\partial}{\partial t}\frac{C_p\langle T'^2\rangle}{2} + \frac{C_p}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}[\langle u_k\rangle\langle T'^2\rangle + \langle T'^2 u_k'\rangle] +$$

$$+ C_p\langle T' u_k'\rangle\frac{\partial\langle T\rangle}{\partial x_k} = -\frac{1}{\langle\rho\rangle}\frac{d\langle P\rangle}{dt}\frac{\langle\rho' T'\rangle}{\langle\rho\rangle} \quad (2.7)$$

Уравнения, относящиеся к полю концентрации, выписываться здесь не будут. Уравнения (2.2)—(2.7), (1.6), (1.5) и уравнение для масштаба (приводится в следующем разделе) составляют замкнутую систему. Моменты третьего порядка, входящие в уравнения для моментов второго порядка, надо определять, пользуясь решением для функции распределения. Для величины $\langle|C|\, u_\alpha' u_\beta'\rangle$ и т. п. примем выражение $\sim E^{1/2}\langle u_\alpha' u_\beta'\rangle$.

3. Уравнение для масштаба L. Приближенное уравнение для L получается путем интегрирования и осреднения по углу уравнения для корреляционного тензора второго ранга, так же как это сделано в работе Ротта [9]. Отличие заключается в том, что исходное уравнение и приближенные выражения для моментов третьего порядка в данной работе получены на основе уравнения (1.3) для функции распределения $f^{(2)}$.

Это уравнение умножается на $u_\alpha^{(a)} u_\beta^{(b)}$ и интегрируется по всему пространству переменных. В результате, используя уравнения движения в точках a и b и уравнение неразрывности, получаем уравнение переноса в следующем виде. Введем переменные: расстояние между точками a и b потока ζ и координаты $x_k^{(ab)}$

$$\zeta_k = x_k^{(b)} - x_k^{(a)}, \quad x_k^{(ab)} = {}^1/_2\,[x_k^{(b)} + x_k^{(a)}]$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\langle u_\alpha'^{(a)} u_\beta'^{(b)}\rangle + \langle u_k'^{(a)} u_\beta'^{(b)}\rangle\left[\frac{\partial\langle u_\alpha\rangle}{\partial x_k}\right]^{(a)} + \langle u_\alpha'^{(a)} u_k'^{(b)}\rangle\left[\frac{\partial\langle u_\beta\rangle}{\partial x_k}\right]^{(b)} +$$

$$+\frac{1}{2}[\langle u_k^{(a)}\rangle + \langle u_k^{(b)}\rangle]\frac{\partial}{\partial x_k^{(ab)}}\langle u_\alpha'^{(a)} u_\beta'^{(b)}\rangle + [\langle u_k^{(b)}\rangle - \langle u_k^{(a)}\rangle]\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\langle u_\alpha'^{(a)} u_\beta'^{(b)}\rangle +$$

$$+\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k^{(ab)}}[\langle u_\alpha'^{(a)} u_\beta'^{(b)} u_k'^{(b)}\rangle + \langle u_\alpha'^{(a)} u_k'^{(a)} u_\beta'^{(b)}\rangle] +$$

$$+\frac{\partial}{\partial\zeta_k}\left[\langle u_\alpha'^{(a)}u_k'^{(b)}u_\beta'^{(b)}\rangle-\langle u_\alpha'^{(a)}u_k'^{(a)}u_\beta'^{(b)}\rangle\right]=-g\delta(x_\alpha,z)\frac{\langle\rho'^{(a)}u_\beta'^{(b)}\rangle}{\langle\rho\rangle}-$$

$$-g\delta(x_\beta,z)\frac{\langle\rho'^{(b)}u_\alpha'^{(a)}\rangle}{\langle\rho\rangle}-\langle|C|^{(a)}u_\alpha'^{(a)}u_\beta'^{(b)}\rangle\frac{3a_0}{8L_{(a)}}-$$

$$-\langle|C|^{(b)}u_\alpha'^{(a)}u_\beta'^{(b)}\rangle\frac{3a_0}{8L_{(b)}}+\int u_\alpha^{(a)}u_\beta^{(b)}\tau^{-1}(F-f^{(2)})\,du^{(a)}\,du^{(b)}\,dT\,d\chi \quad (3.1)$$

