

МИКРОКОНВЕКЦИЯ В СЛАБЫХ СИЛОВЫХ ПОЛЯХ. СРАВНЕНИЕ ДВУХ МОДЕЛЕЙ ПРИ ЧИСЛЕННОМ ИССЛЕДОВАНИИ

УДК 532.517.013.4:563.252

О. Н. Гончарова

Алтайский государственный университет, 656099 Барнаул

В работе приводятся математические модели для описания тепловой гравитационной конвекции в слабых силовых полях. Это — классическая модель Обербека — Буссинеска и новая модель В. В. Пухначева микроконвекции изотермически несжимаемой жидкости. Представлены результаты численного анализа обеих моделей при исследовании конвективных течений жидкостей в кольцевых областях при различных вариантах температурного режима на границе и при меняющемся поле силы тяжести. Подтверждены качественные и количественные отличия в характеристиках течения под действием микроускорений, достижимых на орбитальной станции.

1. Введение. Система уравнений Обербека — Буссинеска является традиционной математической моделью, используемой для описания тепловой гравитационной конвекции. В результате анализа предположений, сделанных при выводе этой системы из точных уравнений механики сплошной среды, В. В. Пухначев [1] предлагает новую модель для исследования конвекции в областях малой протяженности, в слабых гравитационных или быстро переменных температурных полях. Эта модель характеризуется несоленоидальностью поля скоростей. Однако в случае линейной зависимости удельного объема жидкости $v = 1/\rho$ от температуры T полученная система уравнений преобразуется к виду, в котором модифицированный вектор скорости уже становится соленоидальным, что позволяет ввести аналог функции тока для плоских и осесимметричных задач. В переменных функция тока — вихрь выполняются расчеты конвективных течений в изменяющемся по величине и направлению поле микроускорений при различных вариантах граничных температурных режимов. Используется метод расчета конвективных течений, апробированный при изучении свободной конвекции в двухсвязных областях на основе линеаризованной модели микроконвекции [2, 3], а также метод параметрической прогонки А. Ф. Воеводина [4], позволяющий точно удовлетворить условиям прилипания на границе области. Численно исследуются задачи конвективных движений кремния, глицерина, некоторых типов стекла в случае, когда новый критерий подобия $gl^3/\nu\chi$ (число Пухначева) имеет порядок, меньший или равный единице (g — ускорение силы тяжести, l — характерный размер области, ν — кинематический коэффициент вязкости, χ — коэффициент температуропроводности).

2. Постановка задачи. Новая модель. Эта модель базируется на следующих предположениях [1, 5]:

- 1) плотность жидкости ρ зависит лишь от ее температуры T (жидкость изотермически несжимаема);
- 2) потенциальная энергия жидкости в поле сил тяжести много меньше ее внутренней энергии;
- 3) диссипация кинематической энергии в процессе движения пренебрежимо мала;
- 4) динамический коэффициент вязкости μ , коэффициент теплопроводности k и удельная теплоемкость c предполагаются постоянными.

Система уравнений, выражающая законы сохранения массы, импульса и энергии, за-

писывается в форме

$$\rho_t + V \cdot \nabla \rho + \rho \nabla V = 0, \quad \rho(V_t + V \cdot \nabla V) = -\nabla P' + \mu \Delta V + \rho g, \quad \rho(T_t + V \cdot \nabla T) = \delta \Delta T, \quad (2.1)$$

где V — скорость; $P' = P - \zeta \operatorname{div} V$; P — модифицированное давление; ζ — второй коэффициент вязкости; $(\)_t = \partial(\)/\partial t$; $\delta = k/c$.

Система уравнений (2.1) замыкается уравнением состояния $\rho = R(T)$ (R — заданная функция T).

