

ОПРЕДЕЛЕНИЕ, СВОЙСТВА И ВЫЧИСЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНЫХ
АМБИПОЛЯРНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ ДИФФУЗИИ
В ЛАМИНАРНОМ МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ИОНИЗОВАННОМ
ПОГРАНИЧНОМ СЛОЕ

О. Н. Суслов, Г. А. Турский

(Москва)

При исследовании многокомпонентного пограничного слоя с замороженными реакциями в потоке и произвольными гетерогенными реакциями на стенке введение понятий эффективных коэффициентов диффузии существенно облегчает фактическое нахождение решений конкретных задач, дает возможность физически наглядно (в виде правильных корреляционных формул) представить окончательные выражения для конвективного теплового потока к неразрушающейся поверхности тела, а также для скорости уноса массы или эффективной энтальпии разрушения в случае термохимически разрушающейся стенки [1-5].

В данной работе понятия эффективных коэффициентов диффузии компонент обобщаются на случай частично ионизованного замороженного многокомпонентного пограничного слоя с произвольными реакциями на стенке. Кроме того, определяются эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии, позволяющие представить связи между диффузионными потоками и градиентами концентраций в виде обобщенных законов Фика. Выражения для эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии представлены в виде, аналогичном формулам для вычисления эффективных коэффициентов диффузии в смеси нейтральных газов, что существенно облегчает понимание сложных диффузионных процессов в многокомпонентном потоке при наличии заряженных компонент.

Подробно исследован важный частный случай тройной смеси электронов, n и $n + 1$ кратно заряженных ионов, для которой эффективные коэффициенты диффузии и эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии вычисляются в явном виде точно независимо от граничных условий. Эти формулы для коэффициентов диффузии в общем случае (n произвольно) являются новыми.

На внешней границе с использованием асимптотического вида решений уравнений пограничного слоя эффективные амбиполярные числа Шмидта вычислены точно.

Получены достаточные условия тождественности профилей относительных концентраций, диффузионных потоков, а также эффективных амбиполярных чисел Шмидта для ионов поперек пограничного слоя. С использованием обобщенной аналогии между коэффициентами массообмена вычисление эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии на стенке сведено к решению алгебраических уравнений при наличии и отсутствии вдува. Эта система приближенно решена для типичных смесей, появляющихся в пограничном слое на поверхности термопластиков, изготовленных на основе феноло-формальдегидной смолы, разрушающихся в ионизованных потоках атмосфер Земли и планет. Исследование, проведенное в этой работе, существенно опирается на результаты работ [3,5].

1. При отсутствии внешних электромагнитных сил, если пренебречь индуцированным за счет разделения зарядов магнитным полем, система уравнений для частично ионизованного замороженного однетемпературного асимптотически тонкого двумерного стационарного ламинарного пограничного слоя будет

$$\rho \left(u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} \right) = - \frac{\partial p}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} \left(\mu \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad \Theta = - \frac{\partial p}{\partial y} + qE$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\rho u r^v) + \frac{\partial}{\partial y} (\rho v r^v) = 0, \quad \rho \left(u \frac{\partial c_i}{\partial x} + v \frac{\partial c_i}{\partial y} \right) + \frac{\partial J_i}{\partial y} = 0$$

$$\begin{aligned} \rho c_p \left(u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} \right) &= \frac{\partial}{\partial y} \left[\lambda \frac{\partial T}{\partial y} - R_A T \sum_{j=1}^N \sum_{k=1}^N \frac{x_j D_k}{m_k} a_{kj} \left(\frac{J_k}{\rho_k} - \frac{J_j}{\rho_j} \right) \right] - \\ &- \sum_{j=1}^N J_j c_{pj} \frac{\partial T}{\partial y} + u \frac{\partial p}{\partial x} + v \frac{\partial p}{\partial y} + \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 + JE \quad (1.1) \\ \rho \frac{\partial x_i}{\partial y} &= \sum_{j=1}^N \frac{m^2}{m_i m_j} a_{ij} (c_i J_j - c_j J_i) + \frac{\rho x_i}{kT} \left(e_i - \frac{m_i q}{\rho N_0} \right) E + \\ &+ \frac{\partial \ln T}{\partial y} \sum_{j=1}^N \frac{m^2}{m_i m_j} a_{ij} (c_i D_j^T - c_j D_i^T) \quad (i = 1, \dots, N) \\ \frac{\partial E}{\partial y} &= 4\pi q, \quad q = \rho \frac{N_0}{m} \sum_{j=1}^N x_j e_j, \quad J = N_0 \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{m_j} J_j + qv = j + qv \\ \sum_{j=1}^N J_j &= 0, \quad \sum_{j=1}^N c_j = \sum_{j=1}^N x_j = 1, \quad p = \rho \frac{R_A T}{m}, \quad m = \sum_{j=1}^N x_j m_j \\ x_i &= \frac{n_i}{n}, \quad n = \sum_{j=1}^N n_j, \quad v = \sum_{j=1}^N c_j v_j, \quad c_i = \frac{m_i}{m} x_i, \quad c_p = \sum_{j=1}^N c_j c_{pj} \quad (1.2) \end{aligned}$$

Здесь x и y — линейные координаты соответственно вдоль поверхности тела и по нормали к ней; u, v — проекции вектора среднemasсовой скорости v на эти оси, $v = 0$ или 1 при обтекании плоского контура или осесимметричного тела; $r(x)$ — радиус поперечного сечения тела вращения; c_i, x_i — массовая и молярная концентрации i -й компоненты, J_i — проекция массового диффузионного потока i -й компоненты, на ось y ; n_i, n — число молей i -й компоненты и общее число молей в единице объема; v_i — среднестатистическая скорость i -й компоненты, m_i — молекулярный вес i -й компоненты; e_i — заряд i -й компоненты; m — среднемолекулярный вес смеси; q — объемный заряд; E, J, j — проекции векторов напряженности электрического поля, плотности электрического тока и тока проводимости на ось y ; R_A, N_0, k — универсальная газовая постоянная, число Авогадро и постоянная Больцмана; N — число компонент в смеси; p, ρ, T — давление, плотность, абсолютная температура смеси; μ, λ, C_p — коэффициенты вязкости теплопроводности и средняя теплоемкость смеси; D_i^T — коэффициент термодиффузии i -й компоненты. Коэффициенты сопротивления a_{ij} имеют разное выражение в зависимости от закона взаимодействия частиц. При взаимодействии нейтральных частиц между собой с потенциалом Леннарда — Джонса (первое приближение) [6]

