ПМТФ, № 6, 1961

О НЕСТАЦИОНАРНЫХ ВИНТОВЫХ ДВИЖЕНИЯХ В МНОГОКОМПОНЕНТНОЙ МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

В. С. Ткалич, Е. Ф. Ткалич

(Сухуми)

Понятие «винтовое движение» использовалось И. С. Громекой [1] при изучении стационарных движений идеальной жидкости. Систематический анализ винтовых потоков содержится в книге О. Ф. Васильева [2]. Позднее винтовые движения изучались в работах [3-8].

В многокомпонентной магнитной гидродинамике винтовые движения изучались авторами [9]; один из авторов [10] провел рассмотрение с учетом диссипации. Настоящая работа посвящена исследованию нестационарных винтовых движений в многокомпонентной магнитной гидродинамике.

1. Винтовые движения. Пусть плазма занимает достаточно большой объем и совершает медленные и медленно изменяющиеся (во времени и в пространстве) движения при слабых магнитных полях; процессы диссипации энергии и теплообмена не играют существенной роли. Дебаевский радиус мал по сравнению с характерными линейными размерами. Тогда замкнутая система уравнений многокомпонентной магнитной гидродинамики имеет вид [9-12]

$$\operatorname{rot}\mathbf{E} = -\frac{\mu}{c}\frac{\partial H}{\partial t}, \qquad \operatorname{rot}\mathbf{H} = \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} + \frac{4\pi}{c}\Sigma\, e_e n_e \mathbf{V}_e$$

$$\operatorname{div}\varepsilon\mathbf{E} = 4\pi\Sigma e_e n_e, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H} = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{V}_k = 0$$

$$\frac{\partial \mathbf{V}_k}{\partial t} + \nabla\left(\frac{\mathbf{V}_k^2}{2} + \frac{p_k}{m_k n_k} + F_k\right) = \frac{e_k}{m_k}\mathbf{E} + \mathbf{V}_k\times\left(\operatorname{rot}\mathbf{V}_k + \frac{\mu e_k}{c m_k}\mathbf{H}\right)$$

Суммирование по l всюду проводится от 1 до N (при этом N есть число сортов ионов).

Таким образом, для сортов ионов, играющих существенную роль в изучаемом процессе, предполагаются выполненными условия сплошности среды, изотропии давления и несжимаемости.

Длина и время свободного пробега малы по сравнению с характерным размером системы и характерным временем процесса, а также по сравнению с длиной ларморовской окружности и временем обращения по ней в тепловом движении.

Скорость упорядоченного движения и характерная скорость малы по сравнению с тепловой скоростью.

Введем в рассмотрение аналоги электромагнитных потенциалов (φ, rot **B**) и полный импульс ($\mathbf{P}_k$) единицы массы ионов сорта k:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi - \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{B}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{B}$$

$$\mathbf{P}_k = \mathbf{V}_k + \frac{\mu e_k}{c m_k}\operatorname{rot}\mathbf{B} \tag{1.1}$$

Соотношения (1.1) выделяют в явном виде [10] постоянные составляющие электрического и магнитного полей ($\mathbf{E}_0 = \mathrm{const}$, $\mathbf{H}_0 = \mathrm{const}$).

Подставляя (1.1) в исходную систему, получим

$$\triangle \varphi = -\frac{4\pi}{\varepsilon} \Sigma e_c n_c, \qquad \operatorname{div} \mathbf{P}_k = 0 \tag{1.2}$$

$$\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]\operatorname{rot}\mathbf{B} + \frac{\varepsilon}{c}\nabla\frac{\partial\varphi}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\Sigma e_e n_e \mathbf{P}_e$$

$$\frac{\partial \mathbf{P}_k}{\partial t} + \frac{\mu e_k}{cm_k}\mathbf{H}_0 \times \left(\mathbf{P}_k - \frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right) + \nabla W_k = \left(\mathbf{P}_k - \frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right)\times\operatorname{rot}\mathbf{P}_k \tag{1.3}$$

$$W_k \equiv \frac{1}{2}\left(\mathbf{P}_k - \frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right)^2 + \frac{p_k}{m_k n_k} + F_k - \frac{e_k}{m_k}\mathbf{E}_0\mathbf{r} + \frac{e_k}{m_k}\varphi$$

$$\Omega_k^2 \equiv \frac{4\pi\mu e_k^2 n_k}{m_k}, \qquad \Omega^2 \equiv \Sigma\Omega_e^2$$

Величина W_k представляет собой сумму кинетической и потенциальной энергии, а также энергии давления и энергии электрического поля в единице массы ионов k-го сорта.

