

НЕСТАЦИОНАРНЫЕ УДАРНЫЕ ВОЛНЫ В РАЗРЕЖЕННОЙ ПЛАЗМЕ

Г. И. Дудникова

(Новосибирск)

Численными методами исследованы нестационарные бесстолкновительные ударные волны в плазме, распространяющиеся под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю при наличии проводимости и электронной теплопроводности.

Явления, связанные с бесстолкновительными ударными волнами в разреженной плазме, исследовались экспериментально и теоретически, в том числе с привлечением методов численного моделирования на ЭВМ в работах [1-7]. Структура ударных волн определяется эффектами нелинейности, дисперсии и диссипации. Установлено существование критических чисел Маха M_* , при которых происходит качественное изменение этой структуры.

В работе [4] подробно изучены стационарные и в меньшей степени нестационарные волны сжатия в двухжидкостной плазме при наличии произвольно ориентированного магнитного поля без учета диссипации энергии, необходимой для формирования ударных волн, и теплопроводности. В работах [6,7] на основе анализа особых точек уравнений, описывающих структуру ударной волны, найдены критические параметры, при которых решение становится разрывным. Решения уравнений для структуры представлены в [7]. В [5] рассмотрена задача о распространении нестационарных ударных волн поперек магнитного поля с учетом проводимости и электронной теплопроводности, изучен изомагнитный скачок плотности при практически постоянном магнитном поле.

Данная работа посвящена исследованию с помощью численных методов в рамках двухжидкостного гидродинамического приближения структуры и критических параметров нестационарных ударных волн, распространяющихся в разреженной плазме под произвольным углом к невозмущенному магнитному полю, при наличии дисперсии, проводимости и электронной теплопроводности.

Выберем ось x за направление распространения волны и пусть невозмущенное магнитное поле $\mathbf{H}_0 = \{H_x, 0, H_z\}$ лежит в плоскости xz , составляя угол θ с осью z . Тогда исходная система уравнений может быть записана в виде

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(nu) &= 0 \\ nm_i \left\{ \frac{\partial u}{\partial t} + u \frac{\partial u}{\partial x} \right\} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left(p + \frac{H_y^2 + H_z^2}{8\pi} \right) \\ nm_i \left\{ \frac{\partial v}{\partial t} + u \frac{\partial v}{\partial x} \right\} &= \frac{H_x}{4\pi} \frac{\partial H_y}{\partial x} \\ nm_i \left\{ \frac{\partial w}{\partial t} + u \frac{\partial w}{\partial x} \right\} &= \frac{H_x}{4\pi} \frac{\partial H_z}{\partial x} \\ \frac{\partial H_y}{\partial t} &= - \frac{\partial}{\partial x} \left\{ uH_y - vH_x + \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{n} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{cH_x}{4\pi en} \frac{\partial H_z}{\partial x} + \frac{c^2}{4\pi \sigma} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} \end{aligned} \quad (1)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial H_z}{\partial t} &= \frac{\partial}{\partial x} \left\{ wH_x - uH_z + \frac{m_e c^2}{4\pi e^2} \left(\frac{\partial}{\partial t} + u \frac{\partial}{\partial x} \right) \left(\frac{1}{n} \frac{\partial H_z}{\partial x} \right) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{c^2}{4\pi \varepsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x} - \frac{cH_x}{4\pi en} \frac{\partial H_y}{\partial x} \right\} \\ \frac{\partial p}{\partial t} + u \frac{\partial p}{\partial x} + \gamma p \frac{\partial u}{\partial x} &= (\gamma - 1) \left\{ \frac{c^2}{16\pi^2 \varepsilon} \left[\left(\frac{\partial H_y}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_z}{\partial x} \right)^2 \right] + \frac{\partial}{\partial x} \left(\kappa_1 \frac{\partial T}{\partial x} \right) \right\} \\ H_x &= H_0 \sin \theta \end{aligned}$$

Здесь $\mathbf{u} = \{u, v, w\}$ — макроскопическая скорость плазмы, $\sigma = ne^2 / m_e \nu$ — проводимость, κ_1 — электронная теплопроводность, γ — показатель адиабаты, ν — эффективная частота столкновений частиц плазмы с флуктуациями электромагнитного поля, которая далее предполагается постоянной, $p = nT$ — электронное давление (ионы считаются холодными).

Для решения нестационарной задачи запишем систему уравнений (1) в безразмерных переменных и лагранжевых координатах

