УДК 539.3

К ПРОБЛЕМЕ ИССЛЕДОВАНИЯ АКУСТИЧЕСКИХ И ГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ СВОЙСТВ СРЕДЫ, ЗАНИМАЮЩЕЙ ОБЛАСТЬ В ВИДЕ ТРЕХМЕРНОГО ПРЯМОУГОЛЬНОГО КЛИНА

В. А. Бабешко, О. В. Евдокимова, О. М. Бабешко*

Южный научный центр РАН, 344006 Ростов-на-Дону, Россия
* Кубанский государственный университет, 350040 Краснодар, Россия
E-mails: babeshko41@mail.ru, evdokimova.olga@mail.ru, babeshko49@mail.ru

Рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в области, представляющей собой прямоугольный клин бесконечной протяженности. Строится точное решение этой граничной задачи в виде упакованного блочного элемента, необходимое для исследования более сложных, в том числе смешанных задач для блочных структур. Сопряжение упакованных блоков в блочную структуру осуществляется путем построения фактор-топологий топологических пространств блоков, отношениями эквивалентности являются межблочные граничные условия.

Ключевые слова: метод блочного элемента, граничная задача, автоморфизм, псевдодифференциальные уравнения, клиновидная область.

DOI: 10.15372/PMTF20190610

Введение. В настоящее время разработана точная теория блочных структур, в основе которой лежит метод блочного элемента. Преимуществом этой теории является возможность исследовать граничные задачи практически в любых областях, так как любой объект или конструкцию можно рассматривать как некоторую реальную либо виртуальную блочную структуру. В то же время существует небольшое количество работ, в которых эта теория использовалась при решении прикладных задач. В настоящей работе этот подход применяется для часто используемого в приложениях уравнения Гельмгольца в области в виде трехмерного прямоугольного клина при наличии произвольных граничных условий. Несмотря на простоту постановки задачи, авторами данной работы не найдено общее решение этой граничной задачи. Следует отметить, что исследованию уравнения Гельмгольца, к решению которого сводится изучение различных фундаментальных и прикладных задач, посвящено большое количество работ. Прежде всего это работы, в которых решаются задачи для слоистых областей [1] с использованием метода интегральных преобразований. В [2, 3] разработан и применен лучевой метод, эффективный при реше-

Часть работы выполнена при финансовой поддержке Министерства образования и науки (Государственное задание № 9.8753.2017/8.9), Южного научного центра РАН (код проекта 00-18-04, № 01201354241), в рамках программ Президиума РАН I-16 (код проекта 00-18-21) и I-52 (код проекта 00-18-29), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов 19-41-230003, 19-41-230004, 19-48-230014, 17-08-00323, 18-08-00465, 18-01-00384, 18-05-80008).

нии граничных задач в произвольных областях при высоких частотах, в том числе при решении уравнения Гельмгольца.

В работах [4–7] развивается метод представления решений граничных задач теорий упругости, термоэлектроупругости, поронасыщенных сред Био с использованием решений уравнения Гельмгольца. В [8–11] граничные задачи для уравнения Гельмгольца и Лапласа изучаются в задачах гидродинамики, в частности в задачах о поведении на поверхности жидкости льдин и пластин, их акустических свойствах. В [11] рассмотрена плоская задача гидродинамики в прямоугольном клине, предложен способ исследования граничной задачи в прямоугольном клине путем сведения ее к задаче в полупространстве с использованием зеркального отображения граничной задачи на симметричный прямоугольный клин. Имеются также другие работы, в которых вместо граничной задачи для прямоугольного клина решается задача для областей, представляющих собой слоистую среду, с использованием зеркальных отражений.

В то же время, насколько известно авторам данной работы, исследования и точные решения трехмерного уравнения Гельмгольца в виде упакованных блочных элементов при произвольных граничных условиях в области в виде неограниченного прямоугольного клина отсутствуют. Методы изучения этих задач изложены в [12, 13]. В настоящей работе рассматривается трехмерная граничная задача Неймана для уравнения Гельмгольца, для которой методом блочного элемента строятся решения при произвольных граничных условиях. Решение строится в интегральном виде в клиновидной области в форме упакованного и распакованного блочных элементов. Метод блочного элемента достаточно прост в применении и может быть использован при исследовании более сложных задач.