В дальнейшем остановимся на изучении «винтовых» движений, т. е. движений, удовлетворяющих условию [9, 10]

$$\operatorname{rot}\mathbf{P}_k = a_k\left(\mathbf{P}_k - \frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\mathbf{B}\right) \tag{1.4}$$

Как и в работах [9, 10], ограничимся изучением «однородных» [1, 2] винтовых движений (т. е. величины a_k не зависят от координат $a_k = a_k(t)$). Тогда система (1.3) становится линейной относительно искомых функций.

Пусть среди коэффициентов a_k имеется M отличных от нуля $(0 \leqslant M \leqslant N)$. Тогда их можно перенумеровать следующим образом: $a_k \neq 0$, если $k = 1, \ldots, M$, $a_k = 0$, если $k = M + 1, \ldots, N$. Введем набор коммутирующих между собой линейных дифференциальных операторов

$$\alpha_0^- \equiv -\operatorname{rot}, \qquad \alpha_k^- \equiv a_k - \operatorname{rot}, \qquad A^- \equiv \prod_e \alpha_e^- \equiv A_k^-\alpha_k^- \qquad (k,\ l \leqslant M)$$

В произведении взяты все не совпадающие между собой операторы α_k^-. При помощи введенных операторов общее решение условий винтовости (1.4) записывается следующим образом

$$\mathbf{B} = A^-\mathbf{F}, \qquad \mathbf{P}_k = -\frac{\mu e_k}{cm_k}a_k\alpha_0^- A_k^-\mathbf{F} \qquad (k = 1, 2, \ldots, M)$$

$$\mathbf{P}_k = \nabla\varphi_k \qquad (k = M+1, \ldots, N) \tag{1.5}$$

Подставляя (1.5) в уравнения (1.2), находим их общие решения

$$\varphi = \varphi_0 + \varphi_*, \qquad \varphi_k = \varphi_{k0} \tag{1.6}$$

где φ_0, φ_{k0} суть произвольные гармонические функции, φ_* есть стационарное частное решение первого уравнения (1.2).

Подставляя (1.5) и (1.6) в (1.1), находим векторные поля

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi_* - \nabla\varphi_0 - \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}(A^-\mathbf{F}), \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}A^-\mathbf{F}$$

$$\mathbf{V}_k = -\frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}A_k^-\mathbf{F} \qquad (k = 1, \ldots, M) \tag{1.7}$$

$$\mathbf{V}_k = \nabla\varphi_{k0} - \frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}A^-\mathbf{F} \qquad (k = M+1, \ldots, N)$$

Из системы уравнений индукции и движения (1.3) при помощи (1.5) и (1.6) получаем систему для определения $\mathbf{F}$ и W_k

$$\left\{\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]A^- - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{M}\Omega_i{}^2 a_i A_i^-\right\}\operatorname{rot}\mathbf{F}=$$

$$=\nabla\left(\frac{4\pi}{c}\sum_{i=M+1}^{N}e_i n_i\varphi_{i0}-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\right) \qquad (1.8)$$

$$\frac{\mu e_k}{cm_k}\left[\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}a_k A_k+\frac{\mu e_k}{cm_k}\mathbf{H}_0\times\operatorname{rot}\operatorname{rot}A_k^-\right]\mathbf{F}+\nabla W_k=0 \qquad (k=1,\ldots,M) \qquad (1.9)$$

$$\frac{\mu e_k}{cm_k}\mathbf{H}_0\times\left(\nabla\varphi_{k0}-\frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}A^-\mathbf{F}\right)+\nabla\left(W_k+\frac{\partial\varphi_{k0}}{\partial t}\right)=0 \qquad (k=M+1,\ldots,N) \qquad (1.10)$$

Беря ротор от уравнений (1.9) и (1.10), получим условие разрешимости их относительно W_k

$$\left[\frac{cm_k}{\mu e_k}a_k\frac{\partial}{\partial t}-(\mathbf{H}_0\nabla)\right]\operatorname{rot}\operatorname{rot}a_k A_k^-\mathbf{F}=0 \qquad (k=1,\ldots,M)$$

$$(\mathbf{H}_0\nabla)\left(\operatorname{rot}\mathbf{B}-\frac{cm_k}{\mu e_k}\nabla\varphi_{k0}\right)=0 \qquad (k=M+1,\ldots,N) \qquad (1.11)$$

Таким образом, магнитное поле выражается через единственный зависящий от координат и времени вектор $\mathbf{F}$; электрическое поле содержит также градиент от произвольной гармонической функции φ_0.