$$\begin{aligned} \frac{1}{a_{ij}} = [D_{ij}]_1 &= \frac{3}{16} \left(\frac{2kT(m_i + m_j)}{\pi m_i m_j} \right)^{1/2} \frac{kT}{p} \frac{1}{\sigma_{ij}^2 \Omega_{ij}^{(1,1)*}(\tau_{ij})} \\ \sigma_{ij} &= (\sigma_i + \sigma_j) / 2, \quad \varepsilon_{ij} = \sqrt{\varepsilon_i \varepsilon_j}, \quad \tau_{ij} = kT / \varepsilon_{ij} \quad (1.3) \end{aligned}$$

где σ_i, ε_i — газокинетические параметры взаимодействия, $\Omega_{ij}^{(1,1)*}(\tau_{ij})$ — известная функция [6], слабо зависящая от своего аргумента при $\tau_{ij} > 3$.

При взаимодействии заряженных частиц по закону Кулона в первом приближении имеем [7]

$$\frac{1}{a_{ij}} = [D_{ij}]_1 = \frac{3}{8} \left(\frac{2kT(m_i + m_j)}{\pi m_i m_j} \right)^{1/2} \frac{kT}{p} \left(\frac{kT}{e_i e_j} \right)^2 \frac{1}{\ln \Lambda_{ij}} \quad (1.4)$$

Здесь D_{ij} — бинарный коэффициент диффузии, $\ln \Lambda_{ij}$ — кулоновский логарифм. Более точное знание коэффициентов сопротивления для дальнейшего не требуется.

Система (1.1) представляет собой совокупность $2N + 6$ уравнений для $2N + 6$ неизвестных функций $u, v, p, \rho, T, E, c_i, J_i$. Эта система должна быть дополнена обычными граничными и начальными (по координате x) условиями, которые здесь не выписываются.

Далее будем рассматривать достаточно плотную плазму ($p \sim 1$ атм, $T \sim 10^3$ °K).

Перейдем в системе (1.1) к безразмерным переменным и приведем здесь только уравнение Пуассона

$$\varepsilon^2 \frac{\partial \mathcal{G}}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^N x_j e_j, \quad E = E^* \mathcal{G}, \quad y = \delta \eta, \quad \varepsilon \sim \frac{d}{\delta}$$

Здесь E^* — характерное значение напряженности электрического поля, δ — толщина пограничного слоя, ε — малый параметр, пропорциональный отношению дебаевской длины d к δ . Если искать решение системы (1.1), записанной в безразмерных переменных, в виде рядов по малому параметру ε , то для первых членов этих рядов получаем систему уравнений, отличающуюся от (1.1) только тем, что в ней надо положить

$$q = q_0 = 0, \quad \frac{\partial p}{\partial y} = 0, \quad \frac{dp}{dx} = -\rho_e U_e \frac{dU_e}{dx}$$

Здесь ρ_e, U_e — плотность и продольная скорость на внешней границе пограничного слоя. Эта система («внешнее решение») справедлива вне тонкого заряженного слоя (при $\eta \gg d$). Это область амбиполярной диффузии. Решение в амбиполярной области должно срачиваться с решением («внутреннее решение») в области пространственного заряда (если средняя длина свободного пробега частиц много меньше дебаевской длины) [8,9].

Рассмотрим случай, когда электрический ток на стенку отсутствует. Из уравнений диффузии в (1.1) тогда будет следовать, что плотность тока $J \equiv 0$ поперек пограничного слоя. Кроме того, предположим, что стенка достаточно холодная и на ней произошла полная рекомбинация заряженных частиц. Тогда при нахождении теплового потока, трения и коэффициентов массообмена на стенке можно пренебречь малым изменением концентраций заряженных частиц в области пространственного заряда и решать задачу в амбиполярной области, полагая концентрации заряженных частиц на стенке равными нулю. Остальные граничные условия обычные [4, 10]. Отметим, что правильное срачивание решений необходимо, если надо найти профили напряженности электрического поля и концентраций заряженных частиц в заряженном слое. Это необходимо делать, когда электрический ток отличен от нуля.

Таким образом, для решения задачи в амбиполярной области в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) в системе (1.1) вместо уравнения Пуассона имеем уравнение

$$\sum_{j=1}^N x_j e_j = 0 \quad (1.5)$$

которое будет служить условием для исключения поля из соотношений Стефана — Максвелла

$$\frac{\partial x_i}{\partial y} = \sum_{j=1}^N \frac{m^2 a_{ij}}{\rho m_i m_j} (c_i J_j - c_j J_i) + \frac{e_i x_i}{kT} E + \quad (1.6)$$

$$+ \frac{\partial \ln T}{\partial y} \sum_{j=1}^N \frac{m^2 a_{ij}}{\rho m_i m_j} (c_i D_j^T - c_j D_i^T) \quad (i = 1, \dots, N)$$

При описании конвективных процессов удобнее пользоваться соотношениями (1.6), записанными для градиентов массовых концентраций

$$-\rho \frac{\partial c_i}{\partial y} = J_i \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} + c_i \sum_{j=1}^N A_{ij} J_j - \rho v_i c_i E - \quad (1.7)$$

$$-\rho_i \left(\sum_{i=1}^T - \sum_{k=1}^N c_k \sum_{k=1}^T \right) \frac{\partial \ln T}{\partial y} \quad (i = 1, \dots, N)$$

$$A_{ij} = \sum_{k=1}^N \left(\frac{m}{m_j} - \frac{m}{m_k} \right) c_k a_{jk} - \frac{m}{m_j} a_{ij}, \quad v_i = \left(e_i - \sum_{j=1}^N e_j c_j \right) \frac{1}{kT}$$

$$\sum_{i=1}^T = \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} \left(\frac{D_j^T}{\rho_j} - \frac{D_i^T}{\rho_i} \right) \quad (i, j = 1, \dots, N) \quad (1.8)$$

