ПМТФ, № 6, 1961

ОБ УСЛОВИЯХ ЭВОЛЮЦИОННОСТИ МАГНИТОГИДРОДИНАМИЧЕСКИХ ТЕЧЕНИЙ

Р. В. Половин

(Харьков)

Исследуются ограничения, которые налагают условия эволюционности на возможные типы непрерывных магнитогидродинамических течений. Определены условия эволюционности косых магнитогидродинамических ударных волн, присоединенных к вершине обтекаемого угла.

§ 1. Непрерывные течения. Исходя из условий эволюционности, можно высказать определенные утверждения о возможных типах непрерывных одномерных магнитогидродинамических течений, в частности, течений в соплах. Такие течения рассматривались Реслером и Сирсом [1], [2], Павловым [3], Чекмаревым [4], Мак-Куном и Сирсом [5]. Под влиянием различных воздействий (изменение площади поперечного сечения, изменение магнитного поля, нагрев, вязкая или джоулева диссипация и др.) скорость среды может измениться от значения $\mathbf{v}_1$ на входе в сопло до некоторого конечного значения $\mathbf{v}_2$ на выходе из сопла. Не детализируя указанных воздействий, рассмотрим вопрос, о том, какие переходы из начального состояния $\mathbf{v}_1$ в конечное состояние $\mathbf{v}_2$ являются принципиально возможными, а какие — невозможными. При этом будем пользоваться только законами сохранения и условиями эволюционности [6-8].

Неэволюционность стационарного течения означает, что такое течение неустойчиво и под влиянием бесконечно малых возмущений в нем образуются ударные волны.

Как будет показано ниже, течение, в котором скорость среды не проходит ни через одну из фазовых скоростей магнитогидродинамических волн, является эволюционным.

Течение, в котором переход через фазовую скорость происходит с ускорением, является эволюционным, а с замедлением — неэволюционным. Будем исходить из:

закона сохранения массы

$$\{\rho v_x A\} = J \tag{1.1}$$

закона сохранения импульса

$$\left\{p + \rho v_x^2 + \frac{H_y^2}{8\pi}\right\} = R_x, \qquad \left\{\rho v_x v_y - \frac{H_x H_y}{4\pi}\right\} = R_y \tag{1.2}$$

закона сохранения энергии

$$\left\{\frac{\gamma p}{(\gamma-1)\rho} + \frac{v^2}{2} + \frac{H_y^2}{4\pi\rho} - \frac{H_x H_y v_y}{4\pi\rho v_x}\right\} = q \tag{1.3}$$

непрерывности поперечной компоненты электрического поля

$$\{H_x v_y - v_x H_y\} = 0 \tag{1.4}$$

непрерывности продольной компоненты магнитного поля

$$\{H_x A\} = 0 \qquad (1.5)$$

Здесь A означает площадь поперечного сечения, J — впрыснутая масса, $\mathbf{R}(R_x, R_y)$ — изменение импульса (вследствие реактивной силы, трения, совершения работы или впрыска газа со скоростью, отличной от скорости течения), q — изменение внутренней энергии (вследствие излучения, горения, ионизации, рекомбинации, нагрева, охлаждения, трения, совершения работы вязкой или джоулевой диссипации), γ — показатель адиабаты Пуассона, ось x направлена вдоль сопла, система координат выбрана таким образом, чтобы $H_z \equiv 0$, $v_z \equiv 0$. (Такое течение может быть осуществлено, например, в магнитной кольцевой ударной трубке [9], при этом ось x направлена вдоль оси трубки, ось y — в азимутальном направлении и ось z — по радиусу.)

При исследовании магнитогидродинамического сопла возможны два предельных случая:

1) Если магнитное число Рейнольдса

$$R_m \equiv lv / \nu_m \qquad (\nu_m \equiv c^2 / 4\pi\sigma)$$

где l — характерный размер, ν_m — магнитная вязкость) велико [3], то можно пренебречь джоулевой диссипацией.