В общем случае масштаб, видимо, не является скалярной величиной. Но при первом приближенном рассмотрении, когда был сделан целый ряд упрощающих предположений (одним из которых является введение только одного среднего масштаба в точке), целесообразно и дальше рассмотреть самый простой случай. Поэтому поступаем следующим образом: записываем уравнение для суммы $\langle u_i'^{(a)}u_i'^{(b)}\rangle$, интегрируем его в точке (ab) по расстоянию ζ между точками a и b и по углу, принимаем средние значения

$$^1/_2\left[\langle u_k^{(a)}\rangle+\langle u_k^{(b)}\rangle\right]\approx\langle u_k^{(ab)}\rangle,\qquad L_{(a)}\approx L_{(b)}\approx L_{(ab)}$$

Предполагается что последнее слагаемое, зависящее от пульсаций давления имеет вид $\sim\tau^{-1}\langle u_\alpha'^{(a)}u_\beta'^{(b)}\rangle$ и его можно объединить со слагаемыми, соответствующими диссипации. Кроме того, примем

$$\int\langle u_i'^{(a)}u_i'^{(b)}\rangle\,d\zeta\,d\Omega\sim\langle u_i'^2\rangle L=2LE$$

$$\int\langle u_k'^{(a)}u_l'^{(b)}\rangle\,d\zeta\,d\Omega\sim 2L\langle u_k'u_l'\rangle\xi_0$$

В результате для L получим приближенное уравнение

$$\frac{\partial}{\partial t}(LE)+\xi_0L\langle u_i'u_k'\rangle\frac{\partial\langle u_i\rangle}{\partial x_k}+\langle u_k\rangle\frac{\partial}{\partial x_k}(LE)=$$

$$=-\frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial x_k}\left[\int\left(\langle u_i'^{(a)}u_i'^{(b)}u_k'^{(b)}\rangle+\langle u_i'^{(a)}u_i'^{(b)}u_k'^{(a)}\rangle\right)\frac{d\zeta\,d\Omega}{4\pi}\right]- \quad (3.2)$$

$$-\alpha_sE^{3/2}3a_0/4-2\alpha_ggL\langle\rho'u_z'\rangle/\langle\rho\rangle$$

Чтобы определить вид зависимости моментов третьего порядка для неоднородного случая, рассмотрим следующую простейшую модель: в уравнении для $f^{(2)}$ основную роль играют пульсации давления, силами сопротивления можно пренебречь. Тогда можно рассматривать случай стационарного поля, для которого уравнение для $f^{(2)}$ в координатах ζ_k, $x_k^{(ab)}$ имеет вид

$$^1/_2(u_k^{(a)}+u_k^{(b)})\partial f^{(2)}/\partial x_k^{(ab)}+(u_k^{(a)}-u_k^{(b)})\partial f^{(2)}/\partial\zeta_k=\tau^{-1}(F-f^{(2)}) \quad (3.3)$$

В однородном случае $f_0^{(2)}$ зависит лишь от ζ и удовлетворяет уравнению

$$(u_k^{(a)}-u_k^{(b)})\partial f_0^{(2)}/\partial\zeta_k=\tau^{-1}(F-f_0^{(2)})$$

Поправку к выражению для однородного случая получаем, подставляя в выражение для $f^{(2)}$ из (3.3) значение $f_0^{(2)}$

$$f^{(2)}=F-\tau(u_k^{(a)}-u_k^{(b)})\partial f^{(2)}/\partial\zeta_k-{}^1/_2\tau(u_k^{(a)}+u_k^{(b)})\partial f^{(2)}/\partial x_k^{(ab)}\approx$$

$$\approx f_0^{(2)}-{}^1/_2\tau(u_k^{(a)}+u_k^{(b)})\partial f_0^{(2)}/\partial x_k^{(ab)} \quad (3.4)$$

В этом выражении параметры E, L, $\langle u_m \rangle$ нужно считать уже функциями координат. При дифференцировании в правую часть могут войти производные

$$\partial E / \partial x_k, \quad \partial L / \partial x_k, \quad u_m \partial \langle u_m \rangle / \partial x_k$$

