

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Г. И. Дудникова

(Новосибирск)

Численными методами исследованы нестационарные бесстолкновительные ударные волны в плазме, распространяющиеся под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю при наличии проводимости и электронной теплопроводности.

Явления, связанные с бесстолкновительными ударными волнами в разреженной плазме, исследовались экспериментально и теоретически, в том числе с привлечением методов численного моделирования на ЭВМ в работах [1-7]. Структура ударных волн определяется эффектами нелинейности, дисперсии и диссипации. Установлено существование критических чисел Маха M_* , при которых происходит качественное изменение этой структуры.

В работе [4] подробно изучены стационарные и в меньшей степени нестационарные волны сжатия в двухжидкостной плазме при наличии произвольно ориентированного магнитного поля без учета диссипации энергии, необходимой для формирования ударных волн, и теплопроводности. В работах [6,7] на основе анализа особых точек уравнений, описывающих структуру ударной волны, найдены критические параметры, при которых решение становится разрывным. Решения уравнений для структуры представлены в [7]. В [5] рассмотрена задача о распространении нестационарных ударных волн поперек магнитного поля с учетом проводимости и электронной теплопроводности, изучен изомагнитный скачок плотности при практически постоянном магнитном поле.

Данная работа посвящена исследованию с помощью численных методов в рамках двухжидкостного гидродинамического приближения структуры и критических параметров нестационарных ударных волн, распространяющихся в разреженной плазме под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю, при наличии дисперсии, проводимости и электронной теплопроводности.

Выберем ось x за направление распространения волны и пусть невозмущенное магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \{H_x, 0, H_z\}$ лежит в плоскости xz , составляя угол θ с осью z . Тогда исходная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) &= 0 \\ nm_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} \right) \\ nm_i \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right\} &= \frac{H_x}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ nm_i \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right\} &= \frac{H_x}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ uH_y - vH_x + \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{n} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{cH_x}{4\pi en} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi \sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ wH_x - uH_z + \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{n} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2}{4\pi \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{cH_x}{4\pi en} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} &= (\gamma - 1) \left\{ \frac{c^2}{16\pi^2 \varepsilon} \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right\} \\ H_x &= H_0 \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ — макроскопическая скорость плазмы, $\sigma = ne^2 / m_e \nu$ — проводимость, κ_1 — электронная теплопроводность, γ — показатель адиабаты, ν — эффективная частота столкновений частиц плазмы с флуктуациями электромагнитного поля, которая далее предполагается постоянной, $p = nT$ — электронное давление (ионы считаются холодными).

Для решения нестационарной задачи запишем систему уравнений (1) в безразмерных переменных и лагранжевых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_y^2 + H_z^2 + \bar{p}), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \sin \theta \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \sin \theta \frac{\partial H_z}{\partial \xi}, \quad u = \frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad V = \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (VH_y) &= \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial^2 H_y}{\partial \xi^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} \frac{1}{V\beta} + \frac{\partial^3 H_y}{\partial \tau \partial \xi^2} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (VH_z) &= \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} - \sin \theta \frac{\partial^2 H_y}{\partial \xi^2} \frac{1}{V\beta} + \frac{\partial^3 H_z}{\partial \tau \partial \xi^2} \\ V \frac{\partial p}{\partial \tau} + p \gamma \frac{\partial V}{\partial \tau} &= 2(\gamma - 1) \left\{ \left(\frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \chi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{V^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right\} \\ \left(\beta &= \frac{m_e}{m_i}, \quad \omega_* = \frac{eH_0}{V m_e m_i c}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}, \right. \\ \left. V_A &= \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n e m_i}}, \quad \kappa = \frac{\nu}{\omega_*}, \quad \chi = \frac{\kappa_1}{n} \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь компоненты магнитного поля $H_{y,z}$, давление p , эйлера и лагранжева координаты x, ξ , время τ , компоненты скорости u, v, w , удельный объем V измеряются в единицах $H_0, H_0^2 / 8\pi, c / \omega_0, \omega_*^{-1}, V_A, n_0$ соответственно, ω_* — гибридная частота, V_A — альфвеновская скорость, величина χ считается постоянной.

