7. **Алексеенко В. Д., Григорян С. С., Кошелев Л. И., Новгородов А. Ф., Рыков Г. В.** Измерение волн напряжений в мягких грунтах.— ПМТФ, 1963, № 2.
8. **Григорян С. С., Ляхов Г. М., Мельников В. В., Рыков Г. В.** Взрывные волны в лессовидном грунте.— ПМТФ, 1963, № 4.
9. **Рыков Г. В.** Экспериментальное исследование поля напряжений при взрыве в песчаном грунте.— ПМТФ, 1964, № 1.
10. **Рыков Г. В.** Влияние скорости деформирования на сжимаемость и сдвиг песчаных и глинистых грунтов при кратковременных нагрузках.— ПМТФ, 1969, № 3.
11. **Рыков Г. В.** Экспериментальные исследования сжимаемости глинистых грунтов при подземных взрывах.— ПМТФ, 1968, № 2.
12. **Котов А. И., Нарожная З. В., Рыков Г. В., Сутырин В. П.** Экспериментальные исследования сжимаемости песчаных грунтов и условия пластичности при кратковременных динамических нагрузках.— ПМТФ, 1976, № 5.
13. **Ляхов Г. М.** Основы динамики взрывных волн в грунтах и горных породах. М., «Недра», 1974.

УДК 539.374

К ТЕОРИИ УСТОЙЧИВОСТИ СЖИМАЕМОГО УПРУГОПЛАСТИЧЕСКОГО ГРУНТА

А. Н. Спорыхин

(Воронеж)

На основании трехмерных линеаризированных уравнений устойчивости исследуется процесс деформирования сжимаемого упругопластического грунта при малых докритических деформациях. В случае однородного докритического состояния общие решения уравнений устойчивости строятся аналогично [1].

1. Рассмотрим сжимаемый упругопластический грунт, физические уравнения которого определяем, следуя [2]. Предположим, что условие предельного состояния материала представлено в виде

$$\Phi(\sigma,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3) = 0, \tag{1}$$

где σ — первый инвариант тензора напряжений; Σ_2, Σ_3 — второй и третий инварианты девиатора тензора напряжений. Пусть при этом

$$e_{ij} = e^e_{ij} + e^p_{ij} \tag{2}$$

(e_{ij} — компоненты тензоров деформаций), причем упругие деформации связаны с напряжениями законом Гука

$$e^e_{ij} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij} - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}\delta_{ij}. \tag{3}$$

Соотношения, определяющие зависимость между тензором скоростей пластических деформаций и напряжениями, примем в форме [2]

$$\dot{e}^p_{ij} = \lambda\left[\frac{1}{3}\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\delta_{ij} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_2}\frac{\partial\Sigma_2}{\partial\sigma_{ij}} + \frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_3}\frac{\partial\Sigma_3}{\partial\sigma_{ij}}\right] + \psi(\sigma)\dot{\sigma}\delta_{ij}. \tag{4}$$

Здесь
$\dot\sigma = \frac{1}{3}\frac{d\sigma_{kk}}{dt}$; $\psi(\sigma) = \frac{d\varphi}{d\sigma}$; $e = \frac{1}{3}e_{kk}$; $\varphi(\sigma) - e = 0$ — функция объемного нагружения, которая полностью определяется из экспериментов на всестороннее равномерное растяжение — сжатие; $\lambda \geqslant 0$ — неопределенный множитель.

Полные деформации связаны с перемещениями формулами Коши

$$e_{ij} = \frac{1}{2}(u_{i,j} + u_{j,i}). \tag{5}$$

Уравнения равновесия при отсутствии массовых сил и граничные условия при заданных на поверхности тела силах примем в виде [3]

$$[\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]_{,j} = 0, \quad [\sigma_{jk}(\delta_{ik} + u_{i,k})]n_j = P_i, \tag{6}$$

где n_j — орты нормали к поверхности тела; P_i — составляющие поверхностных сил.

Пусть решение системы уравнений (1)—(6) есть

$$\sigma_{ij}^0(x_k, t), \ e_{ij}^0(x_k, t), \ e_{ij}^{0p}(x_k, t), \ u_i^0(x_k, t), \ldots$$

В дальнейшем исследуется устойчивость этого процесса по отношению к малым возмущениям.