В случае $\rho = \rho_*(1 + \beta T)^{-1}$ исходная система уравнений (2.1) преобразуется к виду, в котором модифицированный вектор скорости $W = V - \beta \chi \nabla T$ становится соленоидальным:

$$\begin{aligned} \operatorname{div} W &= 0, \\ W_t + W \cdot \nabla W + \beta \chi (\nabla T \cdot \nabla W - \nabla W \cdot \nabla T) + \beta^2 \chi^2 (\Delta T \nabla T - \nabla |\nabla T|^2 / 2) &= \\ = (1 + \beta T)(-\nabla q + \nu \Delta W) - \beta T g, \quad T_t + W \cdot \nabla T + \beta \chi |\nabla T|^2 &= (1 + \beta T) \chi \Delta T. \end{aligned} \quad (2.2)$$

Здесь $q = P'/\rho_* - g \cdot x - \beta(\nu - \tilde{\chi})\tilde{\chi} \Delta T$ — модифицированное давление; β — коэффициент температурного расширения; $\nu = \mu/\rho_*$; $\chi = \delta/\rho_*$; ρ_* — характерное значение плотности жидкости.

Задача состоит в нахождении функций W, T , удовлетворяющих начальным условиям

$$W = W_0(x), \quad T = T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0 \quad (2.3)$$

и граничным условиям

$$W = -\beta \chi \nabla T, \quad \partial T / \partial n = f(x, t), \quad x \in \Sigma, \quad t \in [0, t_*], \quad (2.4)$$

причем

$$\int_{\Sigma} f(x, t) d\Sigma = 0$$

(Ω — область течения, Σ — ее граница).

Модель Обербека — Буссинеска. Вывод модели тепловой гравитационной конвекции Обербека — Буссинеска не оговаривается подробно (см., например, [5]). Начально-краевая задача для системы Обербека — Буссинеска [5] состоит в определении скорости V , температуры T и модифицированного давления P' , удовлетворяющих системе уравнений

$$\begin{aligned} \operatorname{div} V &= 0, \quad V_t + V \cdot \nabla V = -\nabla P' + \nu \Delta V - \beta T g, \\ T_t + V \cdot \nabla T &= \chi \Delta T \quad (P' = P/\rho_* - g \cdot x); \end{aligned} \quad (2.5)$$

начальным условиям

$$V = 0, \quad T = T_0(x), \quad x \in \Omega, \quad t = 0; \quad (2.6)$$

граничным условиям

$$V = 0, \quad \partial T / \partial n = f(x, t), \quad x \in \Sigma, \quad t \in [0, t_*]. \quad (2.7)$$

3. Численное моделирование. Проводится численное исследование нестационарного конвективного движения жидкостей в кольцевой области. Системы уравнений (2.2), (2.5) рассматриваются в полярных координатах (r, θ) . В переменных (ψ, ω) они записываются в виде

$$\omega_t = \tilde{\nu} \Delta \omega + f_\omega; \quad (3.1)$$

$$\Delta \psi = -\omega; \quad (3.2)$$

$$T_t = \tilde{\chi} \Delta T + f_T, \quad (3.3)$$

где функции f_ω и f_T , коэффициенты $\tilde{\nu}$, $\tilde{\chi}$, а также начальные условия (2.3), (2.6) и граничные условия (2.4), (2.7) конкретизируются для обеих моделей следующим образом.

Для новой модели

$$f_\omega = -\left(v \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right) + \beta \left[\frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial q}{\partial r} - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial q}{\partial \theta} + \nu \left(\frac{\partial T}{\partial r} \left(\dot{\Delta} u - \frac{u}{r^2} \right) - \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta} \left(\dot{\Delta} v - \frac{v}{r^2} \right) \right) \right] + \\ + \beta \left(g_\theta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} g_r \frac{\partial T}{\partial \theta} \right) - \beta \chi \left(\omega \Delta T + \frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \omega}{\partial \theta} \right) - \beta^2 \chi^2 \left[\frac{1}{r} \left(-\frac{\partial T}{\partial r} \frac{\partial \Delta T}{\partial \theta} + \frac{\partial T}{\partial \theta} \frac{\partial \Delta T}{\partial r} \right) \right],$$

$$f_T = -\left(v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}\right) - \beta \chi |\nabla T|^2$$

$$\left(W = (v, u) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad g_r = g_0 \cos(\varepsilon t) \sin \theta, \quad g_\theta = g_0 \cos(\varepsilon t) \cos \theta \right),$$

$$\tilde{\nu} = (1 + \beta T)\nu, \quad \tilde{\chi} = (1 + \beta T)\chi.$$

Начальные условия

$$t = 0: \quad \omega = 0, \quad \psi = 0, \quad T = T_0,$$

граничные условия при $I = 0$

$$r = R_1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \beta \chi R_1^{-1} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r = R_2: \quad \psi = -\beta \chi R_2 f(t) \sin \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \beta \chi R_2^{-1} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = f(t) \cos \theta;$$