Предполагая, что в начальный момент времени однородная холодная плазма с $p_0 \ll H_0^2 / 8\pi$ и плотностью n_0 занимает область $0 \leq x \leq x_{\max}$ ($0 \leq \xi \leq \xi_{\max}$), на левой границе которой магнитное поле нарастает с течением времени по определенному закону, запишем начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} x(\xi, 0) &= \xi, \quad V(\xi, 0) = 1, \quad H_z(\xi, 0) = \cos \theta \\ H_y(\xi, 0) &= p(\xi, 0) = u(\xi, 0) = v(\xi, 0) = w(\xi, 0) = T(\xi, 0) = 0 \quad (3) \\ H_z(0, \tau) &= 1 + A(1 - e^{-\omega\tau}), \end{aligned}$$

$$p(0, \tau) = \frac{\partial T}{\partial \xi}(0, \tau) = 0$$

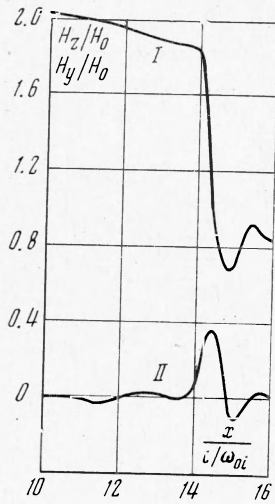
$$\frac{\partial H_y}{\partial \xi}(\xi_{\max}, \tau) = \frac{\partial H_z}{\partial \xi}(\xi_{\max}, \tau) = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial \xi}(\xi_{\max}, \tau) = 0 \quad (4)$$

где ω — частота внешнего поля в единицах ω_* , A — амплитуда внешнего поля в единицах H_0 .

Конечно-разностный аналог дифференциальной задачи (2) — (4) был реализован на ЭВМ БЭСМ-6.

Рассмотрим результаты, полученные для докритических чисел Маха ($M < M_*$).

Как показано в [5], при $M < 2.5$ ударная волна, распространяющаяся поперек магнитного поля ($\theta = 0$), является квазистационарной и учет теплопроводности приводит к незначительному увеличению ширины фронта. В данной работе основное внимание уделяется изучению распространения волн под углом к невозмущенному полю (косые волны при $\theta \neq 0$, $\theta \neq 90^\circ$) и вдоль невозмущенного поля (продольные волны при $\theta = 90^\circ$).



Фиг. 1

Рассмотрим случай $\sqrt{\beta} \ll \theta < \pi/2$. В соответствии с законом дисперсии для косых волн (см., например, [8]), профиль ударной волны имеет уходящий вперед осцилляционный цуг (или предшественник). Типичные квазистационарные профили поперечных компонент магнитного поля ($I - H_z$, $II - H_y$) для косой ударной волны представлены на фиг. 1. Пространственный масштаб осцилляций зависит от угла θ и по порядку величины оценивается по формуле $\delta \sim c\theta / \omega_{0i}$. Полная ширина фронта, включая цуг, зависит от скорости волны, угла θ и величины диссипации и оценивается по формуле $\Delta \sim V_A M \theta^2 / \nu \beta$ [2]. Расчеты режима $A = 2$, $\kappa = 8$ дают для углов $\theta = 30, 45, 60^\circ$ значения $\delta = (0.8, 1.2, 1.8) c / \omega_{0i}$, $\Delta = (3.5, 6, 9.5) c / \omega_{0i}$ соответственно (ω_{0i} — плазменная ионная частота). Между компонентами магнитного поля существует сдвиг фаз, величина

которого определяется по формуле $\text{tg } \varphi \sim M\theta (1 - \theta^2/M^2) \kappa$. Так, для случая $M = 1.3$, $\theta = 30^\circ$, $\kappa = 8$ сдвиг фаз $\varphi \approx 70^\circ$. В области фронта профиль магнитного поля опережает профиль плотности на расстояние

$$L \sim c^2 / 4\pi\sigma V_A (M - 1) < c\theta / \omega_{0i}$$

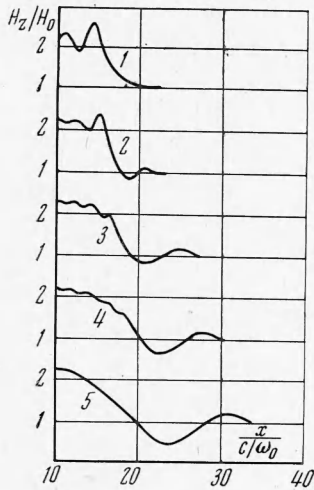
в соответствии с резистивным механизмом диссипации во фронте ударной волны [2]. Например, расчеты режима $A = 2$, $\theta = 30^\circ$, $\kappa = 8$ дают $L \approx 0.2 c / \omega_{0i}$. Увеличение эффективной частоты столкновений ν (или $\kappa = \nu / \omega_*$) изменяет характер профиля ударной волны от осцилляционного к монотонному. Осцилляции исчезают, когда дисперсионный размер $c\theta / \omega_{0i}$ становится сравнимым с диссипативным размером $c^2 / (4\pi\sigma V_A M)$. Так, в случае $A = 2$, $\theta = 30^\circ$ при $\kappa = 16$ ($\nu = 16\omega_*$) профиль ударной волны является монотонным.