При решении задач теории высокотемпературного пограничного слоя удобно иметь выражения для массовых диффузионных потоков через градиенты массовых концентраций и напряженность электрического поля. Непосредственное разрешение системы (1.7) относительно потоков с последующей их подстановкой в уравнения диффузии из (1.1) приводит к системе уравнений в частных производных, неразрешенных относительно старших производных. Коэффициенты такой системы представляются в виде сложных определителей и зависят от $N(N-1)/2$ коэффициентов сопротивления (бинарных коэффициентов диффузии). Окончательная система трудна даже для решения на вычислительных машинах [4,5]. Поэтому естественно попытаться ввести понятие эффективных коэффициентов диффузии в многокомпонентном ионизованном пограничном слое, подобно тому как это было предложено в работах [1,3] для случая смеси нейтральных газов.

2. Эффективные коэффициенты диффузии при молярном (числовом) и массовом описании диффузии D_i^* и D_i определим согласно (1.6) и (1.7) в виде

$$\frac{1}{D_i^*} = \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} \left(1 - \frac{x_j J_j^*}{x_j J_i^*} \right), \quad J_i^* = n_i (v_i - v^*), \quad v^* = \sum_{j=1}^N x_j v_j \quad (2.1)$$

$$\frac{1}{D_i} = \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} + c_i \sum_{j=1}^N A_{ij} \frac{J_j}{J_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.2)$$

Тогда соотношения (1.6) и (1.7) представляются соответственно так:

$$J_i^* = -n D_i^* \frac{\partial x_i}{\partial y} + \mu_i^* n_i E + n D_i^* \frac{\partial \ln T}{\partial y} \sum_{j=1}^N \frac{m^2 a_{ij}}{\rho m_i m_j} (c_i D_j^T - c_j D_i^T),$$

$$\mu_i^* = \frac{e_i}{kT} D_i^* \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.3)$$

$$J_i = -\rho D_i \frac{\partial c_i}{\partial y} + \mu_i \rho_i E + \rho_i D_i \left(\sum_{i=1}^T - \sum_{k=1}^N c_k \sum_{k=1}^T \right) \frac{\partial \ln T}{\partial y}$$

$$\mu_i = \left(e_i - \sum_{j=1}^N c_j e_j \right) \frac{D_i}{kT} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.4)$$

Величина μ_i^* называется подвижностью заряженных частиц сорта i , а связь μ_i^* с D_i^* есть соотношение Эйнштейна, известное ранее для тройной смеси нейтралов, ионов и электронов. Связь μ_i с D_i в (2.4) представляет собой обобщение соотношения Эйнштейна на случай массового описания диффузии.

В амбиполярной области в нулевом приближении ($\varepsilon = 0$) получаются условия квазинейтральности и отсутствия тока проводимости

$$\sum_{j=1}^N e_j x_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{m_j} J_j = 0 \quad (2.5)$$

которые позволяют исключить поле E из соотношений (2.4) и представить их в виде обобщенных законов Фика

$$J_i = -\rho D_i^{(a)} \frac{\partial c_i}{\partial y} + \rho_i D_i^{(a)} \left[\sum_i T - \sum_{k=1}^N c_k \sum_k T - (e_i^* - \gamma) \sum_{k=1}^N x_k e_k \sum_k T \right] \frac{\partial \ln T}{\partial y} \quad (2.6)$$

$$e_i^* = e_i \left(\sum_{k=1}^N x_k e_k^2 \right)^{-1}, \quad \gamma = \sum_{j=1}^N c_j e_j \left(\sum_{k=1}^N x_k e_k^2 \right)^{-1} \quad (i = 1, \dots, N)$$

где эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии $D_i^{(a)}$ по определению необходимо находить из системы уравнений¹

$$\frac{1}{D^{(a)}(E)} = \frac{1}{D(E)} - \frac{v(E) c(E)}{z} \sum_{k=1}^N \frac{z_k^* J_k}{D_k J(E)} \quad (2.7)$$

$$\frac{1}{D_i^{(a)}} = \frac{1}{D_i} + \frac{v_i c_i}{v(E) c(E)} \left[\frac{1}{D^{(a)}(E)} - \frac{1}{D(E)} \right] \frac{J(E)}{J_i} \quad (i \neq E)$$

$$E = \frac{1}{\rho z} \sum_{k=1}^N \frac{z_k^*}{D_k} J_k, \quad z_i^* = \frac{m(E)}{m_i} \frac{c_i}{e}, \quad z = \sum_{k=1}^N c_k z_k^* v_k \quad (2.8)$$

Уравнения (2.7) можно записать в единой форме

$$\frac{1}{D_i^{(a)}} = \frac{1}{D_i} - \frac{v_i c_i}{z} \sum_{k=1}^N \frac{z_k^*}{D_k} \frac{J_k}{J_i} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.9)$$

Если в (2.9) подставить выражения для D_i из (2.2) и воспользоваться условием квазинейтральности, то получим N уравнений для определения эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии $D_i^{(a)}$ в виде, аналогичном формулам для эффективных коэффициентов диффузии в нейтральной смеси

$$\frac{1}{D_i^{(a)}} = \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} + c_i \sum_{j=1}^N (A_{ij} + A_{ij}^{(e)}) \frac{J_j}{J_i} \quad (2.10)$$

$$A_{ij}^{(e)} = \frac{v_i m}{z} \sum_{k=1}^N c_k a_{kj} \left(\frac{z_k^*}{m_j} - \frac{z_j^*}{m_k} \right) = (e_i^* - \gamma) \sum_{k=1}^N \frac{m^* c_k}{m_k m_j} a_{kj} (e_k - e_j)$$

$$- \frac{E}{kT} = \left[\sum_{j=1}^N \frac{J_j}{m_j z} \sum_{k=1}^N x_k a_{kj} (e_k - e_j) + \frac{\partial \ln T}{\partial y} \sum_{j=1}^N x_j e_j \sum_j T \right] \left(\sum_{k=1}^N x_k e_k^2 \right)^{-1}$$

¹ При необходимости введения в качестве индекса компоненты химического символа будет заключать его в скобки, например: $D_E = D(E)$, $D_{EH_2} = D(E, H_2)$ и т. д.