Постановка задачи. Используется прямоугольная система координат, в которой оси Ox_1, Ox_3 направлены горизонтально, а ось Ox_2 — вертикально вверх. Рассматривается граничная задача для трехмерного уравнения Гельмгольца в прямоугольной области Ω ($|x_3| \leqslant \infty$, $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$) при наличии гармонических воздействий. На границах области Ω задаются условия Неймана. Задачи такого рода возникают при исследовании акустических свойств неограниченных областей в виде клина, а также при задании исходных данных для исследования в таких областях более сложных граничных задач для уравнений Ламе, Навье — Стокса, Максвелла и др. Построение решений в форме упакованных блочных элементов необходимо при изучении блочных структур. Указанная граничная задача для ограниченной области (прямоугольника) рассматривалась в работе [14], в которой методом блочного элемента с использованием касательного расслоения границы построены псевдодифференциальные уравнения. Приведем одно из этих уравнений для граничной задачи:

$$[A_{11}\,\partial^2 x_1 + A_{22}\,\partial^2 x_2 + A_{33}\,\partial^2 x_3 + A]\varphi(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Имеем

$$K_1\Phi_1 = \int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-c}^{c} A_{33}(\varphi'_{13} - i\alpha_3^1\varphi_1)\,\mathrm{e}^{i(\alpha_1^1\eta_1^1+\alpha_2^1\eta_2^1)}\;d\eta_1^1 d\eta_2^1 +$$

$$+\int\limits_{-c}^{c}\int\limits_{-b}^{b} A_{11}(\varphi'_{22} + i\alpha_1^1\varphi_2)\,\mathrm{e}^{i(-\alpha_1^1 a+\alpha_2^1 x_2^2+\alpha_3^1(x_1^2-b))}\;dx_1^2\,dx_2^2 +$$

$$+\int\limits_{-a}^{a}\int\limits_{-c}^{c} A_{33}(\varphi'_{33} + i\alpha_3^1\varphi_3)\,\mathrm{e}^{i(-\alpha_1^1 x_1^3+\alpha_2^1 x_2^3-\alpha_3^1 2b)}\;dx_1^3\,dx_2^3 -$$

$$-\int_{-c}^{c}\int_{-b}^{b} A_{11}(\varphi'_{43} - i\alpha_1^1\varphi_4)\,\mathrm{e}^{i(\alpha_1^1 a+\alpha_2^1 x_2^4-\alpha_3^1(x_1^4+b))}\,dx_1^4\,dx_2^4 +$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} A_{22}(\varphi'_{53} + i\alpha_2^1\varphi_5)\,\mathrm{e}^{i(\alpha_1^1 x_1^5-\alpha_2^1 c+\alpha_3^1(x_2^5-b))}\,dx_1^5\,dx_2^5 +$$

$$+\int_{-a}^{a}\int_{-b}^{b} A_{22}(\varphi'_{63} - i\alpha_2^1\varphi_6)\,\mathrm{e}^{i(-\alpha_1^1 x_1^6+\alpha_2^1 c+\alpha_3^1(x_2^6-b))}\,dx_1^6\,dx_2^6.$$

Здесь постоянные a, b, c определяют ограниченный прямоугольник, если все постоянные ограничены, и полуограниченный, если среди постоянных имеются бесконечные.

В настоящей работе применяется вариант метода блочного элемента, основанный на привязке локальных систем координат к единой координатной системе, что с учетом формы области Ω позволяет представить результаты исследования в более наглядном виде. Ниже рассматривается трехмерное уравнение Гельмгольца в области Ω ($|x_3| \leqslant \infty$, $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$), не содержащее временной множитель:

$$[\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + \partial^2 x_3 + p^2]u(x_1, x_2, x_3) = 0.$$

Здесь p может быть комплексным числом.

Для применения метода блочного элемента при решении граничной задачи в блочной структуре необходимо выполнить три алгоритма: внешней алгебры, внешнего анализа и построения фактор-топологии. Поскольку рассматривается только один блочный элемент, необходимость выполнения последнего алгоритма отсутствует.