По мере уменьшения угла θ структура ударных волн изменяется. При $\theta \gg \beta^{1/2}$ дисперсия связана с анизотропией плазмы (ионная дисперсия), при $\theta \ll \beta^{1/2}$ дисперсия обуславливается инерцией электронов (электронная дисперсия). Законы дисперсии в этих случаях резко различны (рост ω / k с увеличением волнового числа k в первом случае и падение ω / k — во втором). Поэтому в указанных предельных случаях структура ударных волн разная (уходящие вперед или отстающие осцилляции). Когда величина угла θ приближается к значению $\theta = \beta^{1/2}$, то ударная волна имеет промежуточную структуру: осцилляции с характерным размером $\delta \sim c / \omega_0$ за фронтом и осцилляции с $\delta \sim c / \omega_{0i}$ перед фронтом.

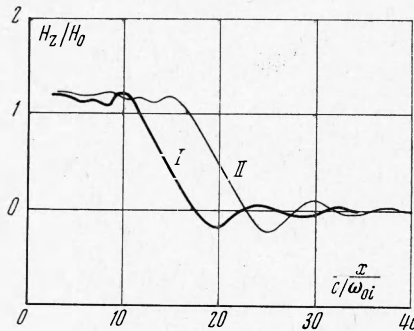
На фиг. 2 представлена трансформация профиля магнитного поля в ударной волне при изменении угла θ между плоскостью фронта и направлением

невозмущенного магнитного поля H_0 . Кривые, отмеченные цифрами 1, 2, 3, 4, 5, соответствуют значениям $\theta = 0, 2.5, 4, 5, 6^\circ$. С уменьшением угла θ происходит развитие осцилляционной структуры за фронтом волны и уменьшение амплитуды передних осцилляций. При $M \approx 2$ двойная структура фронта наблюдается при значениях углов θ , лежащих в интервале $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, где $\theta_{\min} \approx 2^\circ$, $\theta_{\max} \approx 6^\circ$. Увеличение числа Маха приводит к росту θ_{\min} . Так, при $M \approx 2.3$ $\theta_{\min} \approx 2.5^\circ$.

Рассмотрим распространение ударных волн вдоль поля H_0 ($\theta = 90^\circ$) при сравнительно низких частотах $\omega \sim \omega_i = eH_0 / m_i c$ (волны «включения»). Амплитуда и скорость ударных волн включения ограничены сверху значениями $\approx 1.5H_0$ и $\approx 2V_A$ [9]. Типичный профиль магнитного поля ударной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля H_0 , представлен на фиг. 3. Кривая I соответствует моменту времени $t = 13 \omega_i^{-1}$, кривая II — $t = 17 \omega_i^{-1}$ ($M \approx 1.2$, $\omega = 0.5 \omega_i$, $A = 1.3$). Эта волна представляет собой суперпозицию двух волн в соответствии с тем, что в линейном приближении при частотах $\omega \sim \omega_i$ вдоль магнитного поля могут распространяться две волны с правой и левой круговой поляризацией. Законы дис-



Фиг. 2



Фиг. 3

персии для них разные, поэтому профиль магнитного поля в волне включения содержит осцилляции как за фронтом волны, так и в его передней части. Более быстрая волна, имеющая резонанс при $\omega = eH_0 / m_e c$, опережает медленную волну (с резонансом при $\omega = eH_0 / m_i c$), и происходит пространственное разделение профиля ударной волны на две различающиеся по характеру осцилляций части. Уменьшение частоты внешнего поля ω , например до значений порядка $0.1 \omega_i$, приводит к сближению фазовых скоростей обеих волн, и указанного разделения не происходит.