Беря ротор от уравнения (1.8) и умножая на A^-, в случае $a_k=\text{const}$ получим уравнение для магнитного поля

$$\left\{\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]A^- - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{M}\Omega_i^2 a_i A_i^-\right\}\mathbf{H}_*=0,$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_*=0, \qquad \mathbf{H}=\mathbf{H}_0+\mathbf{H}_* \qquad (1.12)$$

Это уравнение позволяет проводить предварительный анализ геометрии магнитного поля (до решения всей задачи).

Если $a_k\neq 0$, то импульсы $\mathbf{P}_k$ и скорости $\mathbf{V}_k$ выражаются через вектор $\mathbf{F}$.

Если $a_k=0$, то импульс $\mathbf{P}_k$ является градиентом (гармонической функции). В дальнейшем такие движения (представляющие собой естественное обобщение потенциальных движений в обычной гидродинамике) будем называть потенциальными. Подобного вида движения Габор [13] называет безвихревыми.

В случае потенциальных движений скорость $\mathbf{V}_k$ содержит градиент произвольной гармонической функции φ_{k0} и вихревое слагаемое, обусловленное вектором $\mathbf{F}$.

2. **Потенциальные движения.** В случае потенциальных движений ($a_k=0$, $M=0$, $A^-=A_k^-=1$) уравнение индукции (1.8) принимает вид

$$\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]\operatorname{rot}\mathbf{F}=\nabla\left(\frac{4\pi}{c}\Sigma e_e n_e\varphi_{e0}-\frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}\right) \qquad (2.1)$$

Магнитное поле $\mathbf{H}_*$ может быть определено из уравнений

$$\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot}+\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2}+\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]\mathbf{H}_*=0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}_*=0 \qquad (2.2)$$

Если постоянное магнитное поле отсутствует ($\mathbf{H}_0 = 0$, $\mathbf{H} = \mathbf{H}_*$), то условие интегрируемости (1.11) удовлетворяется тождественно. Интегрируя уравнения движения (1.10) и упрощая выражения (1.7), получаем

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi_* - \nabla\varphi_0 - \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}\mathbf{F}, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot}\mathbf{F}$$
$$\mathbf{V}_k = \nabla\varphi_{k0} - \frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\mathbf{F}, \qquad \frac{\partial\varphi_{k0}}{\partial t} + W_k = W_{k0}(t) \tag{2.3}$$

где $W_{k0}(t)$ есть произвольная функция времени. Таким образом, для энергии W_k имеет место соотношение, аналогичное известному для потенциальных движений в обычной гидродинамике.

В случае зависимости от двух координат ($\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_3$, $\partial/\partial x_3 = 0$; через x_k обозначаем те координаты q_k, коэффициент Лямэ которых равен единице) условие (1.11) также удовлетворяется тождественно. Уравнения (1.10) принимают вид

$$H_0\frac{\mu e_k}{cm_k}\mathbf{e}_3\times\nabla\varphi_{k0} + \nabla\left[\frac{\partial\varphi_{k0}}{\partial t} + W_k - H_0\left(\frac{\mu e_k}{cm_k}\right)^2(\mathbf{e}_3\mathbf{F})\right] = 0 \tag{2.4}$$

Воспользуемся гармонически-сопряженными функциями. Функции (φ_0, ψ_0) являются гармонически-сопряженными, если они удовлетворяют соотношению $\mathbf{e}_3\times\nabla\varphi_0 = \nabla\psi_0$, которое в случае декартовой системы координат означает, что φ_0 является действительной, а ψ_0 мнимой частью некоторой аналитической функции $f(x_1 + ix_2) = \varphi_0 + i\psi_0$. Тогда решение уравнения (2.4) примет вид

$$W_k + \frac{\partial\varphi_{k0}}{\partial t} + H_0\frac{\mu e_k}{cm_k}\left[\psi_{k0} - H_0\left(\frac{\mu e_k}{cm_k}\right)(\mathbf{e}_3\mathbf{F})\right] = W_{k0}(t) \tag{2.5}$$