При этом существуют три фазовые скорости распространения бесконечно малых возмущений: альфвеновская скорость V_x, скорости быстрой V_+ и медленной V_- магнитозвуковых волн

$$V_x \equiv \frac{H_x}{\sqrt{4\pi\rho}}, \qquad V_\pm = \left(\frac{U_A{}^2 + c^2 \pm \sqrt{(U_A{}^2 + c^2)^2 - 4c^2 U_A{}^2 \cos^2\theta^2}}{2}\right)^{1/2} \qquad (1.6)$$

$$\left(U_A \equiv \frac{H}{\sqrt{4\pi\rho}}\right)$$

(Здесь c — скорость звука, θ — угол между осью x и направлением магнитного поля.)

2) Если магнитное число Рейнольдса мало [1, 2, 4, 5], то можно пренебречь магнитным полем, индуцированным при движении плазмы. При этом изменение магнитного поля будет внешним воздействием и бесконечно малые возмущения распространяются с обычной скоростью звука.

В первом случае возможны следующие типы течений без прохождения через характерную фазовую скорость:

(1) «медленное» течение_ $v_x < V_-$
(2) «доальфвеновское» течение $V_- < v_x < V_x$
(3) «сверхальфвеновское» течение $V_x < v_x < V_+$
(4) «быстрое» течение $V_+ < v_x$

Во втором случае, как и в обычной гидродинамике, возможны два типа течений без прохождения через характерную скорость:

(1) дозвуковое течение $v_x < c$
(2) сверхзвуковое течение $v_x > c$

Применяя те же рассуждения, что и в обычной гидродинамике [10], можно показать, что непрерывный переход через характерную скорость с ускорением будет эволюционным, а с замедлением — неэволюционным. В частности, найденное Реслером и Сирсом [1] непрерывное течение, при котором происходит переход от сверхзвуковой и дозвуковой скорости ($R_m \ll 1$), является неэволюционным и поэтому неосуществимым.

Из изложенного следует также, что при непрерывном магнитогидродинамическом обтекании конечного профиля переход скорости среды через фазовую скорость малых возмущений возможен только при ускорении.

§ 2. Присоединенные разрывы. Косые магнитогидродинамические ударные волны, присоединенные к вершине обтекаемого угла, были исследованы М. Н. Когановым [11], М. И. Киселевым и Н. И. Колосницыным [12] и Кабанэ [13,14].

Для существования ударной волны недостаточно, чтобы на ней выполнялись законы сохранения и происходило возрастание энтропии. Необходимо, кроме того, чтобы выполнялись условия эволюционности [6, 8]

$$V_{1+} < v_{1n}, \qquad V_{2n} < v_{2n} < V_{2+} \tag{2.1}$$

или

$$V_{1-} < v_{1n} < V_{1n}, \qquad v_{2n} < V_{2-} \tag{2.2}$$

где $V_{\pm}$ означает фазовую скорость быстрой (знак плюс) или медленной (знак минус) магнитозвуковой волны, распространяющейся вдоль нормали к поверхности разрыва,

$$V_n \equiv H_n \,/\, \sqrt{4\pi\rho}$$

Индекс n означает проекцию на нормаль к поверхности разрыва, индекс 1 относится с области впереди разрыва, индекс 2 означает величины в области позади разрыва.

Исследование ударных поляр, на которых выполняются условия эволюционности (2.1), (2. 2) было произведено М. Н. Когановым [15].

Условия (2. 1), (2. 2) относятся к участку ударной волны, расположенному вдали от вершины угла.

Как показано ниже, условия эволюционности участка, расположенного в вершине угла, приводят к дополнительным ограничениям, которые суживают класс косых эволюционных ударных волн.