при $I = 1$

$$r = R_1: \quad \psi = -\beta \chi R_1 f(t) \sin \theta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \beta \chi R_1^{-1} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = f(t) \cos \theta,$$

$$r = R_2: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = \beta \chi R_2^{-1} \frac{\partial T}{\partial \theta}, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Для модели Обербека — Буссинеска

$$f_\omega = -\left(v \frac{\partial \omega}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial \omega}{\partial \theta}\right) + \beta \left(g_\theta \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{r} g_r \frac{\partial T}{\partial \theta} \right), \quad f_T = -\left(v \frac{\partial T}{\partial r} + \frac{u}{r} \frac{\partial T}{\partial \theta}\right)$$

$$\left(V = (v, u) = \left(\frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \theta}, -\frac{\partial \psi}{\partial r} \right), \quad g_r = g_0 \cos(\varepsilon t) \sin \theta, \quad g_\theta = g_0 \cos(\varepsilon t) \cos \theta \right), \quad \tilde{\nu} = \nu, \quad \tilde{\chi} = \chi.$$

Начальные условия

$$t = 0: \quad \omega = 0, \quad \psi = 0, \quad T = T_0,$$

граничные условия при $I = 0$

$$r = R_1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0,$$

$$r = R_2: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = f(t) \cos \theta;$$

при $I = 1$

$$r = R_1: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = f(t) \cos \theta,$$

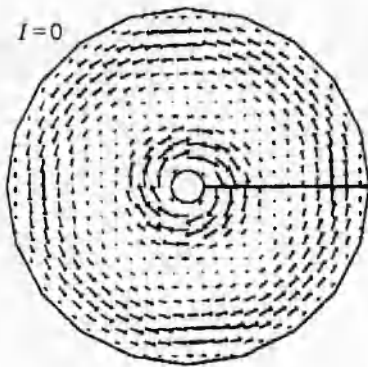


Рис. 1

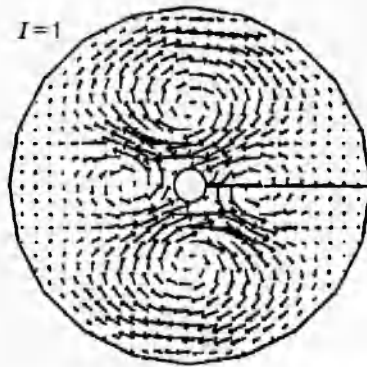


Рис. 2

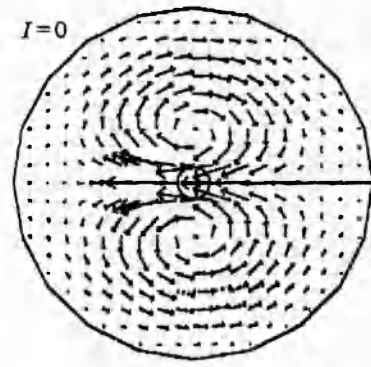


Рис. 3

$$r = R_2: \quad \psi = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial r} = 0, \quad \frac{\partial T}{\partial r} = 0.$$

Два вида краевых условий соответствуют двум характерам температурного режима: $I = 0$ — поток тепла через внешнюю границу области и теплоизоляция внутренней границы, $I = 1$ — наоборот.

Для численного решения задачи используется метод расчета конвективных течений в двухсвязных областях [2]. Вводится разностная сетка

$$r_n = R_1 + (n - 1)h, \quad n = 1, \dots, N + 1, \quad h = (R_2 - R_1)/N;$$

$$\theta_m = (m - 1)\alpha, \quad m = 1, \dots, M + 1, \quad \alpha = 2\pi/M; \quad t_k = k\tau, \quad k = 1, 2, \dots$$

Продольно-поперечная конечно-разностная схема для уравнений (3.1), (3.3) записывается в следующем общем виде:

$$\frac{U^{k+1/2} - U^k}{0,5\tau} = \lambda(\Lambda_1 U^k + \Lambda_2 U^{k+1/2}) + F^{k+1/2},$$

$$\frac{U^{k+1} - U^{k+1/2}}{0,5\tau} = \lambda(\Lambda_1 U^{k+1} + \Lambda_2 U^{k+1/2}) + F^{k+1/2}.$$