Здесь $W_{k0}(t)$ — произвольная функция времени. Следовательно, энергия W_k изменяется при переходе от одной струи к другой, а также непосредственно зависит от третьей компоненты вектора $\mathbf{F}$. Будем считать, что $\operatorname{rot}\mathbf{F}$, а также градиенты произвольных гармонических функций не зависят от третьей координаты x_3. Тогда их можно представить в виде

$$\operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\psi\times\mathbf{e}_3 + A\mathbf{e}_3$$
$$\varphi_0 = \Phi(x_1, x_2, t) + x_3\alpha(t), \qquad \varphi_{k0} = \Phi_k(x_1, x_2, t) + x_3\alpha_k(t) \tag{2.6}$$

где α и α_k — произвольные функции времени, Φ и Φ_k — произвольные гармонические функции двух координат (и времени). Подставляя эти соотношения в уравнение индукции (2.1), отщепляя третью компоненту и интегрируя первые две, получим

$$\left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 - \triangle\right]A = \frac{4\pi}{c}\Sigma e_e n_e\alpha_e(t) - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\alpha}{\partial t}$$
$$\left[\frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2}{\partial t^2} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 - \triangle\right]\psi = \Psi \tag{2.7}$$

где Ψ — гармонически сопряженная функция

$$\frac{4\pi}{c}\Sigma e_e n_e\Phi_e - \frac{\varepsilon}{c}\frac{\partial\Phi}{\partial t}$$

Подставляя (2.6) в (1.7), находим векторные поля величин

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi_* - \nabla\Phi - \left[\alpha(t) + \frac{\mu}{c}\frac{\partial A}{\partial t}\right]\mathbf{e}_3 + \frac{\mu}{c}\mathbf{e}_3\times\nabla\frac{\partial\psi}{\partial t}$$
$$\mathbf{H} = (H_0 - \triangle\psi)\mathbf{e}_3 + \nabla A\times\mathbf{e}_3 \tag{2.8}$$
$$\mathbf{V}_k = \nabla\Phi_k + \left[\alpha_k(t) - \frac{\mu e_k}{cm_k}A\right]\mathbf{e}_3 + \frac{\mu e_k}{cm_k}\mathbf{e}_3\times\nabla\psi$$

3. Стационарные движения. В случае стационарных движений уравнение индукции (1.8) принимает вид

$$\left\{\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right] A^- - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{M} \Omega_i^2 a_i A_i^-\right\} \operatorname{rot}\mathbf{F} = -\frac{4\pi}{c}\nabla \sum_{i=M+1}^{N} e_i n_i \varphi_{i0} \quad (3.1)$$

Магнитное поле $\mathbf{H}_*$ можно определить из уравнений

$$\left\{\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right] A^- - \frac{1}{c^2}\sum_{i=1}^{M} \Omega_i^2 a_i A_i^-\right\} \mathbf{H}_* = 0, \qquad \operatorname{div}\mathbf{H}_* = 0 \quad (3.2)$$

Если отсутствует постоянное магнитное поле ($\mathbf{H}_0 = 0$), то условия интегрируемости (1.11) выполняются тождественно; интегрируя уравнения движения (1.9), (1.10), получаем уравнение Бернулли. Используя (1.7), получаем следующие выражения для полей физических величин:

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi_* - \nabla\varphi_0, \qquad \mathbf{H} = \operatorname{rot}\operatorname{rot} A^-\mathbf{F}, \qquad W_k = W_{k0} = \mathrm{const}$$

$$\mathbf{V}_k = -\frac{\mu e_k}{c m_k}\operatorname{rot}\operatorname{rot} A_k^-\mathbf{F} \qquad (k = 1, \ldots, M) \quad (3.3)$$

$$\mathbf{V}_k = \nabla\varphi_{k0} - \frac{\mu e_k}{c m_k}\operatorname{rot} A^-\mathbf{F} \qquad (k = M+1, \ldots, N)$$

В этом случае энергия W_k не зависит от координат. Он являлся предметом изучения работы авторов [9].