Заметим, что с использованием (2.6) и (2.10) соотношения Стефана — Максвелла могут быть теперь записаны вместо (1.7) в виде

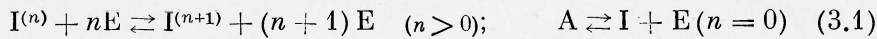
$$-\rho \frac{\partial c_i}{\partial y} = J_i \sum_{j=1}^N x_j a_{ij} + c_i \sum_{j=1}^N (A_{ij} + A_{ij}^{(e)}) J_j - \rho_i \left[\Sigma_i^T - \sum_{k=1}^N c_k \Sigma_k^T - (e_i^* - \gamma) \sum_{k=1}^N x_k e_k \Sigma_k^T \right] \frac{\partial \ln \bar{T}}{\partial y} \quad (i = 1, \dots, N) \quad (2.11)$$

Аналогично (2.6) амбиполярные коэффициенты диффузии могут быть определены и при молярном описании диффузии. Далее будем рассматривать только массовое описание диффузии. Определенные выше эффективные и эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии зависят от отношений диффузионных потоков и в общем случае для N компонентной смеси могут быть найдены только после решения конкретной задачи. Отметим, что $A_{ij}^{(e)}$ равны нулю только в случае, когда нет заряженных компонент. Тогда (2.10) переходят в (2.2). Систему (2.10) необходимо дополнить тремя однородными относительно потоков соотношениями

$$\sum_{j \neq E} \frac{J_j}{J(E)} = -1, \quad \sum_{j \neq E} z_j \frac{J_j}{J(E)} = 1, \quad \sum_{j \neq E} \frac{D_j^{(a)}(E)}{D_j^{(a)}} \frac{J_j}{J(E)} = -1 \quad (2.12)$$

Система (2.10), (2.12) служит для определения N коэффициентов $D_i^{(a)}$ и $N - 1$ отношения диффузионных потоков. Из $N + 3$ уравнений системы (2.10), (2.12) только $N + 2$ независимы. (Второе уравнение в (2.12) использовано при записи (2.10).) Система (2.10), (2.12) имеет единственное решение тогда и только тогда, когда $N = 3$ для плазмы и $N = 2$ для нейтральной смеси. В этих частных случаях коэффициенты D_i и $D_i^{(a)}$ вычисляются до решения задачи через термодинамические параметры. В следующем пункте рассмотрен важный частный случай $N = 3$ для ионизированной смеси.

3. Пусть смесь ионизированного газа состоит из трех компонент $E, I^{(n)}, I^{(n+1)}$, образующихся в результате реакции



Здесь A, I, E означают соответственно атомы, ионы и электроны, n — степень ионизации. Рассмотрение констант равновесия, показывает, что обычно

$$K_p^{(n)} \gg K_p^{(n+1)}, \quad n = 0, 1, \dots$$

поэтому процесс ионизации с повышением температуры происходит ступенями. Сначала газ почти полностью ионизируется однократно, затем полностью двукратно и так далее. Поэтому при данных условиях в ионизированной смеси, образованной из одного химического элемента, практически присутствуют всего три компонента. В этом случае на основании сказанного в конце п. 1 из системы (2.10), (2.12) последовательно находим отношения диффузионных потоков, эффективные и эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии

$$J_n / J(E) = -m_n / m(E), \quad J_{n+1} / J(E) = m_{n+1} / m(E) \\ \frac{1}{D_n} = \left[1 + x(E) \left(\frac{m(E)}{m_{n+1}} \right) - 1 \right] \frac{e^{*a_{n,n+1}}}{e^* + e_{n+1}^*} + \left[1 + x_{n+1} \left(\frac{m_{n+1}}{m(E)} - 1 \right) \right] \frac{e_{n+1}^* a(n, E)}{e^* + e_{n+1}^*} + \\ + \left(\frac{m}{m(E)} + \frac{m}{m_{n+1}} \right) \frac{e_n^* c_n^a(E, n+1)}{e^* + e_{n+1}^*} \quad (3.2)$$

$$\frac{1}{D_{n+1}} = \left[1 + x_n \left(\frac{m_n}{m(E)} - 1 \right) \right] \frac{e_n^* a(n+1, E)}{e_n^* + e_n^*} + \left[1 + x(E) \left(\frac{m(E)}{m_n} - 1 \right) \right] \times \quad (3.3)$$

$$\times \frac{e_n^* a_{n, n+1}}{e_n^* + e_n^*} + \left(\frac{m}{m(E)} - \frac{m}{m_n} \right) \frac{e_{n+1}^* c_{n+1}}{e_n^* + e_n^*} a(E, n)$$

$$\frac{1}{D(E)} = \left[1 + x_n \left(\frac{m_n}{m_{n+1}} - 1 \right) \right] \frac{e_n^* a(E, n+1)}{e_n^* - e_{n+1}^*} - \left[1 + x_{n+1} \left(\frac{m_{n+1}}{m_n} - 1 \right) \right] \times$$

$$\times \frac{e_{n+1}^* a(E, n)}{e_n^* - e_{n+1}^*} + \left(\frac{m_{n+1}}{m_n} - 1 \right) \frac{m(E)}{m_{n+1}} \frac{e^* x(E)}{e_n^* - e_{n+1}^*} a_{n, n+1}$$

$$1/D_n^{(a)} = 1/D_{n+1}^{(a)} = 1/D^{(a)}(E) = [\delta_1 a(E, n+1) + \delta_2 a(n, E) + \delta_3 a_{n, n+1}] \delta^{-1}$$

$$e^* = e/m(E), \quad e_n^* = e_n/m_n, \quad e_{n+1}^* = e_{n+1}/m_{n+1} \quad (3.4)$$

$$\delta_1 = n^2 [(n+1) - (n+2)x(E)], \quad \delta_2 = (n+1)^2 [(n+1)x(E) - n]$$

$$\delta_3 = x(E), \quad \delta = \delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = (n+2) [(n+2)x(E) - n]$$