Здесь $U^k = U(t^k)$; $U = \left(\frac{\omega}{T}\right)$; Λ_1, Λ_2 — разностные операторы, аппроксимирующие соответственно дифференциальные операторы

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial}{\partial r}, \quad \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2}, \quad \lambda = \tilde{\nu} \quad \text{или} \quad \lambda = \tilde{\chi}.$$

Для решения уравнения Пуассона (3.2) на каждом временном слое используется итерационная схема

$$\frac{\psi^{s+1/2} - \psi^s}{0,5\tau} = \lambda_s(\Lambda_1 \psi^{s+1/2} + \Lambda_2 \psi^s + \omega^{s+1/2}),$$

$$\frac{\psi^{s+1} - \psi^{s+1/2}}{0,5\tau} = \lambda_s(\Lambda_1 \psi^{s+1/2} + \Lambda_2 \psi^{s+1} + \omega^{s+1/2})$$

(λ_s — итерационный параметр).

Для нахождения $T^{k+1/2}, \omega^{k+1/2}$ и ψ^{s+1} применяется циклическая прогонка, а для решения разностных уравнений для $\omega^{k+1}, \psi^{s+1/2}$ — так называемая прогонка с параметрами [4], согласно которой $\omega_{n,m} = P_{n,m}\omega_{N+1,m} + Q_{n,m}\omega_{1,m} + R_{n,m}$, $\psi_{n,m} = \bar{P}_{n,m}\omega_{N+1,m} + Q_{n,m}\omega_{1,m} + \bar{R}_{n,m}$.

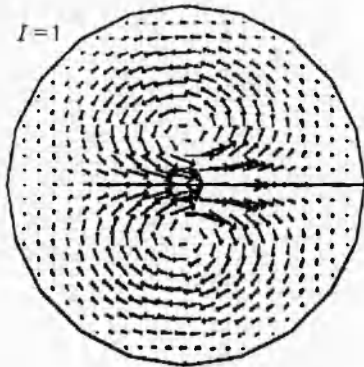


Рис. 4

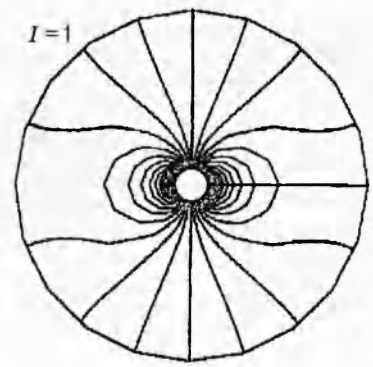
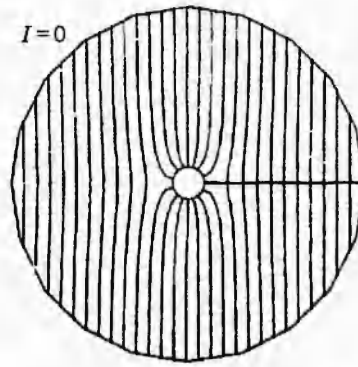


Рис. 5

4. Результаты численного исследования. Расчеты конвективных течений в переменном поле микроускорений ($g = g_0 \cos(\varepsilon t)$, $g_0 = 10^{-3}$ см/с², $\varepsilon = 10^{-1}$ 1/с) выполняются на сетке 21×21 в кольцевой области $0,1 \text{ см} = R_1 \leq r \leq R_2 = 1,1 \text{ см}$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ для кремния, глицерина, стекла.

В табл. 1 приводятся значения чисел Прандтля Pr , Грасгофа Gr , Пухначева Pu ($Pr = \nu/\chi$, $Gr = g\beta T_* l^3/\nu\chi$, $Pu = gl^3/\nu\chi$, T_* — характерный перепад температуры, $l = R_2 - R_1$). Поток тепла через внешнюю либо внутреннюю границу области осуществляется по закону

$$\frac{\partial T}{\partial r} = H(t) \cos \theta, \quad H(t) = (T_1 - T_0)(t/t_1) + T_0, \quad t \leq t_1, \quad H(t) = T_1, \quad t > t_1,$$

$t_1 = 60$ с, $T_0 = 35$ °С, $T_1 = 70$ °С, $T_* = T_0$.