В случае зависимости от двух координат ($\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_3$, $\partial / \partial x_3 = 0$), соотношения (1.7) и решения уравнений движения (1.9) и (1.10) определяют полный набор физических величин

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi_0 - \nabla\varphi_*, \qquad \mathbf{H} = H_0\mathbf{e}_3 + \operatorname{rot}\operatorname{rot} A^-\mathbf{F}$$

$$\mathbf{V}_k = -\frac{\mu e_k}{c m_k}\operatorname{rot}\operatorname{rot} A_k^- F, \quad W_k - \left(\frac{\mu e_k}{c m_k}\right)^2 H_0 (\mathbf{e}_3\alpha_0^- A_k^-\mathbf{F}) = W_{k0} \quad (k = 1, \ldots, M)$$

$$\mathbf{V}_k = \nabla\varphi_k - \frac{\mu e_k}{c m_k}\operatorname{rot} A^-\mathbf{F} \quad (3.4)$$

$$W_k + \frac{\mu e_k}{c m_k} H_0 \left[\psi_{k0} - \frac{\mu e_k}{c m_k}(\mathbf{e}_3 A^-\mathbf{F})\right] = W_{k0} \qquad (k = M+1, \ldots, N)$$

где W_{k0} суть постоянные интегрирования. Для энергии W_k имеет место соотношение, аналогичное интегралу Бернулли. Отметим, что анализ произвольных стационарных двухиараметрических движений проводился в работах [11, 12] одного из авторов.

4. Бегущие волны. Соотношения (1.11) удовлетворятся тождественно, если положить

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}[(\gamma\,\mathbf{e}_0)\,\mathbf{r} + \mathbf{e}_0\,\omega t], \qquad M = N$$

$$\mathbf{H}_0 = H_0\mathbf{e}_0, \qquad a_k = \frac{\omega_k}{\omega}|\gamma|, \qquad \omega_k \equiv \frac{\mu e_k H_0 \cos(\mathbf{e}_0\gamma)}{c m_k} \quad (4.1)$$

где $\mathbf{F}$ — произвольная функция своего аргумента, $\mathbf{e}_0$ — единичный вектор в направлении магнитного поля $\mathbf{H}_0$, ω_k — аналог циклотронной частоты ионов k-то сорта, ω — произвольная постоянная размерности частоты, γ — произвольный постоянный вектор размерности обратной длины. В дальнейшем будем считать, что те координатные линии, у которых скалярное произведение отлично от нуля ($\mathbf{e}_0\mathbf{e}_k \neq 0$), являются прямыми (соответствующие коэффициенты Лямэ — единицы).

Подставляя (4.1) в уравнение индукции (1.8), получаем (4.2)

$$\left\{\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{(c\gamma\mathbf{e}_0)^2}(\mathbf{e}_0\nabla)^2 + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]A^- - \frac{1}{c^2}\Sigma\Omega_e^2 a_e A_e^-\right\}\operatorname{rot}\mathbf{F} = -\frac{\varepsilon}{c}\nabla\frac{\partial\varphi_0}{\partial t}$$

Магнитное поле $\mathbf{H}_*$ может быть определено из системы уравнений

$$\left\{\left[\operatorname{rot}\operatorname{rot} + \frac{\varepsilon\mu\omega^2}{(c\gamma\mathbf{e}_0)^2}(\mathbf{e}_0\nabla)^2 + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]A^- - \frac{1}{c^2}\Sigma\Omega_e^2 a_e A_e^-\right\}\mathbf{H}_* = 0$$

$$\operatorname{div}\mathbf{H}_* = 0 \qquad (4.3)$$

Решая уравнения движения (1.9) и используя соотношения (1.7), получаем выражения для всех физических величин

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}_0 - \nabla\varphi_0 - \nabla\varphi_0 - \frac{\mu}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot}A^-\mathbf{F}, \qquad \mathbf{H} = \mathbf{H}_0 + \operatorname{rot}\operatorname{rot}A^-\mathbf{F}$$

$$\mathbf{V}_k = -\frac{\mu e_k}{cm_k}\operatorname{rot}\operatorname{rot}A_k^-\mathbf{F}, \qquad W_k - \left(\frac{\mu e_k}{cm_k}\right)^2(\mathbf{H}_0\alpha_0^- A_k^-\mathbf{F}) = W_{k0} \qquad (4.4)$$

где W_{k0} есть постоянная интегрирования. Энергия W_k зависит от магнитного поля $\mathbf{H}_0$ и производных от функции $\mathbf{F}$.

Отметим несколько предельных случаев вида функции $\mathbf{F}$

$$\mathbf{F} \equiv \mathbf{F}\left[(\gamma\mathbf{e}_0)q_1 + e_{01}\omega t,\ (\gamma\mathbf{e}_0)q_2 + e_{02}\omega t,\ (\gamma\mathbf{e}_0)q_3 + e_{03}\omega t\right]$$

представляющих особый интерес. Если магнитное поле $\mathbf{H}_0$ не имеет составляющей вдоль первой оси, то согласно (4.1) функцию $\mathbf{F}$ можно выбрать не зависящей от второй координаты

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left[q_1, (\gamma\,\mathbf{e}_0)x_3 + e_{03}\omega t\right]$$

Такой выбор оказывается удобным при изучении бегущих волн в слоистых средах (первая координатная линия ортогональна к поверхностям раздела слоев). Магнитное поле $\mathbf{H}_0$ при этом расположено в плоскости слоя под произвольным углом к направлению распространения.