Рассмотрим для приведенного выше трехмерного уравнения Гельмгольца граничную задачу Неймана. Граничные условия имеют вид

$$\frac{\partial u(0, x_2, x_3)}{\partial x_1} = f_2(x_2, x_3), \qquad \frac{\partial u(x_1, 0, x_3)}{\partial x_2} = f_1(x_1, x_3). \tag{1}$$

Здесь произвольные функции f_n обладают свойствами, достаточными для разрешимости соответствующих граничных задач в пространствах медленно растущих обобщенных функций. Свойства этих функций описаны ниже. Поскольку область Ω содержит бесконечно удаленные точки, в том случае, если в граничной задаче появляются волновые функции, ищется решение с использованием принципа излучения.

Применяя преобразование Фурье при решении дифференциального уравнения по параметру x_3, получаем дифференциальное уравнение с параметром α_3 вида

$$(\partial^2 x_1 + \partial^2 x_2 + k^2)u(x_1, x_2, \alpha_3) = 0, \qquad k^2 = p^2 - \alpha_3^2.$$

Метод решения. Используя в области Ω один из способов касательного расслоения границы с учетом единой системы координат, после применения двумерного преобразования Фурье и введения внешних форм получаем функциональное уравнение вида

$$(\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + k^2)U(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \int_{\partial\Omega} \omega,$$

$$\omega = \frac{\partial u(0, x_2, \alpha_3)}{\partial x_1}\,\mathrm{e}^{i\alpha_2 x_2}\,dx_2 - i\alpha_1 u(0, x_2, \alpha_3)\,\mathrm{e}^{i\alpha_2 x_2}\,dx_2 +$$

$$+ \frac{\partial u(x_1, 0, \alpha_3)}{\partial x_2}\,\mathrm{e}^{i\alpha_1 x_1}\,dx_1 - i\alpha_2 u(x_1, 0, \alpha_3)\,\mathrm{e}^{i\alpha_1 x_1}\,dx_1.$$

Здесь

$$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\iiint\limits_{\Omega} u(x_1,x_2,x_3)\,\mathrm{e}^{i\langle\boldsymbol{\alpha x}\rangle}\,dx_1\,dx_2\,dx_3, \qquad \langle\boldsymbol{\alpha x}\rangle=\alpha_1x_1+\alpha_2x_2+\alpha_3x_3,$$

$$u(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3} U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i\langle\boldsymbol{\alpha x}\rangle}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3.$$

С учетом принятой системы координат правую часть функционального уравнения можно представить в форме

$$\int\limits_{\partial\Omega}\omega=\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\partial u(0,x_2,\alpha_3)}{\partial x_1}\,\mathrm{e}^{i\alpha_2x_2}\,dx_2-i\alpha_1\int\limits_{-\infty}^{0}u(0,x_2,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{i\alpha_2x_2}\,dx_2+$$
$$+\int\limits_{-\infty}^{0}\frac{\partial u(x_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2}\,\mathrm{e}^{i\alpha_1x_1}\,dx_1-i\alpha_2\int\limits_{-\infty}^{0}u(x_1,0,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{i\alpha_1x_1}\,dx_1.$$

Вычислив одномерные интегралы, которые являются преобразованиями Фурье соответствующих функций, можно представить функциональное уравнение в виде

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{\partial U(0,\alpha_2,\alpha_3)}{\partial x_1}-i\alpha_1U(0,\alpha_2,\alpha_3)+\frac{\partial U(\alpha_1,0,\alpha_3)}{\partial x_2}-i\alpha_2U(\alpha_1,0,\alpha_3).$$

Здесь и далее для преобразований фурье-функций, обозначенных строчными буквами, будем использовать прописные буквы. Подставим в правую часть функционального уравнения значения функций (1), предварительно вычислив преобразования Фурье по всем координатам. В результате имеем

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=F_2(\alpha_2,\alpha_3)-i\alpha_1U(0,\alpha_2,\alpha_3)+F_1(\alpha_1,\alpha_3)-i\alpha_2U(\alpha_1,0,\alpha_3).$$