Представим величины, связанные с возмущенной формой движения, в виде

$$\sigma_{ij} = \sigma_{ij}^0 + \sigma_{ij}^+, \ e_{ij} = e_{ij}^0 + e_{ij}^+, \ e_{ij}^p = e_{ij}^{0p} + e_{ij}^{+p}, \ldots$$

Компоненты характеристик возмущенного движения никаким индексом не отмечены, а возмущения отмечены индексом $+$. Тогда с точностью до линейных членов разложения (1) дает

$$\left(\frac{\partial\Phi}{\partial\sigma}\right)_0 \sigma^+ + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_2}\right)_0 \Sigma_2^+ + \left(\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_3}\right)_0 \Sigma_3^+ = 0, \tag{7}$$

где $3\sigma^+ = \sigma_{kk}^+; \ \Sigma_2^+ = 2s_{ij}^0 s_{ij}^+; \ \Sigma_3^+ = 3s_{ij}^+ s_{jp}^0 s_{pi}^0.$

Из соотношений (2), (3) имеем

$$e_{ij}^+ = e_{ij}^{+e} + e_{ij}^{+p}, \ e_{ij}^{+e} = \frac{1+\nu}{E}\sigma_{ij}^+ - \frac{\nu}{E}\sigma_{kk}^+\delta_{ij}. \tag{8}$$

Ассоциированный закон течения (4) принимает вид

$$e_{ij}^{+p} = \lambda_0 \xi_{ij}^+ + \lambda^+ \frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma_{ij}^0} + \eta^+\delta_{ij}, \tag{9}$$

где

$$\xi_{ij}^+ = \frac{1}{3}\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma^2}\sigma^+ + \left[2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma\partial\Sigma_2}s_{kl}^0 + 3\frac{\partial^2\Phi}{\partial\sigma\partial\Sigma_3}p_{lk}^0\right]s_{kl}^+\right\}\delta_{ij} + \tag{10}$$

$$+ 2\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Sigma_2\partial\sigma}\sigma^+ + \left[2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Sigma_2^2}s_{kl}^0 + 3\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Sigma_2\partial\Sigma_3}p_{lk}^0\right]s_{kl}^+\right\}s_{ij}^0 + 2\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_2}s_{ij}^+ +$$

$$+ 3\left\{\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Sigma_3\partial\sigma}\sigma^+ + \left[2\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Sigma_3\partial\Sigma_2}s_{kl}^0 + 3\frac{\partial^2\Phi}{\partial\Sigma_3^2}p_{lk}^0\right]s_{kl}^+\right\}p_{ij}^0 +$$

$$+ 3\frac{\partial\Phi}{\partial\Sigma_3}s_{pi}^0 s_{jp}^+; \ p_{lk}^0 = s_{cp}^0 s_{pk}^0;$$

$$\lambda_0 = \left[\delta\left(\varepsilon_{ij}^{0p}\varepsilon_{ij}^{0p} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^{0p}\varepsilon_{kk}^{0p}\right)\right]^{1/2}; \quad \lambda^+ = \delta\left[\varepsilon_{mn}^{+p} - \frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^{+p}\delta_{mn} -\right.$$

$$\left. - \lambda_0\left(\xi_{mn}^+ - \frac{1}{3}\xi_{kk}^+\delta_{mn}\right)\right]\frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma_{mn}^0};$$

$$\delta = \left[\frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma_{mn}^0}\frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma_{mn}^0} - \frac{1}{3}\left(\frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma^0}\right)^2\right]^{-1}; \ \eta^+ = \psi(\sigma_0)\dot{\sigma}^+ + \left(\frac{\partial\psi}{\partial\sigma}\right)_0\dot{\sigma}^0\sigma^+.$$

Для e_{ij}^+ получаем

$$2e_{ij}^+ = u_{i,j}^+ + u_{j,i}^+. \tag{11}$$

Линеаризированные уравнения равновесия и граничные условия имеют вид [3, 4]

$$(12)\qquad (\sigma_{ij}^{+}+\sigma_{jk}^{0}u_{i,k}^{+})_{,j}-\rho\ddot{u}_i^{+}=0,\quad (\sigma_{ij}^{+}+\sigma_{jk}^{0}u_{i,k}^{+})\,n_j=P_i^{+}.$$

Методом [5] можно аналогичным образом свести краевую задачу (7)—(12) к исследованию системы дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, и, таким образом, исследование устойчивости решения системы (7)—(12) будем производить по предельной системе уравнений.