Предполагая равенство нулю «семиинвариантов» (кумулянтов) [1] четвертого и пятого порядков, четвертые моменты можно выразить через вторые, а пятыми, которые оказываются пропорциональными третьим, в рассматриваемом приближении слабой неоднородности следует пренебречь. В частности, можно записать

$$\begin{gathered}
\langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} \rangle \approx \langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} \rangle_0 - \\
- \sum [\gamma_1' L E^{-3/2} \langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} u_l'^{(\ )} \rangle \partial E / \partial x_l + \\
+ \gamma_2' E^{-1/2} \langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} u_l'^{(\ )} \rangle \partial L / \partial x_l + \gamma_3' L E^{-3/2} \langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} u_m'^{(ab)} u_l'^{(\ )} \rangle \times \\
\times \frac{\partial \langle u_m' \rangle}{\partial x_l} \Bigg] \approx \langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} \rangle_0 - \sum E^{-3/2} [\langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} \rangle \langle u_k'^{(b)} u_l'^{(\ )} \rangle + \\
+ \langle u_i'^{(a)} u_k'^{(b)} \rangle \langle u_i'^{(b)} u_l'^{(\ )} \rangle + \langle u_i'^{(a)} u_l'^{(\ )} \rangle \langle u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} \rangle] \times \\
\times [\gamma_1' L \partial E / \partial x_l + \gamma_2' E \partial L / \partial x_l]
\end{gathered}$$

После интегрирования по расстоянию между точками и углу получается

$$\begin{gathered}
\int \langle u_i'^{(a)} u_i'^{(b)} u_k'^{(b)} \rangle \frac{d\zeta d\Omega}{4\pi} \approx \\
\approx - L E^{1/2} \left[\frac{\langle u_k' u_l' \rangle}{E} + \frac{\langle u_i' u_k' \rangle \langle u_i' u_l' \rangle}{E^2} \right] \left[\gamma_1 L \frac{\partial E}{\partial x_l} + \gamma_2 E \frac{\partial L}{\partial x_i} \right]
\end{gathered} \tag{3.5}$$

Величины постоянных γ_1 и γ_2 должны определяться по опытным данным. Подставляя выражение (3.5) в (3.2), получаем окончательное уравнение для масштаба

$$\begin{gathered}
\frac{\partial}{\partial t} LE + \xi_0 L \langle u_i' u_k' \rangle \frac{\partial \langle u_i \rangle}{\partial x_k} + \langle u_k \rangle \frac{\partial}{\partial x_k} LE = \\
= \frac{\partial}{\partial x_k} \left\{ L E^{1/2} \left[\frac{\langle u_k' u_l' \rangle}{E} + \frac{\langle u_i' u_k' \rangle \langle u_i' u_l' \rangle}{E^2} \right] \right. \\
\left. [\gamma_1 L \partial E / \partial x_l + \gamma_2 E \partial L / \partial x_l] \right\} - \alpha_s E^{3/2} 3 a_0 / 4 - 2 \alpha_g g L \langle \rho' u_z' \rangle / \langle \rho \rangle
\end{gathered} \tag{3.6}$$

Это уравнение сходно с уравнением для масштаба, полученным в работе Ротта [9], который при выводе использовал ряд соотношений и гипотез для спектральных функций. Здесь уравнение получено на основе использования функций распределения.

4. Уравнения, приведенные выше, относятся к развитому турбулентному потоку и не учитывают процессов, связанных с молекулярной диффузией. Рассмотрение течения в области, где существенно влияние вязкости, требует правильного учета третьих моментов, которые играют в этой области определяющую роль.