Для выполнения алгоритма внешнего анализа факторизуем коэффициент функционального уравнения по каждому параметру, что в данном случае осуществляется тривиально:

$$\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2=(\alpha_1-\alpha_{1-})(\alpha_1+\alpha_{1-})=(\alpha_2-\alpha_{2-})(\alpha_2+\alpha_{2-}),$$
$$\alpha_{1-}=-i\sqrt{\alpha_2^2-k^2}, \qquad \alpha_{2-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-k^2}, \qquad \operatorname{Im}\alpha_{1-}\leqslant 0, \quad \operatorname{Im}\alpha_{2-}\leqslant 0.$$

Из условия автоморфизма для носителя и функций на нем следуют псевдодифференциальные уравнения вида [14]

$$F_2(0,\alpha_{2-},\alpha_3)-i\alpha_1U(0,\alpha_{2-},\alpha_3)+F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)-i\alpha_{2-}U(\alpha_1,0,\alpha_3)=0,$$
$$F_2(0,\alpha_2,\alpha_3)-i\alpha_{1-}U(0,\alpha_2,\alpha_3)+F_1(\alpha_{1-},0,\alpha_3)-i\alpha_2U(\alpha_{1-},0,\alpha_3)=0.$$

Неизвестными в псевдодифференциальном уравнении являются функции и функционалы $U(0,\alpha_2,\alpha_3)$, $U(\alpha_1,0,\alpha_3)$, $U(0,\alpha_{2-},\alpha_3)$, $U(\alpha_{1-},0,\alpha_3)$. При решении псевдодифференциальных уравнений требуется, чтобы вне области Ω решения граничных задач обращались в нуль. В результате преобразований получаем функциональное уравнение следующего вида:

$$(\alpha_1^2+\alpha_2^2-k^2)U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}}\,\langle(\alpha_{2-}-\alpha_2)[\alpha_{1-}F_1(\alpha_1,\alpha_3)-\alpha_1F_1(\alpha_{1-},\alpha_3)]+$$
$$+(\alpha_{1-}-\alpha_1)[\alpha_{2-}F_2(\alpha_2,\alpha_3)-\alpha_2F_2(\alpha_{2-},\alpha_3)]\rangle.$$

Тогда решение в преобразованиях Фурье, представляющее собой упакованный блочный элемент, принимает вид

$$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\frac{1}{\alpha_1^2+\alpha_2^2+\alpha_3^2-k^2}\,\frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}}\,\langle(\alpha_{2-}-\alpha_2)[\alpha_{1-}F_1(\alpha_1,\alpha_3)-\alpha_1F_1(\alpha_{1-},\alpha_3)]+ \\ +(\alpha_{1-}-\alpha_1)[\alpha_{2-}F_2(\alpha_2,\alpha_3)-\alpha_2F_2(\alpha_{2-},\alpha_3)]\rangle.$$

Сократив одинаковые множители, функцию $U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)$ можно представить в виде

$$U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=i\,\frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}}\Big\langle\frac{\alpha_{1-}F_1(\alpha_1,\alpha_3)-\alpha_1F_1(\alpha_{1-},\alpha_3)}{\alpha_2+\alpha_{2-}}+ \\ +\frac{\alpha_{2-}F_2(\alpha_2,\alpha_3)-\alpha_2F_2(\alpha_{2-},\alpha_3)}{\alpha_1+\alpha_{1-}}\Big\rangle.$$

Полученное представление позволяет сформулировать условия для задаваемых граничных функций. Справедлива следующая

Теорема. *Пусть преобразование Фурье функции $f_1(x_1,x_3)$ имеет непрерывную первую производную по первой координате, а преобразование Фурье функции $f_2(x_1,x_3)$ — непрерывную первую производную по второй координате. Тогда существует решение граничной задачи в пространстве медленно растущих обобщенных функций.*

Действительно, в данном случае выполняются условия

$$F_1(\alpha_1,\alpha_3)-F_1(\alpha_{1-},\alpha_3)=(\alpha_1-\alpha_{1-})O(1),\qquad F_2(\alpha_2,\alpha_3)-F_2(\alpha_{2-},\alpha_3)=(\alpha_2-\alpha_{2-})O(1)$$

при $\alpha_1\to\alpha_{1-}$ и $\alpha_2\to\alpha_{2-}$, обеспечивающие выполнение автоморфизма и граничных условий (1).