В этом случае (9) принимает вид

$$(13)\qquad \varepsilon_{ij}^{+p}=\lambda^{+}\frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma_{ij}^0}+\eta^{+}\delta_{ij},$$

при этом

$$(14)\qquad \eta^{+}=\psi(\sigma_0)\dot{\sigma}^{+},\quad \lambda^{+}=\delta\left(\varepsilon_{mn}^{+p}-\frac{1}{3}\varepsilon_{kl}^{+p}\delta_{mn}\right)\frac{\partial\Phi^0}{\partial\sigma_{mn}^0}.$$

Остальные соотношения систем уравнений (7)—(12) сохраняют прежний вид с той лишь разницей, что величины с индексом нуль, входящие в них, — некоторые стационарные величины. Очевидно, полученные выше результаты можно распространить на случай, когда функция нагружения выбрана в более общем виде [6]

$$\Phi\left(\sigma,\ \Sigma_2,\ \Sigma_3,\ e^p,\ \mathrm{E}_2^p,\ \mathrm{E}_3^p,\ \Pi_2,\ \Pi_{12},\ \Pi_{21},\ k_i\right)=0.$$

Для определенности выберем характерное для сыпучих сред условие пластичности

$$(15)\qquad \Phi=\alpha\sigma^0+\sqrt{\frac{1}{2}}\,\Sigma_2^{0\;1/2}-k=0.$$

Уравнение (7) в этом случае запишем в виде

$$(16)\qquad 2\alpha\,(k-\alpha\sigma^0)\,\sigma^{+}+s_{ij}^0 s_{ij}^{+}=0.$$

Уравнения (13) с учетом (14) для условия пластичности (15) примут вид

$$(17)\qquad \varepsilon_{ij}^{+p}=\frac{s_{mn}^0}{k-\alpha\sigma^0}\left(\varepsilon_{mn}^{+p}-\frac{1}{3}\varepsilon_{kk}^{+p}\delta_{mn}\right)\left[\frac{s_{ij}^0}{2\,(k-\alpha\sigma^0)}+\right.$$
$$\left.+\frac{\alpha}{3}\delta_{ij}\right]+\psi(\sigma_0)\,\dot{\sigma}^{+}\delta_{ij}.$$

Исключая из соотношений (8), (16) и (17) величины e_{ij}^{+e}, e_{ij}^{+p}, σ^{+}, после ряда преобразований можно получить

$$(18)\qquad \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\sigma_{ij}^{+}=e_{ij}^{+}-\left(as_{ij}^0+\frac{1}{3}\delta_{ij}\right)e_{mn}^{+}+c\left[a\,(b-3\psi(\sigma_0))\,s_{ij}^0-\right.$$
$$\left.-\frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\delta_{ij}\right]\left[2\alpha^2 as_{kl}^0 e_{kl}^{+}-e_{mn}^{+}\right],$$

где

$a=2\alpha\,(k-\alpha\sigma^0)$; $b=3(2\nu-1)\mathrm{E}^{-1}$; $c=\mathrm{E}\,[2\alpha^2(1+\nu)-\mathrm{E}(b-3\psi(\sigma_0))]^{-1}$.