Соотношения (3.3) значительно упрощаются, если использовать неравенство

$$m(E)/m_n \approx m(E)/m_{n+1} \ll 1 \quad (3.5)$$

$$\frac{1}{D_n} = [1 - x(E)] a_{n, n+1} + (n+1) \left[x_{n+1} + \frac{m(E)}{m_{n+1}} \right] a(n, E) + n x_n a(E, n+1)$$

$$\frac{1}{D_{n+1}} = [1 - x(E)] a_{n, n+1} + (n+1) x_{n+1} a(n, E) + n \left[x_n + \frac{m(E)}{m_n} \right] a(E, n+1)$$

$$\frac{1}{D(E)} = \frac{m(E)}{m_n} x(E) a_{n, n+1} + (n+1) a(n, E) - n a(n+1, E) \quad (3.6)$$

Дальнейшее упрощение формул (3.6) и (3.4) можно получить с помощью (1.3), (1.4), из которых следует оценка:

$$a(n, E)/a_{n, n+1} \approx a(n+1, E)/a_{n, n+1} \approx [m(E)/m_n]^{1/2} \ll 1 \quad (3.7)$$

С учетом (3.7) выражения (3.6), (3.4) запишутся так:

$$1/D_n = 1/D_{n+1} = [1 - x(E)] a_{n, n+1}, \quad 1/D(E) =$$

$$= (n+1) a(n, E) - n a(n+1, E) \quad (3.8)$$

$$1/D_{n+1}^{(a)} = 1/D_n^{(a)} = 1/D^{(a)}(E) = x(E) \{(n+1) [(n+2)x(E) - n]\}^{-1} a_{n, n+1} \quad (3.9)$$

При записи (3.8), (3.9) использована очевидная оценка

$$n/(n+1) \ll x(E) \ll (n+1)/(n+2), \quad n \geq 0 \quad (3.10)$$

При $n=0$ (3.4) запишется

$$D^{(a)}(A) = D^{(a)}(I) = D^{(a)}(E) = 2/[a(E, A) + a(I, A)] \quad (3.11)$$

Из (3.9) при $n=0$ получаем хорошо известный результат

$$D^{(a)}(A) = D^{(a)}(I) = D^{(a)}(E) = 2D(A, I) \quad (3.12)$$

Легко показать, что эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии при молярном описании равны

$$D_n^{*(a)} = D_{n+1}^{*(a)} = D^{*(a)}(E) \quad (3.13)$$

и вычисляются по формулам (3.4).

Таким образом, тройная смесь ионизованного газа как в массовом, так и в молярном описании подобно бинарной смеси нейтральных газов описывается всего одним коэффициентом диффузии. Для тройной смеси ионизованного газа этот коэффициент находится из (3.4).

4. Если плазма содержит четыре или более компонент, то эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии могут быть вычислены лишь после решения всей конкретной задачи. Однако в ряде важных частных случаев можно установить некоторые свойства полей концентраций и эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии, не зависящие от граничных значений концентраций. В работе [3] аналогичные свойства получены для смесей нейтральных газов.

Будем называть компоненты K и K' компонентами с близкими (одинаковыми) диффузионными свойствами, если для них выполняются условия

$$\begin{aligned} m(K) &\approx m(K') \quad (m(K) = m(K')), \\ a(K, i) &\approx a(K', i) \quad (a(K, i) = a(K', i)) \end{aligned} \quad (4.1)$$

Аналогично работе [3] с использованием соотношений (2.9) и (4.1) доказывается следующая теорема.

Теорема 4.1. Если в данной смеси газов можно выделить группу нейтральных компонент с одинаковыми диффузионными свойствами, то эффективные и эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии для всех компонент, не входящих в данную группу, не будут явно зависеть от диффузионных потоков компонент этой группы¹:

Из соотношений (2.5) и (2.10) следует теорема.

Теорема 4.2. Если в плазме имеется всего один сорт ионов I , то эффективные и эффективные амбиполярные коэффициенты диффузии не будут зависеть от коэффициента сопротивления между электронами и ионами $a(I, E)$.

Аналогично работе [3] перейдем в системе (1.1) к безразмерным параболическим переменным (ξ, η) . В этих переменных обобщенные законы Фика, условие отсутствия тока и квазинейтральности имеют вид

$$\begin{aligned} X_i &= -\frac{l}{S_i^{(a)}} \frac{\partial c_i}{\partial \eta}, \quad \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{m_j} X_j = 0, \quad \sum_{j=1}^N \frac{e_j}{m_j} c_j = 0, \quad S_i^{(a)} = \frac{\mu}{\rho D_i^{(a)}}, \\ S_i &= \frac{\mu}{\rho D_i} \end{aligned} \quad (4.2)$$

Здесь X_i — безразмерный диффузионный поток [3]. Примем в дальнейшем следующую нумерацию компонент: нейтралы будут пробегать значения от 1 до N_n , ионы — от $N_n + 1$ до $N - 1$ и электронная компонента будет иметь последний номер N . Из (2.2), (2.7), (2.10) и уравнения диффузии из (1.1) следует теорема (эффектом термодиффузии пренебрегаем).

Теорема 4.3. Если в плазме все ионы обладают одинаковыми диффузионными свойствами (см. (4.1)) и зарядами i , кроме того, на стенке выполняются граничные условия

$$c_i = c_{iw} = 0 \quad (i = N_n + 1, \dots, N)$$

¹ Утверждение теоремы 2.1 в работе [3] должно быть исправлено: «... то эффективные коэффициенты диффузии для всех компонент, не входящих в данную группу, не будут...».