Решение исходной граничной задачи в виде упакованного блочного элемента представляется в виде интеграла

$$u(x_1,x_2,x_3)=\frac{1}{8\pi^3}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}U(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)\,\mathrm{e}^{-i\langle\boldsymbol{\alpha x}\rangle}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3.$$

Пример. В случае если на одной из граней функция $u(x_1,x_2,x_3)$ обращается в нуль, например $F_2=0$, решение упрощается и принимает вид

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=i\,\frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}}\Big\langle\frac{\alpha_{1-}F_1(\alpha_1,\alpha_3)-\alpha_1F_1(\alpha_{1-},\alpha_3)}{\alpha_2+\alpha_{2-}}\Big\rangle.$$

Рассмотрим пример, когда на поверхности акустической среды задается воздействие в виде дельта-функции $\delta(x_1-x_{10},x_3-x_{30})$. Тогда имеем

$$F_1(\alpha_1,0,\alpha_3)=\mathrm{e}^{i(\alpha_1x_{10}+\alpha_3x_{30})},$$

$$U_1(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=i\,\frac{1}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}}\,\frac{\alpha_{1-}\,\mathrm{e}^{i(\alpha_1x_{10}+\alpha_3x_{30})}-\alpha_1\,\mathrm{e}^{i(\alpha_{1-}x_{10}+\alpha_3x_{30})}}{\alpha_2+\alpha_{2-}}.$$

Поскольку

$$\alpha_{1-}=-i\sqrt{\alpha_2^2-p^2+\alpha_3^2},\qquad\alpha_{2-}=-i\sqrt{\alpha_1^2-p^2+\alpha_3^2}\,,$$

получаем представление решения граничной задачи в интегральном виде

$$u(x_1,x_2,x_3)=-\frac{i}{8\pi^3}\iiint\limits_{\mathbb{R}^3}\frac{\alpha_1\,\mathrm{e}^{x_{10}\sqrt{\alpha_2^2-p^2+\alpha_3^2}-i\alpha_1x_{10}}-\alpha_{1-}}{\alpha_{1-}\alpha_{2-}(\alpha_2-i\sqrt{\alpha_1^2-p^2+\alpha_3^2}\,)}\,\times \\ \times\,\mathrm{e}^{-i[\alpha_1(x_1-x_{10})+\alpha_2x_2+\alpha_3(x_3-x_{30})]}\,d\alpha_1\,d\alpha_2\,d\alpha_3.$$

Построенные в таком виде решения с точки зрения топологии представляют собой упакованные блочные элементы. Область Ω, в которой построены функции, является для них носителем, т. е. вне этой области они обращаются в нуль. Упакованные блочные элементы необходимы при исследовании и решении граничных задач, поставленных для каждого блока блочных структур. С их помощью выполняется алгоритм построения фактортопологии, когда в качестве соотношений эквивалентности используются условия на границах между блоками. Для выполнения анализа решения, представляющего собой упакованный блочный элемент, этот элемент нужно распаковать [12, 13], вычислив с помощью теории вычетов интеграл, что всегда возможно. Полученное в результате выражение, содержащее или не содержащее интегралы, во внутренности области Ω является решением граничной задачи, которое при $x_1 \leqslant 0$, $x_2 \leqslant 0$ имеет вид

$$u(x_1, x_2, x_3) = -\frac{i}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{\mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_{10}}}{\alpha_{2-}} \mathrm{e}^{-i\alpha_1 x_{10}} \mathrm{e}^{-i[\alpha_1(x_1 - x_{10}) + \alpha_{2-} x_2 + \alpha_3(x_3 - x_{30})]} \, d\alpha_1 \, d\alpha_3 + \\ + \frac{i}{4\pi^2} \iint\limits_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{\alpha_{2-}} \mathrm{e}^{-i[\alpha_1(x_1 - x_{10}) + \alpha_{2-} x_2 + \alpha_3(x_3 - x_{30})]} \, d\alpha_1 \, d\alpha_3.$$

С помощью внутренних односторонних пределов на границе можно показать, что заданные граничные условия выполнены. Решение, представляющее собой распакованный блочный элемент, удовлетворяет в области Ω дифференциальным уравнениям граничной задачи и граничным условиям, но необязательно равно нулю вне этой области. Например, из решения, представляющего собой распакованный блочный элемент, следует, что выполняются граничные условия

$$\frac{\partial}{\partial x_1} u(0, x_2, x_3) = 0, \qquad \frac{\partial}{\partial x_2} u(x_1, 0, x_3) = \delta(x_1 - x_{10}, x_3 - x_{30}).$$

Применяя для анализа полученного интеграла метод перевала или стационарной фазы [15], нетрудно определить асимптотическое поведение решения в дальней зоне.