Переходя к исследованию условий эволюционности косых магнитогидродинамических ударных волн, заметим, что уравнение характеристического конуса, исходящего из точки $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$ в магнитогидродинамической среде, движущейся со скоростью (v_x, v_y), имеет вид

$$\frac{x}{t} = v_x + U_{\pm}(\theta)\cos(\theta + \alpha), \qquad \frac{y}{t} = v_y + U_{\pm}(\theta)\sin(\theta + \alpha) \tag{2.3}$$

Здесь θ — параметр, равный углу между векторами $\mathbf{H}(H_x, H_y)$ и $\mathbf{r}(x, y)$, отсчитываемый от вектора $\mathbf{H}$ к вектору $\mathbf{r}$ в положительном направлении; α — угол в плоскости (x, y) между осью x и вектором $\mathbf{H}$, отсчитываемый от оси x в положительном направлении; $U_{\pm}(\theta)$ — групповая скорость [1] волны [16] в направлении $\mathbf{r}$; знаку плюс у величины $U_{\pm}$ в формуле (2.3) соответствует «быстрый магнитозвуковой конус», знаку минус — «медленный магнитозвуковой конус».

Альфвеновским волнам соответствует характеристический конус, который вырождается в прямую

$$\frac{x}{t} = v_x + U_A\cos\alpha, \qquad \frac{y}{t} = v_x + U_A\sin\alpha \tag{2.4}$$

Энтропийным волнам соответствует характеристический конус, который также вырождается в прямую:

$$\frac{x}{t} = v_x, \qquad \frac{y}{t} = v_y \tag{2.5}$$

Произвольное возмущение магнитогидродинамических величин определяется семью параметрами

$$\delta v_x, \quad \delta v_y, \quad \delta v_z, \quad \delta p, \quad \delta s, \quad \delta H_y, \quad \delta H_z$$

---

[1] График групповой скорости в полярной системе координат будем называть групповой полярой.

Если ось x направлена вдоль направления распространения волны, то возмущение δH_x равно нулю.

Возмущение энтропии распространяется вдоль характеристики (2.5); вдоль характеристики (2.4) в данном направлении распространяется одно возмущение, соответствующее альфвеновской волне, вдоль быстрого магнитозвукового конуса (2.3) распространяются два возмущения, соответствующие быстрой магнитозвуковой волне, и, наконец, вдоль медленного магнитозвукового конуса (2.3) распространяются два возмущения, соответствующие медленной волне.

Рассмотрим сначала условия эволюционности участка магнитогидродинамической ударной волны, расположенного вдали от обтекаемого угла. Так как скорость ударной волны может изменяться, то на поверхности разрыва должны выполняться шесть независимых граничных условий [6]. Поэтому число исходящих возмущений по обе стороны разрыва должно равняться шести.

Если характеристический конус (2.3), соответствующий значениям магнитогидродинамических величин в области 2 позади разрыва, целиком расположен в области 2, то вдоль него распространяются два возмущения. Если же характеристический конус пересекает плоскость разрыва (в трехмерном пространстве $x\ y\ t$), то вдоль него распространяется одно возмущение [10].

Переход между этими двумя возможностями происходит, когда характеристический конус (2.3) касается плоскости разрыва. При этом расстояние от центра групповой поляры $U_+(\theta)$ до касательной, параллельной фронту разрыва, равно нормальной компоненте скорости среды. Так как групповая поляра является подэрой для фазовой поляры, то расстояние от центра до касательной к групповой поляре равно фазовой скорости в направлении, нормальном к касательной. Поэтому классификация волн на сходящиеся и расходящиеся может производиться по нормальной к разрыву компоненты фазовой скорости [1].

Таким образом, число расходящихся волн будет таким же, как и в одномерном случае, и условия эволюционности участка, расположенного вдали от вершины угла, определяются неравенствами (2.1) и (2.2).

Рассмотрим теперь участок, расположенный в вершине угла.

Если проводимость обтекаемой стенки конечна, то возмущения, распространяющиеся в магнитогидродинамической среде, вызовут появление электромагнитных волн в стенке.

Чтобы исключить такие волны, ограничимся случаем идеально проводящей стенки. При этом, если нормальная к поверхности стенки компонента магнитного поля будет отличной от нуля, то скорость среды у стенки обращается в нуль [18].

Ограничимся теми случаями, когда магнитное поле параллельно поверхности стенки.

При двумерном обтекании это соответствует двум возможностям:

1) магнитное поле параллельно ребру обтекаемого угла, т. е. перпендикулярно к скорости среды.

2) магнитное поле параллельно вектору скорости.