Рассмотрим случай основного напряженного состояния в виде

$$\sigma_{ii}^0=\mathrm{const}_i,\quad \sigma_{ij}^0=0,\quad i\neq j.$$

Линеаризированные трехмерные уравнения движения (12) в этом случае можно представить в форме

$$(19)\qquad \{\sigma_{ij}-[q(\delta_{j1}u_{i,1}+\delta_{j2}u_{i,2})+p\delta_{i3}u_{i,3}]\}_{,j}-\rho s^2 u_i=0,$$

граничные условия в виде

$$\{\sigma_{ij} - [q(\delta_{j1}u_{i,1} + \delta_{j2}u_{i,2}) + p\delta_{j3}u_{i,3}]\}n_j = P_i. \tag{20}$$

Здесь и далее в компонентах векторов и тензоров, характеризующих возмущения, выделен временной множитель $\exp st$, а для амплитудных величин возмущений индекс + опущен. При записи (19), (20) принято, что упругопластическое тело сжато вдоль оси $0x_3$ усилиями интенсивности p, а вдоль осей $0x_1$ и $0x_2$ — усилиями интенсивности q.

Линеаризированная связь (18) между напряжениями и деформациями для сжимаемого упругопластического грунта для случая основного движения, описанного выше, может быть представлена в форме

$$\sigma_{ij} = \delta_{ij}a_{jk}u_{k,k} + (1 - \delta_{ij})G_{ij}(u_{i,j} + u_{j,i}), \ (\Sigma k), \tag{21}$$

$$a_{jl} = \frac{\mathrm{E}}{1+\nu}\delta_{jl} + \left(2\alpha^2 as_{ll}^0 - 1\right)B_{jj} - A_{jj}, \quad G_{ij} = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)},$$

$$A_{ij} = \frac{\mathrm{E}}{1+\nu}\left(as_{ij}^0 + \frac{1}{3}\delta_{ij}\right), \quad B_{ij} = \frac{c\mathrm{E}}{1+\nu}\left[a(b - 3\psi(\sigma_0))s_{ij}^0 - \frac{1+\nu}{\mathrm{E}}\delta_{ij}\right].$$

Очевидно,

$$a_{11} = a_{22}, \quad a_{13} = a_{23}, \quad G_{ij} = \frac{\mathrm{E}}{2(1+\nu)} = G.$$

Следовательно, выражения (21) можно рассматривать как соотношения закона Гука для трансверсально-изотропного тела, при этом плоскость изотропии совпадает с плоскостью $x_1 0 x_2$.

Подстановка выражений (21) в уравнения (19) приводит к системе уравнений в амплитудах перемещений

$$L_{ij}u_j = 0. \tag{22}$$

Дифференциальные операторы L_{ij} имеют вид

$$L_{ij} = \delta_{ij}\left(M_{in}\frac{\partial^2}{\partial x_n^2} - \rho s^2\right) + (1 - \delta_{ij})F_{ij}\frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^j}, \quad \left(\sum\nolimits_{i,j}; \sum\nolimits_n\right);$$

$$M_{in} = \{a_{ii} - q(\delta_{1n} - \delta_{2n}) - p\delta_{3n}\ (i = n);\ G_{in} - q(\delta_{1n} - \delta_{2n}) - p\delta_{3n}\ (i \neq n)\},$$

$$F_{ij} = a_{ij} + G_{ij}.$$

Для полученных уравнений (22), как и в [1], аналогичным образом могут быть построены общие решения в инвариантном виде.

Для цилиндрического тела с криволинейным контуром поперечного сечения общее решение уравнений устойчивости запишем в виде

$$u_n = \frac{\partial}{\partial\tau}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial n\partial x_3}\chi, \quad u_\tau = -\frac{\partial}{\partial n}\Psi - \frac{\partial^2}{\partial\tau\partial x_3}\chi, \tag{23}$$

$$u_3 = \frac{a_{11}}{F_{23}}\left(\Delta + \frac{G}{a_{11}}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{a_{11}}\right)\chi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2},$$

где n и τ — нормаль и касательная к контуру поперечного сечения.