Расчеты показывают качественное отличие картин течения, рассчитанного по двум различным моделям. Это касается, в первую очередь, структуры течения, его топологии, развития во времени. На рис. 1–5 приводятся поля скоростей, изотермы для кремния в момент времени $t = 120$ с. Вид рисунков типичен для глицерина и стекла.

Рис. 1–4 демонстрируют поле скоростей в расплаве кремния в момент $t = 120$ с при $Pu = 1$, а рис. 5 — поведение изотерм для этих условий. На рис. 1 (модель Обербека — Буссинеска, $I = 0$) показано поле скоростей, имеющее структуру вращательного движения с осевой симметрией, причем внешние и внутренние слои жидкости вращаются в различных направлениях. Между этими слоями есть два маленьких симметрично расположенных вихря: для кремния — в верхнем и нижнем полукруге, для глицерина и стекла — в правом и левом.

На рис. 2 (модель Обербека — Буссинеска, $I = 1$) наблюдается четырехвихревая структура течения. При этом для кремния область, занимаемая верхним и нижним вихрем, обширнее. Для глицерина и стекла обширные зоны, занятые правым и левым вихрем.

На рис. 3 (новая модель, $I = 0$) явно выражена двухвихревая структура. Вращение вихря, лежащего в верхней полуплоскости, происходит по часовой стрелке, вращение вихря,

Таблица 1

| Вещество | Pr | Gr | Pu |
|----------|-----------|-----------|-----------|
| Кремний | 10^{-3} | 10^{-4} | 1 |
| Глицерин | 10^4 | 10^{-3} | 10^{-1} |
| Стекло | 10^4 | 10^{-6} | 10^{-2} |

Таблица 2

| Вещество | Модель Обербека — Буссинеска | Новая модель |
|----------|------------------------------|------------------------|
| | $ u , v , \text{ см/с}$ | |
| Кремний | $10^{-8} \div 10^{-6}$ | $10^{-5} \div 10^{-4}$ |
| Глицерин | $10^{-9} \div 10^{-8}$ | $10^{-6} \div 10^{-5}$ |
| Стекло | $10^{-13} \div 10^{-10}$ | $10^{-7} \div 10^{-6}$ |

лежащего в нижней — против часовой стрелки.

На рис. 4 (новая модель, $I = 1$), как и при $I = 0$, поле скоростей имеет двухвихревую структуру, но с противоположным направлением обхода.

Расчеты показали лишь некоторые количественные отличия температурных полей, получаемых по двум различным моделям. Качественно же наблюдаются два типа семейств изотерм, соответствующих двум различным типам граничных условий (рис. 5, $I = 0$ и $I = 1$).

Количественные характеристики, а именно порядки скоростей, приводятся для всех жидкостей и двух моделей в табл. 2 ($t = 120$ с).

Автор выражает благодарность сотрудникам Института прикладной математики (Университет г. Фрайбурга, Германия) за использование программы GRAPE визуализации численных исследований.

Работа выполнена при финансовой поддержке Фонда Гумбольдта (Германия) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 93-013-17945).

ЛИТЕРАТУРА

1. Пухначев В. В. Модель конвективного движения при пониженной гравитации // Моделирование в механике / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т теорет. и прикл. механики. 1992. Т. 6 (23), № 4. С. 47–56.
2. Воеводин А. Ф., Гончарова О. Н. Расчет свободной конвекции при изменяющемся поле сил тяжести // Динамика сплошной среды / АН СССР. Сиб. отд-ние. Ин-т гидродинамики. 1984. Вып. 67. С. 21–28.
3. Гончарова О. Н. Численное исследование уравнений конвекции изотермически несжимаемой жидкости // Вычислительные технологии / РАН. Сиб. отд-ние. Ин-т вычисл. технологий. 1992. Вып. 2 (5). С. 95–101.
4. Воеводин А. Ф., Шугрин С. М. Методы решения одномерных эволюционных систем. Новосибирск: Наука, 1993.
5. Андреев В. К., Капцов О. В., Пухначев В. В., Родионов А. А. Применение теоретико-групповых методов в гидродинамике. Новосибирск: Наука, 1994.

Поступила в редакцию 27/XI 1995 г.