то относительные концентрации и потоки для ионов

$$z_i = c_i / c_{ie}, \quad I_i = X_i / c_{ie} \quad (i = N_n + 1, \dots, N - 1) \quad (4.3)$$

а также эффективные числа Шмидта S_i и эффективные амбиполярные числа Шмидта $S_i^{(a)}$ для ионов соответственно равны между собой по всей толщине пограничного слоя

$$z_i \equiv z(I), \quad I_i \equiv I(I), \quad S_i \equiv S(I), \quad S_i^{(a)} \equiv S^{(a)}(I) \quad (i = N_n + 1, \dots, N - 1) \quad (4.4)$$

Следствие 1. Из (2.9) и (2.5) имеем для электронов

$$z(E) = nz(I) m(E) / m(I), \quad I(E) = nI(I) m(E) / m(I) \\ S^{(a)}(E) = S^{(a)}(I) = [v(I) S(E) - v(E) S(I)] / (n + 1) e \quad (4.5)$$

где n — кратность ионизации ионов.

Следствие 2. Из (2.9) и (2.2) легко получить, что для всех компонент кроме ионов, эффективные и амбиполярные коэффициенты диффузии не зависят от коэффициентов сопротивления между заряженными компонентами a_{ij} ($i, j = N_n + 1, \dots, N$).

5. Связи (1.2) и (2.5) позволяют исключить из соотношений Стефана — Максвелла (1.7) концентрации и потоки двух компонент. Пусть это будут электроны (номер N) и один сорт ионов (номер $N - 1$). Тогда производные концентраций для компонент с номерами $1, \dots, N - 2$ могут быть представлены как линейные комбинации безразмерных потоков этих же компонент. Пусть

$$l \frac{\partial c_i}{\partial \eta} = \sum_{j=1}^{N-2} g_{ij} X_j \quad (i = 1, \dots, N - 2) \quad (5.1)$$

Здесь коэффициенты g_{ij} и l являются функциями только концентраций и температуры. При больших η из уравнений диффузии в (1.4) и (5.1) следует система [3]:

$$\frac{\partial X_i}{\partial \eta} = \frac{\Phi}{l} \sum_{j=1}^{N-2} g_{ij} X_j, \quad \Phi(\xi, \eta) \rightarrow a(\xi) + \eta \sim \eta, \quad i < N - 1 \quad (5.2)$$

При больших η асимптотическое решение системы (5.1), (5.2) будет

$$X_i = \sum_{k=1}^{N-2} \gamma_{ki} \exp(-\lambda_k \eta^\circ), \quad c_i = c_{ie} + \frac{X_i}{\eta^\circ}, \quad d\eta^\circ = \Phi \frac{d\eta}{l} \quad (\eta^\circ, \eta \rightarrow \infty) \quad (5.3)$$

где γ_{ki} — искомые постоянные, а λ_k — корни характеристического уравнения

$$\det \| h_{ij} - \lambda \delta_{ij} \| = 0, \quad h_{ij} = -g_{ji} \quad (5.4)$$

Предположим, что все корни $\lambda_k > 0$ (X_i должны стремиться к нулю при $\eta \rightarrow \infty$). Для компонент, исчезающих на бесконечности из структуры коэффициентов g_{ij} , следует [3,5], что

$$X_i = \gamma_{ii} \exp(-\lambda_i \eta^\circ), \quad \lambda_i = \left[\sum_{j=1}^N x_j S_{ij} \right]_e \quad (5.5)$$

Сравнивая (5.5) с первым уравнением (4.2), получаем для всех компонент, исчезающих на бесконечности, простые формулы для вычисления

эффективных амбиполярных чисел Шмидта

$$S_{ie}^{(a)} = \lambda_i = \left[\sum_{j=1}^N x_j S_{ij} \right]_e \quad (5.6)$$

Таким образом часть корней в характеристическом уравнении (5.4) находится и его порядок понижается.

В качестве примера рассмотрим горение термопластика в ионизованном потоке воздуха. От стенки тогда идут и исчезают на внешней границе следующие компоненты [3]:

$$M \text{ (CO, CN, HCN, C}_2, \text{C}_3, \text{N}_2, \text{NO)}, \text{ SiO, CO}_2, \text{ H}_2 \quad (5.7)$$

Будем считать, что на внешней границе пограничного слоя присутствуют ионы $I \text{ (O}^+, \text{N}^+, \text{NO}^+)$, атомы $A \text{ (O, N)}$ и электроны E .

Сначала находим по формулам (5.6) эффективные амбиполярные числа Шмидта для компонент (5.7). Наименьшее из них будет

$$S_e^{(a)}(\text{H}_2) = \left[\sum_{j=1}^N x_j S(\text{H}_2, j) \right]_e \quad (5.8)$$

Числа Шмидта для компонент, не исчезающих на бесконечности, находятся из характеристического уравнения (5.4) и будут равны

$$S_e^{(a)}(I) = S_e^{(a)}(A) = S_e^{(a)}(E) = S_e^{(a)}(\text{H}_2) \quad (5.9)$$

Таким образом, для компонент, не исчезающих на внешней границе, эффективные амбиполярные числа Шмидта равны между собой и равны наименьшему из эффективных амбиполярных чисел Шмидта для компонент, исчезающих на бесконечности.

Отметим, что эффективные амбиполярные числа Шмидта на внешней границе пограничного слоя находятся до решения всей краевой задачи. Их знание облегчает понимание диффузионных процессов в многокомпонентном пограничном слое и позволяет контролировать численные расчеты, тем более, что вычисление эффективных амбиполярных чисел Шмидта на внешней границе пограничного слоя численно затруднено, так как приходится делить друг на друга две величины (градиент концентрации и диффузионный поток), каждая из которых экспоненциально стремится к нулю).

6. Перейдем к вычислению эффективных амбиполярных коэффициентов диффузии на стенке, предполагая, что на ней произошла полная рекомбинация и нейтрализация продуктов диссоциации и ионизации набегающего потока.

Эти условия обычно выполняются при $T_w \ll 3000^\circ \text{K}$ и $p \geq 10^{-2} \text{ атм}$

$$c_{iw} = 0 \quad (i = N_* + 1, \dots, N_n, \dots, N) \quad (6.1)$$

Здесь номера от 1 до N_* присвоены нейтралам, не исчезающим на стенке. Нумерация остальных компонент объяснена выше.