Функции Ψ и χ определяются из уравнений

$$\left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \frac{\rho s^2}{G}\right)\Psi = 0, \quad \left[\left(a_{11}\Delta + G\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho s^2\right) \times \right. \tag{24}$$

$$\left. \times \left(G\Delta + a_{33}\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} - \rho s^2\right) - F_{13}F_{31}\Delta\frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right]\chi = 0.$$

В квазистатической постановке ($s = 0$) функции Ψ и χ являются решениями уравнений

$$(25)\qquad \left(\Delta + \frac{\partial^2}{\partial x_3^2}\right)\Psi = 0,\qquad \left[\Delta^2 + (\xi_2^2 + \xi_3^2)\Delta\frac{\partial^2}{\partial x_3^2} + \xi_2^2\xi_3^2\frac{\partial^4}{\partial x_3^4}\right]\chi = 0,$$

где постоянные ξ_i^2 имеют вид

$$\xi_{2,3}^2 = \frac{a_{11}a_{33} + G^2 - F_{13}F_{31}}{2a_{11}G} \pm \left[\left(\frac{a_{11}a_{33} + G^2 - F_{13}F_{31}}{2a_{11}G}\right)^2 - \frac{a_{33}}{a_{11}}\right]^{1/2}.$$

Если в соотношениях (23)—(25) положить, что для a_{ij} в выражении (21) $a = 0$ и $c = b^{-1}$, ($\alpha = 0, \psi(\sigma_0) = 0$), то приходим к результатам работы [1].

Приведенные решения по аналогии с результатами, полученными для упругих, вязкоупругих, упругопластических [1] и упруговязкопластических [7] тел при малых однородных докритических деформациях, позволяют получить характеристические определители для ряда задач.

Так, в случае бесконечно длинной в направлении $0x_1$ пластинки толщиной $2h$ и длиной l при сжатии ее вдоль оси $0x_3$ «мертвой» нагрузкой интенсивности p обычным образом получаем характеристический определитель в виде

$$(26)\qquad \left(\xi_1^2\xi_2^2 - \frac{a_{33}}{a_{32}}\frac{a_{33}^2 - a_{32}^2 - a_{32}G}{a_{22}G}\right)(\xi_1 \operatorname{sh}\alpha\xi_1 \operatorname{ch}\alpha\xi_2 - \xi_2 \operatorname{sh}\alpha\xi_2 \operatorname{ch}\alpha\xi_1) -$$
$$- \frac{a_{33}^2 - a_{32}^2 - a_{32}G}{a_{22}G}\xi_1\xi_2(\xi_2 \operatorname{sh}\alpha\xi_1 \operatorname{ch}\alpha\xi_2 - \xi_1 \operatorname{sh}\alpha\xi_2 \operatorname{ch}\alpha\xi_1) +$$
$$+ \frac{a_{33}}{a_{32}}(\xi_1^3 \operatorname{sh}\alpha\xi_1 \operatorname{ch}\alpha\xi_2 - \xi_2^3 \operatorname{sh}\alpha\xi_2 \operatorname{ch}\alpha\xi_1) = 0,\quad \alpha = \frac{\pi h}{l}.$$

Полученное решение можно использовать [8] для определения устойчивых размеров протяженных (ленточных) целиков в сжимаемом упругопластическом грунтовом массиве. В этом случае $p = \gamma HL(2h)^{-1}$, где γ — объемный вес породы; H — расстояние от земной поверхности до кровли камер; L — основание столба пород, давящих на целик.

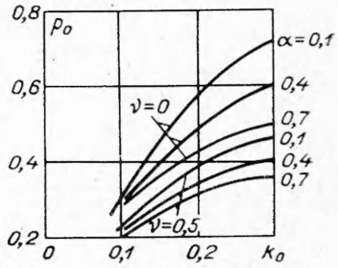
В случае поверхностной неустойчивости при условии, что потеря устойчивости происходит в рамках плоской деформации в плоскости x_30x_2, характеристическое уравнение имеет вид

$$(27)\qquad (\xi_1 - \xi_2)\left[\xi_1^2\xi_2^2 + \frac{a_{33}}{a_{32}}(\xi_1^2 + \xi_2^2) + \xi_1\xi_2\left(\frac{a_{22}a_{33} - a_{32}^2 - a_{32}G}{a_{22}G} + \frac{a_{33}}{a_{32}}\right) - \right.$$
$$\left. - \frac{a_{33}}{a_{32}}\frac{a_{22}a_{33} - a_{32}^2 - a_{32}G}{a_{22}G}\right] = 0.$$