Величины третьих моментов должны определяться на основе решения уравнения для функции распределения. Построить решение для f в простом виде не представляется возможным. Поэтому построим приближенное решение, которое правильно учитывает основную особенность процесса турбулентного переноса: порождение молей и их распространение на значительные расстояния. В уравнении для функции распределения пренебрежем влиянием сил сопротивления, хотя соответствующие слагаемые, вообще говоря, не малы, и рассмотрим плоское течение, в котором параметры потока зависят только от поперечной координаты. Тогда

$$u_y' \frac{\partial f}{\partial y} = \tau^{-1}(f_0 - f)$$

$$f(y, u_y' < 0) = \int\limits_y^{\infty} f_0 \exp\left[-\int\limits_y^s \frac{ds}{\tau |u_y'|}\right] \frac{ds}{\tau |u_y'|} \tag{4.1}$$

$$f(y, u_y' > 0) = \int\limits_{-\infty}^{y} f_0 \exp\left[-\int\limits_s^y \frac{ds}{\tau u_y'}\right] \frac{ds}{\tau u_y'}$$

Уравнение для напряжения трения имеет вид

$$\frac{d}{dy} \langle u_x' u_y'^2 \rangle + \langle u_y'^2 \rangle \frac{d\langle u_x \rangle}{dy} = -\tau^{-1} \langle u_x' u_y' \rangle \tag{4.2}$$

Вычислив величины

$$\langle u_x' u_y' \rangle = \int (u_x - \langle u_x \rangle) u_y f du_x du_y du_z$$

$$\langle u_y'^2 \rangle = \int u_y^2 f du_x du_y du_z \tag{4.3}$$

$$\langle u_x' u_y'^2 \rangle = \int (u_x - \langle u_x \rangle) u_y^2 f du_x du_y du_z$$

можно непосредственной подстановкой убедиться, что уравнение (4.2) удовлетворяется. Но выражение (4.3) для напряжения трения описывает интегральный перенос при большой величине пути смешения, следовательно, диффузия неградиентного типа эквивалентна учету момента третьего порядка.

Заметим здесь также, что аппроксимации для сил, действующих на моль, принятые в уравнении для функции распределения, привели к выражениям, которые применялись для слагаемых, содержащих пульсации давления, и вводились из соображений размерности и физических соображений. Отличие получилось в слагаемом, характеризующем диссипацию энергии — обычно использовалось изотропное выражение

$$^3/_4 a_0 L^{-1} E^{3/2} \delta(\alpha, \beta)$$

Здесь же получилось выражение

$$^3/_4 a_0 L^{-1} E^{1/2} \langle u_\alpha' u_\beta' \rangle$$

т. е. диссипация энергии для составляющей кинетической энергии пульсационного движения, например $\langle u_x'^2 \rangle$, пропорциональна этой величине $\sim E^{1/2} \langle u_x'^2 \rangle$, а не принимается равной одной трети общей величины диссипации энергии.

5. Плоское стационарное течение турбулентного потока. Рассмотрим плоский, стационарный, изотермический поток опять для случая, когда параметры потока изменяются только в направлении оси y. Скорость потока U направлена вдоль оси x.

Слой постоянного напряжения трения. Такое течение наблюдается вдали от стенки (действием вязкости можно пренебречь). Моменты третьего порядка равны нулю. Введем безразмерные величины

$$U^+ = Uv_*^{-1}, \quad y^+ = yv_*\nu^{-1}$$

В результате получим ($B = 1 + {}^3/_4 a_0 A$)

$$\langle u_x' u_y' \rangle v_*^{-2} = -1$$

$$-2\frac{dU^+}{dy^+} = -\frac{B\langle u_x'^2\rangle^+ (E^+)^{1/2}}{AL^+} + {}^2/_3\frac{(E^+)^{3/2}}{AL^+}$$

$$\frac{B\langle u_y'^2\rangle^+ (E^+)^{1/2}}{AL^+} = {}^2/_3\frac{(E^+)^{3/2}}{AL^+}$$

$$\frac{dU^+}{dy^+} = {}^3/_4\frac{a_0(E^+)^{3/2}}{L^+}, \qquad \langle u_y'^2\rangle^+\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{B(E^+)^{1/2}}{AL^+}$$

$$-\xi_0 L^+\frac{dU^+}{dy^+} = \gamma_2\frac{d}{dy^+}\left\{L^+(E^+)^{3/2}\left[\frac{\langle u_y'^2\rangle^+}{E^+}\left(1 + \frac{\langle u_y'^2\rangle^+}{E^+}\right) + \right.\right.$$
$$\left.\left. + (E^+)^{-2}\right]\frac{dL^+}{dy^+}\right\} - \frac{3}{4}\alpha_s a_0(E^+)^{3/2}$$