Сначала из (2.2) легко находим эффективные коэффициенты диффузии для всех компонент, исчезающих на теле (индекс w опускаем)

$$\frac{1}{D_i} = \sum_{j=1}^{N_*} x_j a_{ij} \quad (i = N_* + 1, \dots, N) \quad (6.2)$$

Так как на стенке при $i > N_*$

$$c_i / c(E) = (\partial c_i / \partial \eta) / (\partial c(E) / \partial \eta) = J_i D^{(a)}(E) / (J(E) D_i^{(a)}) \quad (6.3)$$

то из системы (2.9) находим

$$D^{(a)}(E) = D(E) [1 + (1 - D_i^{(a)} / D_i) e / e_i] \quad (i = N_n + 1, \dots, N - 1) \quad (6.4)$$

Из (6.2) и (6.4) следует оценка

$$D_i^{(a)}(E) / D(E) \approx D_i^{(a)} / D(E) \approx a(E, i) / a_{ji} \approx 10^{-2} \quad (i = N_* + 1, \dots, N-1, j \leq N_*) \quad (6.5)$$

Из (6.4) и (6.5) с ошибкой менее 1% для ионов находим

$$D_i^{(a)} = D_i \left(1 + \frac{e_i}{e} \right) \left(\sum_{j=1}^{N_*} x_j a_{ij} \right)^{-1} \quad (i = N_n + 1, \dots, N-1) \quad (6.6)$$

Для атомов, исчезающих на стенке из (2.9), используя (6.4) и (6.5), получаем

$$D_i^{(a)} = D_i \left(\sum_{j=1}^{N_*} x_j a_{ij} \right)^{-1} \quad (i = N_* + 1, \dots, N_n) \quad (6.7)$$

Таким образом, эффективные и амбиполярные коэффициенты диффузии подсчитаны для компонент, исчезающих на стенке ($i > N_*$). Для нейтралов, присутствующих на теле из (2.7) с учетом (6.2) и (6.5) получаем

$$\frac{1}{D_k^{(a)}} = \frac{1}{D_k} + c_k \sum_{j=N_n+1}^{N-1} \frac{e_j}{e} \frac{1}{D_j^{(a)}} \frac{J_j}{J_k}, \quad k \leq N_* \quad (6.8)$$

Коэффициенты $D_k^{(a)}$ для $k \leq N_*$ вычисляются лишь после того, как будут известны отношения диффузионных потоков на стенке. Для приближенного вычисления $D_k^{(a)}$ при $k \leq N_*$ воспользуемся обобщенной аналогией между коэффициентами массообмена, установленной на основании численных и аналитических решений уравнений многокомпонентного пограничного слоя для частных задач [1,11] при достаточно малых вдувах в виде

$$\left(\frac{J_i}{J_j} \right)_w = \left(\frac{D_i^{(a)}}{D_j^{(a)}} \right)_w^{\kappa_{ij}} \frac{\Delta c_i}{\Delta c_j}, \quad \Delta c_k = c_{ke} - c_{kw} \quad (6.9)$$

где показатели κ_{ij} как функции $(l / S_i^{(a)})_e, (l / S_j^{(a)})_e$ и вдува $\varphi(\xi, 0)$ найдены в [5] и меняются от 0.1 до 2.

Напомним, что величины $(l / S_k^{(a)})_e$ находятся до решения задачи (см. п.5). Отметим, что вычисленные ниже амбиполярные коэффициенты диффузии слабо зависят от показателей κ_{ij} . Подставляя (6.9) в (2.10), получаем систему нелинейных уравнений, которую будем решать методом, разработанным в [3]. Пусть среди компонент, присутствующих на стенке ($k \leq N_*$), можно выделить группу K с одинаковыми диффузионными свойствами. Присвоим номера от 1 до N_{**} компонентам, присутствующим на стенке и не попавшим в группу K . В случае разрушения пластика в группу K входят компоненты с молекулярными весами, примерно равными 30. Это O_2, N_2, CO, CN, HCN и т.д.

Пусть H_2, SiO_2, CO_2 — компоненты присутствующие на стенке и не попавшие в группу K . Алгебраическая система для нахождения $D_k^{(a)}$ при $k \leq N_*$ (для $k > N_*$ $D_k^{(a)}$ вычислены выше), записанная с учетом наличия группы K , имеет вид

$$\begin{aligned} \frac{1}{D_k^{(a)}} = & B_k + \sum_{j=1}^{N_{**}} B_{kj} c_{jw} \left[\frac{D_j^{(a)}}{D_k^{(a)}} \right]^{\kappa_{jk}} - \sum_{j=1+N_*}^{N_n} E_{kj} c_{je} \left[\frac{D_j^{(a)}}{D_k^{(a)}} \right]^{\kappa_{jk}} - \\ & - \sum_{j=N_n+1}^{N-1} c_{je} \left[B_{kj} + \left(\frac{m(E)}{m_j} B(k, E) + \frac{1}{D_j^{(a)}} \right) \frac{e_j}{e} \right] \left[\frac{D_j^{(a)}}{D_k^{(a)}} \right]^{\kappa_{jk}} \quad (6.10) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 B_k &= a(k, K) \left(1 + \varepsilon^{(k)} + \varepsilon_k c_k \frac{m}{m(K)} \right), \quad B_{kj} = a(k, K) (b_{kj} + \varepsilon_{kj}) \frac{m}{m(K)} \\
 \varepsilon^{(k)} &= \sum_{j=1}^{N_{**}} x_j \left[\frac{a_{kj}}{a(k, K)} - 1 \right], \quad b_{kj} = 1 - \frac{a(K, j)}{a(K, k)} + \left[\frac{a(K, j)}{a(K, k)} - \frac{a_{kj}}{a(K, k)} \right] \frac{m(K)}{m_j} \\
 \varepsilon_j &= \sum_{i=1}^{N_{**}} c_i \left[\left(\frac{m(K)}{m_j} - \frac{m(K)}{m_i} \right) \frac{a_{ij}}{a(K, i)} - \left(1 - \frac{m(K)}{m_i} \right) \frac{a(K, j)}{a(K, i)} + \left(1 - \frac{m(K)}{m_j} \right) \right] \\
 \varepsilon_{kj} &= \varepsilon_j \frac{a(K, j)}{a(K, k)}, \quad B(K, K) = 0, \quad k \leq N_* \tag{6.11}
 \end{aligned}$$