Постоянные ξ_i^2 в (26), (27) имеют вид

$$\xi_{1,2}^2 = \frac{a_{33}^2 - (a_{32} + G)^2 + (G - p)G}{2a_{22}G} \pm \left\{\left[\frac{a_{33}^2 - (a_{32} + G)^2 + (G - p)G}{2a_{22}G}\right]^2 - \right.$$
$$\left. - \frac{a_{33}(G - p)}{a_{22}G}\right\}^{1/2}.$$

Уравнение (27) решалось численно при различных значениях k_0, α, ν, где $k_0 = kE^{-1}$ — предел текучести; α— скорость дилатансии ($\alpha = \operatorname{tg}\rho$, ρ — угол внутреннего трения, в частности для песка $\rho = 26$—$40°$, откуда $\alpha = 0{,}49$—$0{,}82$); ν— коэффициент Пуассона; E — модуль упругости. Для определения функции, характеризующей объемное сжатие $\psi(\sigma_0)$, связь между σ и ε выбиралась линейной $\sigma = \sigma_{\max}\varepsilon$, что, согласно [9], характерно для сыпучих сред, в частности для песка. На фигуре показана зависимость критического давления $p_0 = pE^{-1}$ от предела текучести k_0 при значениях коэффициента Пуассона $\nu = 0$; 0,5 и скорости дилатансии $\alpha = 0{,}1$; 0,4; 0,7, характерной для сыпучих сред (песка, гравия и т. п.).



Расчет показал, что влияние ν и α в указанных выше пределах на величину критической силы значительно. Однако получающиеся при этом числовые значения критических нагрузок нереальны, следовательно, поверхностная неустойчивость практически не наблюдается.

Поступила 21 IX 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. **Гузь А. Н.** Устойчивость трехмерных деформируемых тел. Киев, «Наукова думка», 1971.
2. **Ивлев Д. Д.** Теория идеальной пластичности. М., «Наука», 1966.
3. **Болотин В. В.** Неконсервативные задачи теории упругой неустойчивости. М., Физматгиз, 1961.
4. **Новожилов В. В.** Основы нелинейной теории упругости. М., Гостехиздат, 1948.
5. **Спорыхин А. Н.** Об устойчивости деформирования упруговязкопластических тел.— ПМТФ, 1967, № 4.
6. **Ивлев Д. Д., Быковцев Г. И.** Теория упрочняющегося пластического тела. М., «Наука», 1971.
7. **Спорыхин А. Н., Трофимов В. Г.** Задачи устойчивости упруговязкопластических тел.— ПМТФ, 1973, № 4.
8. **Алимжанов М. Т., Ершов Л. И.** Устойчивость равновесия тел и некоторых задач теории горного давления. Проблемы механики твердого деформированного тела. Л., «Судостроение», 1970.
9. **Роу П.** Теоретический смысл и наблюдаемые величины деформационных параметров грунта.— В кн.: Механика. Новое в зарубежной науке. М., «Мир», 1975.

УДК 539.37

О ВАРИАЦИОННОМ МЕТОДЕ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ПЛАСТИЧНОСТИ СЖИМАЕМЫХ СРЕД

И. С. Дегтярев

(Пермь)

Используемые в теории пластического течения вариационные методы сформулированы на допущении о несжимаемости деформируемой среды. При решении задач механики грунтов, сыпучих сред, а также технологических вопросов пластической обработки некомпактных материалов принципиальное значение имеет учет необратимого объемного изменения.

В работах [1, 2] доказаны экстремальные и вариационные теоремы для дилатирующих жесткопластических и вязкопластических тел. Ниже для сжимаемого пластического тела выводится вариационное уравнение, эквивалентное полной системе дифференциальных уравнений.

Рассмотрим материальную среду с уравнениями состояния

$$S_{ij} = 2g_1(\sigma, H)\,\overset{*}{\varepsilon}_{ij}, \quad \rho = \varphi(\sigma), \quad \overset{*}{\varepsilon}_{ij} = \varepsilon_{ij} - \frac{1}{3}\varepsilon\delta_{ij}, \tag{1}$$

где S_{ij}, $\overset{*}{\varepsilon}_{ij}$ — соответственно компоненты девиаторов напряжений и скоростей деформаций; $g_1(\sigma, H)$, $\varphi(\sigma)$ — функции материала; ρ — плотность