Применяя те же рассуждения, что в и обычной гидродинамике [10], получим, что в первом случае возможны лишь ударные волны «слабого» семейства, в которых скорость среды по обе стороны ударной волны больше скорости волны в направлении течения

$$v_1 > U_{1+} \equiv \sqrt{U_{1A}^2 + c_1^2}, \qquad v_2 > U_{2+} \tag{2.6}$$

[1] Это утверждение, в частности, объясняет, почему условия эволюционности ударной волны относительно малых возмущений, распространяющихся под углом к нормали, совпадают с условиями эволюционности относительно возмущений, распространяющихся вдоль нормали [17].

Во втором случае дополнительные условия эволюционности состоят в том, что должно выполняться одно из следующих трех условий:

$$(1) \qquad v_1 < \min(U_{1A},\ c_1), \qquad v_2 < \min(U_{2A},\ c_2) \tag{2.7}$$

$$(2) \qquad \min(U_{1A},\ c_1) < v_1 < \max(U_{1A},\ c_1)$$

$$\min(U_{2A},\ c_2) < v_2 < \max(U_{2A},\ c_2) \tag{2.8}$$

$$(3) \qquad \max(U_{1A},\ c_1) < v_1, \quad \max(U_{2A},\ c_2) < v_2 \tag{2.9}$$

Автор благодарит А. И. Ахиезера и Л. И. Седова за ценные дискуссии.

Поступила 30 VI 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Resler E. L., Sears W. R. Magneto-Gasdynamic Channel Flow. ZAMP, 1958, в. 9в, № 5/6.
2. Sears W. R. Magnetohydrodynamic effects in aerodynamic flows. ARS Journ., 1959, v. 29, № 6.
3. Павлов К. Б. Некоторые свойства стационарных течений в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1960, т. 39, вып. 8.
4. Чекмарев И. Б. Одномерное течение сжимаемого газа с конечной проводимостью при наличии поперечного магнитного поля. ПММ, 1960, т. XXIV, вып. 2.
5. McCune J. E., Sears W. R. On magnetohydrodynamic channel flow. J. Aero/Space Sci. 1960, v. 27, № 2.
6. Ахиезер А. И., Любарский Г. Я., Половин Р. В. Об устойчивости ударных волн в магнитной гидродинамике. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 3.
7. Гельфанд И. М. Некоторые задачи теории квазилинейных уравнений. УМН, 1959, т. XIV, вып. 2.
8. Половин Р. В. Ударные волны в магнитной гидродинамике. УФН, 1960, т. LXXII, вып. 1.
9. Patrick R. M. High-speed shock waves in a magnetic annular shock tube. Phys. Fluids, 1959, v. 2, № 6.
10. Половин Р. В. Об условиях эволюционности стационарных течений. ЖЭТФ, 1961, т. 41, вып. 2.
11. Коган М. Н. Ударные волны в магнитной газодинамике. ПММ, 1959, т. XXIII, вып. 3.
12. Киселев М. И., Колосницын Н. И. К расчету наклонных ударных волн в магнитной газодинамике. ДАН СССР, 1960, т. 131, № 4.
13. Cabannes H. Sur les mouvements d'un fluide compressible doué de conductivité électrique. Compt. Rend., 1957, т. 245, № 17.
14. Cabannes H. Sur l'attachements des ondes de choc dans les écoulements a deux dimensions. Compt. Rend., 1960, т. 250, № 11.
15. Коган М. Н. Об ударных волнах в магнитной гидродинамике. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностреиние, 1960, № 3.
16. Lighthill M. J. Studies on magneto-hydrodynamic waves and other anisotropic wave motions. Phil. Trans. Roy. Soc. (London), 1960, vol. A252, № 1014.
17. Конторович В. М. О взаимодействии малых возмущений с разрывами в магнитной гидродинамике и об устойчивости ударных волн. ЖЭТФ, 1958, т. 35, вып. 5 (11).
18. Любарский Г. Я., Половин Р. В. Задача о поршне в магнитной гидродинамике. ДАН СССР, 1959, т. 128, № 4.