Если магнитное поле имеет все три компоненты, то согласно (4.1) можно выбрать функцию $\mathbf{F}$, не зависящую от первых двух координат

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}\left[(\gamma\,\mathbf{e}_0)x_3 + e_{03}\omega t\right]$$

Такой выбор удобен при изучении распространения бегущих волн под произвольным углом к магнитному полю.

В качестве примера рассмотрим волну (конечной амплитуды) вида простой гармоники

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_0\exp\left[i(kx_3 + \omega t)\right]$$

распространяющуюся под произвольным углом к магнитному полю $\mathbf{H}_0$. Положим

$$\varepsilon = \mu = 1,\ \varphi_0 = 0, \qquad F_3 = 0, \qquad F_2 = isF_1$$

где $s = \pm 1$ характеризует поляризацию волны. Тогда из (4.2) получается следующее дисперсионное уравнение

$$\left(\frac{c}{V_\Phi}\right)^2 = 1 - \left(\frac{\Omega}{\omega}\right)^2 - \Sigma\left(\frac{\Omega_e}{\omega}\right)^2\frac{s\omega_e}{\omega - s\omega_e} \qquad \left(V_\Phi \equiv \frac{\omega}{k}\right)$$

которое эквивалентно уравнениям (20) — (21) работы одного из авторов [10]. Первые два слагаемых этого соотношения не зависят от магнитного поля, последнее — обращается в нуль, если магнитное поле равно нулю. Это слагаемое описывает влияние магнитного поля на фазовую скорость.

5. Плазменный волновод. Если магнитное поле $\mathbf{H}_0$ направлено вдоль третьей оси, то соотношение (4.1) принимает вид

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(q_1, q_2, \gamma_3 x_3 + \omega t) \tag{5.1}$$

Решения этого вида позволяют рассматривать волны (бегущие вдоль магнитного поля $\mathbf{H}_0$), амплитуда которых зависит от первых двух координат, т. е. можно рассматривать плазменные волноводы произвольного профиля, в которых магнитное поле $\mathbf{H}_0$ направлено вдоль оси волновода.

В качестве примера рассмотрим распространение аксиально-симметрических волн в цилиндрическом волноводе. Выбирая цилиндрическую систему координат ($q_1 \equiv r$, $q_2 \equiv \theta$, $x_3 \equiv z$) и полагая $\partial / \partial\theta = 0$, получим

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}(r, kz + \omega t) \qquad (\gamma_3 \equiv k) \tag{5.2}$$

Для простоты в дальнейшем положим скорости всех сортов ионов равными нулю, а массы бесконечными; скорость и масса электронов конечны. Это оправдано при достаточно больших частотах ω.

Тогда, представляя $\operatorname{rot}\mathbf{F}$ в виде

$$r \operatorname{rot}\mathbf{F} = \nabla\psi \times \mathbf{e}_2 + A\mathbf{e}_2 \tag{5.3}$$

и полагая $\varphi_0 = 0$ в уравнении индукции (4.2), получаем из него два скалярных уравнения

$$r^2\triangle^*\left\{- r\triangle^*\psi - aA + \left[\frac{\omega^2}{c^2k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]\psi\right\} + \frac{a\omega^2}{c^2k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2}A = 0$$

$$r^2\triangle^*(A - a\psi) - \left[\frac{\omega^2}{c^2k^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]A + \frac{a\omega^2}{c^2k^2}\frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} = C$$

$$\left(\triangle^* \equiv \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{r\partial r r\partial r}\right)$$

где C есть постоянная интегрирования. Полагая $C = 0$, для вспомогательной искомой функции ξ получаем следующее линейное дифференциальное уравнение

$$\left\{r^2\Delta^*\left[r^2\triangle^* - \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]^2 + a^2\left[r\triangle^* - \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\right\}\xi = 0 \tag{5.4}$$

$$\psi = \left[r^2\triangle^* - \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2\right]\xi, \quad A = a\left[r^2\triangle^* - \left(\frac{\omega}{ck}\right)^2\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right]\xi \tag{5.5}$$