Эти уравнения дают

$$L^+\frac{dU^+}{dy^+} = \frac{3a_0(E^+)^{3/2}}{4}, \qquad \frac{\langle u_x'^2\rangle^+}{E^+} = \frac{2(3B-2)}{3B}$$

$$\frac{\langle u_y'^2\rangle^+}{E^+} = \frac{2}{3B}, \quad E^+ = B\left[\frac{2}{a_0A}\right]^{1/2}$$

$$\frac{d}{dy^+}\left(L^+\frac{dL^+}{dy^+}\right) = \mathrm{const} = \beta_0^2$$

Из последнего соотношения следует:

$$L^+ = \beta_0 y^+$$

а из первого

$$U^+ = C_0 + \frac{3a_0B^{3/2}}{4\beta_0}\left(\frac{2}{a_0A}\right)^{3/4}\ln y^+ = C_0 + \varkappa^{-1}\ln y^+$$

т. е. известный для этого случая логарифмический закон для распределения скорости. Значение постоянной $\varkappa = 0.40$. Примем также $\beta_0 = 0.40$, $a_0 = 0.345$. Тогда $a_0 A = {}^4/_3$ и $A = 3.86$. Приведенные выше соотношения при этих значениях постоянных дают

$$E^+ = 2{,}44 \quad \langle u_x'^2\rangle = 3{,}24, \quad \langle u_y'^2\rangle = 0{,}81$$

Эти значения удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными [10].

Изотропный плоский поток за решеткой. Для изотропного потока уравнения сильно упрощаются, так как

$$\langle u_x'^2\rangle = \langle u_y'^2\rangle = \langle u_z'^2\rangle = {}^2/_3 E$$

Вязкими силами можно пренебречь, скорость U постоянна, и имеем уравнения

$$u\frac{dE}{dx} = -\frac{E^{3/2}3a_0}{4L}, \quad u\frac{dLE}{dx} = -\frac{\alpha_s E^{3/2}3a_0}{4}$$

Здесь пренебрегли также моментами третьего порядка. Из этих уравнений следует соотношение для инварианта Л. Г. Лойцянского [11]

$$\Lambda = EL^{1/(1-\alpha_s)}$$

и так как должно быть $1 - \alpha_s = {}^1/_5$, то $\alpha_s = 0.8$.

После этого легко находятся зависимости

$$L \sim x^{2/7}, \quad E \sim x^{-10/7}$$

Это соответствует известным результатам А. Н. Колмогорова.

Течение в аэродинамической трубе. В этом случае принимается,что масштаб L имеет постоянное значение, которое пропорционально размерам ячеек решетки, и тогда справедливо уравнение [12]

$$\frac{dE}{dt} = -\frac{3}{2}\left(\frac{2}{3}\right)^{3/2}\frac{A''}{l}E^{3/2}, \qquad A'' = 1.0 \div 1.2$$

Здесь l — продольный интегральный масштаб, т. е. величина, пропорциональная L (близкая к AL, так как это значение входит в показатель экспоненты). В этом случае уравнение для величины E дает

$$dE \,/\, dt = -\,{}^3/_4\, a_0 L^{-1} E^{3/2}$$

Сравнивая эти два соотношения, получаем оценку

$$l \approx 4L \,/\, 3a_0 = AL$$

которая согласуется с принятым ранее значением ${}^3/_4 a_0 A = 1$.

6. Переход к предельным соотношениям теории пути смешения. Система уравнений описывает турбулентный перенос без введения предположения о малости величины пути смешения L. Теория пути смешения была развита Л. Прандтлем на основании аналогии с молекулярным переносом в режиме сплошной среды, когда L мало по сравнению с характерным размером задачи. К модели теории пути смешения придем, если будем считать, что при $L \to 0$ величины τ и $\langle u_i' u_j' \rangle$ $(i \neq j)$ суть малые первого порядка, а E — величина конечная. Чтобы выполнить эти условия, надо принять, что $a_0 \to 0$. Все эти условия противоречивы, так как в турбулентном потоке величина $\langle u_x' u_y' \rangle$, например, не мала по сравнению с E.