Выводы. В работе изложен алгоритм решения уравнения Гельмгольца с использованием метода блочного элемента при гармонических воздействиях. В работах [12, 13] упакованный блочный элемент для этой граничной задачи использовался при решении более сложных задач для блочных структур. При этом экспоненциальные подстановки заменялись блочными элементами, удовлетворяющими некоторым граничным условиям. Упакованные блочные элементы могут быть применены при решении задач сейсмологии. На основе решения, построенного для одного блочного элемента, можно рассматривать блочную структуру, содержащую рассмотренный блочный элемент и его покрытие, например, мембраной или пластиной Кирхгофа, моделирующей ледовое покрытие или покрытие, препятствующее возникновению оползня в среде, заполняющей прямоугольный клин. Метод интегрального представления решения уравнения Гельмгольца достаточно просто обобщается на случай решения нестационарных задач. Для этого следует применить при решении динамического уравнения Гельмгольца преобразование Лапласа по времени с параметром s. В результате получаем аналогичную граничную задачу с двумя параметрами α_3 и s.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М.: Наука, 1973.
2. **Бабич В. М.** О коротковолновой асимптотике функции Грина для уравнения Гельмгольца // Мат. сб. 1964. Т. 65, № 4. С. 577–630.

3. **Бабич В. М.** Асимптотические методы в проблеме дифракции коротких волн / В. М. Бабич, В. С. Булдырев. М.: Наука, 1972.
4. **Мухина И. В.** Приближенное сведение к уравнениям Гельмгольца уравнений теории упругости и электродинамики для неоднородных сред // Прикл. математика и механика. 1972. Т. 36, № 4. С. 667–671.
5. **Молотков Л. А.** Исследование распространения волн в пористых и трещиноватых средах на основе эффективных моделей Био и слоистых сред. СПб.: Наука, 2001.
6. **Новацкий В.** Теория упругости. М.: Мир, 1975.
7. **Новацкий В.** Электромагнитные эффекты в твердых телах. М.: Мир, 1986.
8. **Ткачева Л. А.** Колебания плавающей упругой пластины при периодических смещениях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 5. С. 166–179.
9. **Ткачева Л. А.** Плоская задача о колебаниях плавающей упругой пластины под действием периодической внешней нагрузки // ПМТФ. 2004. Т. 45, № 3. С. 136–145.
10. **Ткачева Л. А.** Поведение плавающей упругой пластины при колебаниях участка дна // ПМТФ. 2005. Т. 46, № 2. С. 98–108.
11. **Ткачева Л. А.** Взаимодействие поверхностных и изгибно-гравитационных волн в ледяном покрове с вертикальной стенкой // ПМТФ. 2013. Т. 54, № 4. С. 158–170.
12. **Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М., Рядчиков И. В.** Метод проектирования неоднородных материалов и блочных конструкций // Докл. АН. 2018. Т. 482, № 4. С. 398–402. DOI: 10.1134/S1028335818100014.
13. **Бабешко В. А., Евдокимова О. В., Бабешко О. М.** О стадиях преобразования блочных элементов // Докл. АН. 2016. Т. 468, № 2. С. 154–158.
14. **Бабешко В. А., Бабешко О. М., Евдокимова О. В.** О проблеме блочных структур академика М. А. Садовского // Докл. АН. 2009. Т. 427, № 4. С. 480–485.
15. **Федорюк М. В.** Метод перевала. М.: Наука, 1977.

Поступила в редакцию 7/VI 2019 г.,
после доработки — 7/VI 2019 г.
Принята к публикации 24/VI 2019 г.