Рассмотрим далее случай больших чисел Маха. Увеличение числа Маха приводит к перестройке структуры ударной волны из-за усиления влияния эффектов нелинейности и нестационарности. В случае поперечного распространения с учетом теплопроводности при числах Маха $2.8 \lesssim M \lesssim 3.3$ имеет место квазистационарный изомагнитный скачок плотности, а при числах Маха $M \gtrsim 3.4$ наблюдалось разрушение структуры ударных волн [5]. Расчеты показывают, что для косых и продольных волн при достаточно больших числах Маха происходит непрерывное увеличение (при отсутствии теплопроводности) крутизны профилей плотности и x -компоненты скорости частиц. Решение приближается к разрывному в этих функциях. Значения критического числа Маха M_* в зависи-

мости от угла θ приведены ниже:

θ°	0	30	45	60	85	90
M_*	2.8	2.6	2.3	2.1	1.65	1.6

Таким образом, с ростом угла θ между плоскостью фронта и направлением невозмущенного магнитного поля H_0 значение критического числа Маха M_* , при котором наблюдается разрушение ударных волн, уменьшается.

Учет электронной теплопроводности приводит для косых волн к появлению изомагнитного скачка, ширина которого определяется величиной коэффициента теплопроводности. В этом случае критические числа Маха M_* при фиксированном θ возрастают по сравнению со случаем, когда теплопроводностью можно пренебречь.

Например, расчеты с $\chi = 0.1$ и для углов $\theta = 0$ и 30° дают $M_* = 3.5$ и 2.9 соответственно.

Анализ результатов расчетов для случая $\theta = 90^\circ$ показывает, что увеличение числа Маха ударной волны включения приводит к непрерывному падению амплитуды магнитного поля и к резкому возрастанию газодинамического давления. Критические параметры ударной волны включения, при которых происходит опрокидывание, получены в режиме с амплитудой внешнего поля на границе плазмы $A = 1.7$ и равны $M_* \approx 1.6$, $H_* \approx 1.0$.

Рассмотрим влияние нагрева электронов за фронтом волны. В соответствии с экспериментальными результатами [3,10] и теоретическими предсказаниями [1] о преимущественном нагреве электронной компоненты плазмы во

фронте бесстолкновительной ударной волны в рассматриваемой задаче (2) — (4) учитывалось только электронное давление, т. е. предполагалось, что в течение всего процесса $T_e \gg T_i$.

На фиг. 4 приведено решение нестационарной задачи (2) — (4) для угла $\theta = 30^\circ$ (кривая II), экспериментальная зависимость давления за фронтом ударной волны от амплитуды магнитного поля, полученная на установке УН-4 в ИЯФ СО АН СССР [10] (кривая III), и адиабата Гюгонио (кривая I), характеризующая зависимость полного газодинамического давления $p = p_e + p_i$ от амплитуды ударной волны. Из графика видно, что электронное давление $p_e = nT_e$ близко к значению полного давления плазмы. Данный факт подтверждает теоретические предсказания о преимущественном нагреве электронной компоненты плазмы при $M < M_*$, $H < H_*$. Аналогичные выводы можно сделать и в случае ударных волн, распространяющихся поперек невозмущенного магнитного поля [3].

Автор благодарит Ю. А. Березина за ценные дискуссии.

Поступила 24 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

- Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, М., Атомиздат, 1964.
- Galeev A. A., Sagdeev R. Z. Lectures on the non-linear theory of plasma. Trieste, 1966.
- Куртмуллаев Р. Х., Пильский В. И., Семенов В. Н. Исследование электронного нагрева за фронтом ударной волны в плазме зондовым методом. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, вып. 5.

-
4. Morton K. W. Finite amplitude compression waves in a collision-free plasma. *Phys. Fluids*, 1964, vol. 7 No. 11.
 5. Березин Ю. А., Дудникова Г. И. Влияние теплопроводности на структуру и критические параметры ударных волн в плазме. *ПМТФ*, 1972, № 2.
 6. Woods L. C. On the structure of collisionless magnetoplasma shock waves at super — critical alfvén — mach numbers. *J. Plasma Phys.*, 1969, vol. 3, No. 3.
 7. Березин Ю. А. Изучение структуры ударных волн в плазме. В сб. «Численные методы механики сплошной среды», т. 1, № 6, Новосибирск, 1970.
 8. Шафранов В. Д. Электромагнитные волны в плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 3, М., Атомиздат, 1963.
 9. Лонгмайр К. Физика плазмы. М., Атомиздат, 1966.
 10. Eseevich V. G., Eskov A. G., Kurtmullaev R. Kh., Malutin A. I. On the mechanism of plasma heating by collisionless shocks. Third European Conference on Controlled Fusion and Plasma Physics, Utrecht, 1969.
-