Решение уравнения (5.4) ищем в виде

$$\xi = r\left[C_1J_1(\varkappa_1 r) + C_2J_1(\varkappa_2 r) + C_3J_1(\varkappa_3 r)\right]\cos(kz + \omega t) \tag{5.6}$$

Подставляя (5.6) в (5.4) и пренебрегая членами порядка $(V_\varphi/c)^2$, получаем

$$(\varkappa^2 + k^2)^2 + (\varkappa^2 + k^2)\left[2\left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 - \left(\frac{\omega_H}{V_\varphi}\right)^2\right] + \left(\frac{\Omega}{c}\right)^4 = 0, \qquad \varkappa = \pm ik \tag{5.7}$$

Решая (5.7), определяем $\varkappa^2$. Оказывается, что приведенным ниже граничным условиям удовлетворяет только один корень $\varkappa^2$

$$\varkappa^2 = -\left(\frac{\omega}{V_\varphi}\right)^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\omega_H}{V_\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2 + \left|\frac{\omega_H}{V_\varphi}\right|\sqrt{\frac{1}{4}\left(\frac{\omega_H}{V_\varphi}\right)^2 - \left(\frac{\Omega}{c}\right)^2} \tag{5.8}$$

Из этого соотношения следует, что $\varkappa$ является действительной величиной при выполнении следующих условий: (5.9)

$$|V_\varphi| \leqslant \frac{c\,|\omega_H|}{2\Omega}, \qquad \omega^2 \leqslant \frac{\omega_H^2}{2} - \left(\frac{\Omega V_\varphi}{c}\right)^2 + |\omega_H|\sqrt{\left(\frac{\omega_H}{2}\right)^2 - \left(\frac{\Omega V_\varphi}{c}\right)^2}$$

В дальнейшем будем считать условия (5.9) выполненными. Точные условия (5.9) выполняются, если имеют место соотношения

$$|V_\varphi| \leqslant \frac{c\,|\omega_H|}{2\Omega}, \qquad |\omega| < \frac{1}{2}|\omega_H| \tag{5.10}$$

Если плазма заключена в металлическую трубку радиуса r_0, то на ее границе можно считать выполненными следующие условия [10, 14]

$$E_\varphi = E_z = H_r = V_r = 0 \qquad \text{при} \qquad r = r_0 \tag{5.11}$$

Далее всюду пренебрегаем величинами порядка $(V_\varphi/c)^2$ по сравнению с единицей. Из соотношений (4.3), (5.5) — (5.8) получаем систему четырех линейных однородных уравнений, которая разрешима, если $\varkappa r_0$ является корнем первой функции Бесселя

$$\varkappa r_0 = \mu_k, \qquad J_1(\mu_k) \equiv 0 \qquad \mu_1 = 3.83\ldots \tag{5.12}$$

Определяя из этой системы постоянные, получаем выражение для ξ

$$\xi = \xi_0 r\,[kI_0(kr_0)\,J_1(\varkappa r) - \varkappa J_0(\varkappa r_0)\,I_1(kr)]\cos(kz + \omega t) \tag{5.13}$$

где ξ_0 есть произвольная постоянная.

Для дальнейшего анализа представляется удобным ввести безразмерную частоту $\nu \equiv \omega/\omega_H$, безразмерную плотность $\rho \equiv (r_0\Omega/\mu c)^2$ и безразмерную фазовую скорость $u \equiv \mu V_\varphi / r_0\omega_H$.

Тогда, подставляя (5.12) в (5.8), получаем следующее дисперсионное уравнение:

$$2u^2 = (1+\rho)^{-1}\left[\sqrt{1 + 4\rho\nu^2 + 4\rho^2\nu^2} + 1 - 2\nu^2(1+\rho)\right] \tag{5.14}$$

Это соотношение несправедливо при больших частотах ($\nu^2 > 1$).

Исключая с помощью дисперсионного соотношения (5.14) безразмерную фазовую скорость u из неравенств (5.9), после некоторых преобразований приходим к следующим выводам.

В случае больших безразмерных плотностей ($1/\sqrt{2} < \rho$) величина $\varkappa$ является комплексной.