При перечисленных условиях исходные уравнения (без учета вязкости) дают

$$\langle u_\alpha'^2 \rangle = {}^2/_3 E - 2\nu' \partial \langle u_\alpha \rangle \,/\, \partial x_\alpha$$
$$\langle u_\alpha' u_\beta' \rangle = -\nu' (\partial \langle u_\alpha \rangle \,/\, \partial x_\beta + \partial \langle u_\beta \rangle \,/\, \partial x_\alpha)$$
$$c_p \langle T' u_i' \rangle = -k' \partial c_p \langle T \rangle \,/\, \partial x_i$$
$$\nu' = k' = {}^2/_3 A L E^{1/2}, \quad P' = \nu' \,/\, k' = 1$$

При этом выражение для коэффициента турбулентной вязкости становится скаляром.

Если же не совершать предельного перехода $L \to 0$, то для турбулентного числа Прандтля P' получим выражение, отличное от единицы. Рассмотрим частный случай плоскопараллельного движения (не учитываются вязкие силы и моменты третьего порядка)

$$\langle u_x' u_y' \rangle = -\frac{AL}{(1 + 3a_0 A \,/\, 4) E^{1/2}} \langle u_y'^2 \rangle \frac{du}{dy}$$
$$c_p \langle T' u_y' \rangle = -\frac{AL}{(1 + 3a_0 A \,/\, 8)\, E^{1/2}} \langle u_y'^2 \rangle \frac{dc_p \langle T \rangle}{dy}$$

и для этого случая имеем

$$P' = \frac{1 + {}^3/_8 a_0 A}{1 + {}^3/_4 a_0 A} = {}^3/_4$$

при принятых значениях постоянных.

В уравнения вошли постоянные a_0, A, α_s, ξ_0, γ_1, γ_2, из которых значения α_s и A определяются по соотношениям, следующим из уравнений, как это было видно выше, остальные — из сравнения с опытными данными.

Как видно из простейших примеров, полученная система уравнений дает возможность описать известные закономерности, позволяет рассматривать диффузию неградиентного типа и неизотропное поведение составляющих кинетической энергии пульсационного движения и ввести неизотропную турбулентную вязкость, что оказывается существенным в ряде задач о турбулентном течении в стратифицированной среде.

Поступила 20 VII 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика, ч. 1, М., «Наука», 1965.
2. Шубауэр Г. Б., Чен К. М. Турбулентное течение. В кн.: «Турбулентные течения и теплопередача», М., Изд-во иностр. лит., 1963.
3. Булеев Н. И., Теоретическая модель механизма турбулентного обмена в потоках жидкости. В сб. «Теплопередача», М., Изд-во АН СССР, 1962.
4. Онуфриев А. Т. Об уравнениях интегральной диффузии. Применение к исследованию процесса турбулентного переноса, ПМТФ, 1967, № 4.
5. Тейлор Дж. Современное состояние теории турбулентной диффузии. В сб.: «Атмосферная диффузия и загрязнение воздуха», М., Изд-во иностр. лит., 1962, стр. 129—137.
6. Новиков Е. А. Метод случайных сил в теории турбулентности, ЖЭТФ, 1963, т. 44, вып. 6.
7. Айзеншитц Р. Статистическая теория необратимых процессов. М., Изд-во иностр. лит., 1963.
8. Harlow F. H., Nakayama P. I. Turbulence Transport Equations. Phys. Fluids, 1967, vol. 10, No. 11.
9. Rotta I. Statistische Theorie nichthomogener Turbulenz. Z., Phys., 1951, Bd 129, H. 5, S. 547—572; Bd 131, H. 1, S. 51—77.
10. Таунсенд А. А. Структура турбулентного потока с поперечным сдвигом. М., Изд-во иностр. лит., 1959.
11. Лойцянский Л. Г. Некоторые основные закономерности изотропного турбулентного потока. М., Тр., ЦАГИ, 1939, вып. 440.
12. Бэтчелор Дж. Теория однородной турбулентности. М., Изд-во иностр. лит., 1955, стр. 105—108.