Система (6.10), (6.11) записана для случая, когда компоненты, присутствующие на стенке, исчезают на бесконечности, так как это предположение охватывает практически все случаи аэродинамического разрушения пластиков в ионизованном высокотемпературном потоке. Воспользуемся тем фактом, что при разрушении пластиков в потоке ионизованного воздуха или углекислого газа на теле основную массу газа (более 70%) составляют компоненты группы *K*. Поэтому

$$|\varepsilon^{(k)}|, |\varepsilon_j| \ll 1, |\varepsilon_{kj}| \approx 0.1 |b_{kj}|, \quad k \leq N_{**}, \quad j \neq E. \tag{6.12}$$

Для рассматриваемых смесей в нулевом приближении из (6.10) — (6.12) получим систему ($k \leq N_{**}$)

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{D_k^{(a)}} &= a(k, K) - \sum_{j=1}^{N_n} c_{je} B_{kj}^\circ [a(j, K) D_k^{(a)}]^{-\kappa_{jk}} - \sum_{j=1+N_n}^{N-1} c_{je} \chi_{jk} [a(j, K) D_k^{(a)}]^{-\kappa_{jk}} \\
 \chi_{jk} &= [B_{ki}^\circ + a(j, K) (1 + e/e_j)^{-1}] (1 + e_j/e)^{\kappa_{jk}}, \quad B_{ki}^\circ = a(k, K) b_{ki} \\
 m/m(K) &= 1, \quad a(i, E) < 0.01 a_{ij} \quad (j \neq E) \\
 D_k^{(a)} &= a^{-1}(k, K) \quad (N_* < k \leq N_n), \quad D_k^{(a)} = (1 + e_k/e) a^{-1}(k, K) \quad (N_n < k < N)
 \end{aligned}$$

Решение системы (6.13) при $\kappa_{jk} = 1$ будет

$$\begin{aligned}
 D_k^{(a)} &= a^{-1}(k, K) + \sum_{j=1+N_*}^{N_n} c_{je} b_{kj} a^{-1}(j, K) + \sum_{j=1+N_n}^{N-1} c_{je} a^{-1}(j, K) \chi_{jk}^\circ \tag{6.14} \\
 \chi_{jk}^\circ &= (1 + e_j/e) b_{kj} + e_j a_{jk} / [e a(k, K)], \quad k \leq N_{**}
 \end{aligned}$$

Решение системы (6.13) при $\kappa_{jk} \neq 1$ получается с хорошей точностью (ошибка менее 7%) для всех компонент ($k = 1, \dots, N_{**}$), кроме H_2 , с помощью подстановки (6.14) в правую часть (6.13). После этого из (6.10) получаем решение для всех $k \leq N_*$. Решение системы (6.10) в общем случае может быть произведено по методу работы [3]. В случае четырехкомпонентной смеси атомов, ионов, электронов, молекул (*A, I, E, M*), считая, что атомы, ионы и электроны исчезают на стенке, а молекулы — на бесконечности, из (6.6), (6.7) и (6.14) будем иметь

$$\begin{aligned}
 D^{(a)}(I) &= 2D(I) = 2a^{-1}(I, M), \quad D^{(a)}(A) = D(A) = a^{-1}(A, M) \tag{6.15} \\
 D^{(a)}(M) &= [1 - c_e(I) (1 - 2a(A, M) / a(I, M))] a^{-1}(A, M)
 \end{aligned}$$

Формула (6.15) дает отклонение в величине $[D^{(a)}(M)a(A, M)]$ 5—7% по сравнению с точечными численными расчетами, проведенными в [5].

Численные решения, проведенные в работах [4,5], показывают, что эффективные амбиполярные числа Шмидта положительны внутри пограничного слоя и изменяются от значений на стенке, рассчитанных в п. 6, до значений на внешней границе пограничного слоя, рассчитанных в п. 5.

Поступила 16 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Тирский Г. А. Определение эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном многокомпонентном пограничном слое. Докл. АН СССР, 1964, т. 155, № 6, стр. 1278—1281.
2. Тирский Г. А. Определение тепловых потоков в окрестности критической точки двойкой кривизны при обтекании тела диссоциирующим газом произвольного химического состава. ПМТФ, 1965, № 1.
3. Тирский Г. А. Вычисление эффективных коэффициентов диффузии в ламинарном диссоциированном многокомпонентном пограничном слое. ПММ, 1969, т. 33, вып. 1.
4. Овсянников В. М., Тирский Г. А. Разрушение осесимметричного тела вращения из материала сложного химического состава в потоке частично ионизованного воздуха. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 5.
5. Суслов О. Н. Расчет конвективного теплового потока в окрестности критической точки при обтекании тела частично ионизованным газом. Изв. АН СССР, МЖГ, 1969, № 4.
6. Гиршфельдер Дж., Кертисс Ч., Берд Р. Молекулярная теория газов и жидкостей. М., Изд-во иностр. лит., 1961.
7. Чепмен С., Каулинг Т. Математическая теория неоднородных газов. М., Изд-во иностр. лит., 1960.
8. Chung P. M. Electrical characteristics of Couette and stagnation boundary — layer flows of weakly ionized gases. Phys. Fluids, 1964, vol. 7. No. 1.
9. Любимов Г. А., Михайлов В. Н. К анализу области возмущения плазмы вблизи электрода. Изв. АН СССР, МЖГ, 1968, № 3.
10. Тирский Г. А. Условия на поверхностях сильного разрыва в многокомпонентных смесях. ПММ, 1961, т. 25, вып. 2.
11. Резников Б. И., Тирский Г. А. Обобщенная аналогия между коэффициентами массообмена в ламинарном многокомпонентном пограничном слое с произвольным градиентом давления. Докл. АН СССР, 1964, т. 158, № 4.