В случае средних плотностей ($1/3 < \rho < 1/\sqrt{2}$) величина $\varkappa$ принимает вещественные значения, если безразмерная частота ν удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{2}\sqrt{2 - \frac{1}{\rho} + \frac{2}{\sqrt{1 + 1/\rho}}} < |\nu| < \frac{2\rho}{(1-\rho)\left[(\rho+1)^2 + \sqrt{(\rho+1)(\rho^3 + 3\rho^2 - \rho + 1)}\right]} \tag{5.15}$$

Если плотность мала ($\rho < 1/3$), то $\varkappa$ вещественно при достаточно малых частотах

$$|\nu| < \frac{2\rho}{(1-\rho)\left[(\rho+1)^2 + \sqrt{(\rho+1)(\rho^3 + 3\rho^2 - \rho + 1)}\right]} \tag{5.16}$$

Отметим некоторые предельные случаи дисперсионного уравнения (5.14). Если частота равна электронной циклотронной частоте ($\nu^2 = 1$), то фазовая скорость равна нулю ($u = 0$). В случае весьма малой плотности ($n = 0$) получаем $u^2 = 1 - \nu^2$. Если частота мала ($\nu = 0$), то $u^2 = (1+\rho)^{-1}$.

Обозначим через Q число электронов, приходящихся на единицу длины трубки $Q \equiv \pi r_0^2 n_{эл}$, а значение Q, соответствующее безразмерной плотности $\rho = 1/\sqrt{2}$, через $Q_0 = 0.68\ldots 10^{12}$.

Величина $\varkappa$ вещественна, если выполнены условия

$$Q < Q_0, \qquad |V_\varphi| < 0.68\ldots\cdot\omega_H r_0\sqrt{\frac{Q_0}{Q}}$$

Отметим, что волноводные свойства ограниченной плазмы, находящейся в магнитном поле, изучались ранее [15—17] при иных предположениях.

Поступила 16 II 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Громека И. С. Некоторые случаи движения несжимаемой жидкости. Собрание сочинений. Изд. АН СССР, М., 1952.
2. Васильев О. Ф. Основы механики винтовых и циркуляционных потоков. Госэнергоиздат, М., 1958.
3. Филатов А. Н. О винтовых потоках в неограниченном пространстве. Изв. АН УзССР. Сер. физ.-мат., 1957, № 2.
4. Филатов А. Н. О винтовых движениях сжимаемой жидкости. ДАН УзССР, 1957, № 2.
5. Филатов А. Н. Некоторые случаи винтового движения несжимаемой жидкости. ДАН УзССР, 1957, № 4.
6. Полубаринова-Кочина П. Я. О точечном источнике и вихревой нити в винтовом потоке. ПММ, т. 23, № 4, 1959.
7. Бюшгенс С. С. Геометрия неустановившегося потока совершенной несжимаемой жидкости. Изв. АН СССР. Сер. мат., т. 24, № 2, 1960.
8. Волков Е. В. О вращательном движении газа в приосевой зоне циклонной камеры. ИФЖ, т. 3, № 8, 1960.
9. Ткалич В. С., Ткалич Е. Ф. Винтовые движения в многокомпонентной магнитной гидродинамике. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1960.
10. Ткалич В. С. Волны конечной амплитуды в многокомпонентной проводящей среде. ЖЭТФ, стр. 73, т. 39, № 1(7), 1960.
11. Ткалич В. С. Исследование систем уравнений проводящей жидкости в двухпараметрическом стационарном случае. Сб. «Вопросы магнитной гидродинамики и динамики плазмы», стр. 191. Изд. АН ЛатвССР, Рига, 1959.
12. Ткалич В. С. Преобразование системы уравнений гидродинамического приближения плазмы. Изв. АН СССР. ОТН, Механика и машиностроение, № 5, 1959.
13. Gabor D. Plasma oscillations. Brit. J. Appl. Phys., vol. 2, № 8, 209, 1951.
14. Ткалич В. С., Салтанов Н. В. О волнах конечной амплитуды в неидеальной магнитной гидродинамика. ЖТФ, 1961, т. 31, вып. 10.
15. Файнберг Я. Б., Горбатенко М. Ф. Электромагнитные волны в плазме, находящейся в магнитном поле. ЖТФ, 549, т. 29, № 5, 1959.
16. Файнберг Я. Б. К нелинейной теории медленных волн в плазме. Атомная энергия, 447, т. 6, № 4, 1959.
17. Schumann W. O. Über den Einfluß der Querschnittverteilung der Elektronen dichte eines Längsmagnetisierten Plasmas in einem metallischen Hohlleiter auf die Ausbreitung elektrischer Wellen. Z. angew. Phys., Bd. 12, № 10, 442, 1960.