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial \tau} &= -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_y^2 + H_z^2 + \bar{p}), \quad \frac{\partial v}{\partial \tau} = \sin \theta \frac{\partial H_y}{\partial \xi} \\ \frac{\partial w}{\partial \tau} &= \sin \theta \frac{\partial H_z}{\partial \xi}, \quad u = \frac{\partial x}{\partial \tau}, \quad V = \frac{\partial x}{\partial \xi} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (VH_y) &= \sin \theta \frac{\partial v}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial^2 H_y}{\partial \xi^2} + \sin \theta \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} \frac{1}{V\beta} + \frac{\partial^3 H_y}{\partial \tau \partial \xi^2} \\ \frac{\partial}{\partial \tau} (VH_z) &= \sin \theta \frac{\partial w}{\partial \xi} + \kappa \frac{\partial^2 H_z}{\partial \xi^2} - \sin \theta \frac{\partial^2 H_y}{\partial \xi^2} \frac{1}{V\beta} + \frac{\partial^3 H_z}{\partial \tau \partial \xi^2} \\ V \frac{\partial p}{\partial \tau} + p \gamma \frac{\partial V}{\partial \tau} &= 2(\gamma - 1) \left\{ \left(\frac{\partial H_z}{\partial \xi} \right)^2 + \left(\frac{\partial H_y}{\partial \xi} \right)^2 + \frac{1}{2} \chi \frac{\partial}{\partial \xi} \left(\frac{1}{V^2} \frac{\partial T}{\partial \xi} \right) \right\} \\ \left(\beta &= \frac{m_e}{m_i}, \quad \omega_* = \frac{eH_0}{V m_e m_i c}, \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{4\pi n e^2}{m_e}}, \right. \\ V_A &= \frac{H_0}{\sqrt{4\pi n e m_i}}, \quad \kappa = \frac{\nu}{\omega_*}, \quad \chi = \frac{\kappa_1}{n} \left. \right) \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь компоненты магнитного поля $H_{y,z}$, давление p , эйлера и лагранжева координаты x, ξ , время τ , компоненты скорости u, v, w , удельный объем V измеряются в единицах $H_0, H_0^2 / 8\pi, c / \omega_0, \omega_*^{-1}, V_A, n_0$ соответственно, ω_* — гибридная частота, V_A — альфвеновская скорость, величина χ считается постоянной.

Предполагая, что в начальный момент времени однородная холодная плазма с $p_0 \ll H_0^2 / 8\pi$ и плотностью n_0 занимает область $0 \leq x \leq x_{\max}$ ($0 \leq \xi \leq \xi_{\max}$), на левой границе которой магнитное поле нарастает с течением времени по определенному закону, запишем начальные и граничные условия

$$\begin{aligned} x(\xi, 0) &= \xi, \quad V(\xi, 0) = 1, \quad H_z(\xi, 0) = \cos \theta \\ H_y(\xi, 0) &= p(\xi, 0) = u(\xi, 0) = v(\xi, 0) = w(\xi, 0) = T(\xi, 0) = 0 \quad (3) \\ H_z(0, \tau) &= 1 + A(1 - e^{-\omega\tau}), \end{aligned}$$

$$p(0, \tau) = \frac{\partial T}{\partial \xi}(0, \tau) = 0$$

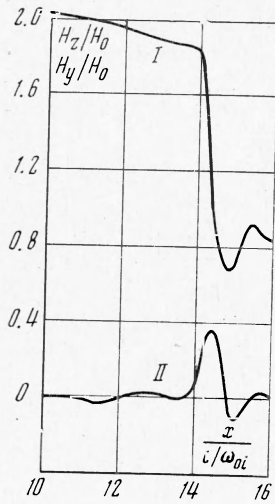
$$\frac{\partial H_y}{\partial \xi}(\xi_{\max}, \tau) = \frac{\partial H_z}{\partial \xi}(\xi_{\max}, \tau) = \frac{\partial(u, v, w)}{\partial \xi}(\xi_{\max}, \tau) = 0 \quad (4)$$

где ω — частота внешнего поля в единицах ω_* , A — амплитуда внешнего поля в единицах H_0 .

Конечно-разностный аналог дифференциальной задачи (2) — (4) был реализован на ЭВМ БЭСМ-6.

Рассмотрим результаты, полученные для докритических чисел Маха ($M < M_*$).

Как показано в [5], при $M < 2.5$ ударная волна, распространяющаяся поперек магнитного поля ($\theta = 0$), является квазистационарной и учет теплопроводности приводит к незначительному увеличению ширины фронта. В данной работе основное внимание уделяется изучению распространения волн под углом к невозмущенному полю (косые волны при $\theta \neq 0$, $\theta \neq 90^\circ$) и вдоль невозмущенного поля (продольные волны при $\theta = 90^\circ$).



Фиг. 1

Рассмотрим случай $\sqrt{\beta} \ll \theta < \pi/2$. В соответствии с законом дисперсии для косых волн (см., например, [8]), профиль ударной волны имеет уходящий вперед осцилляционный пук (или предшественик). Типичные квазистационарные профили поперечных компонент магнитного поля ($I - H_z$, $II - H_y$) для косой ударной волны представлены на фиг. 1. Пространственный масштаб осцилляций зависит от угла θ и по порядку величины оценивается по формуле $\delta \sim c\theta / \omega_{0i}$. Полная ширина фронта, включая пук, зависит от скорости волны, угла θ и величины диссипации и оценивается по формуле $\Delta \sim V_A M \theta^2 / \nu \beta$ [2]. Расчеты режима $A = 2$, $\kappa = 8$ дают для углов $\theta = 30, 45, 60^\circ$ значения $\delta = (0.8, 1.2, 1.8) c / \omega_{0i}$, $\Delta = (3.5, 6, 9.5) c / \omega_{0i}$ соответственно (ω_{0i} — плазменная ионная частота). Между компонентами магнитного поля существует сдвиг фаз, величина

которого определяется по формуле $\text{tg } \varphi \sim M\theta (1 - \theta^2/M^2) \kappa$. Так, для случая $M = 1.3$, $\theta = 30^\circ$, $\kappa = 8$ сдвиг фаз $\varphi \approx 70^\circ$. В области фронта профиль магнитного поля опережает профиль плотности на расстояние

$$L \sim c^2 / 4\pi\sigma V_A (M - 1) < c\theta / \omega_{0i}$$

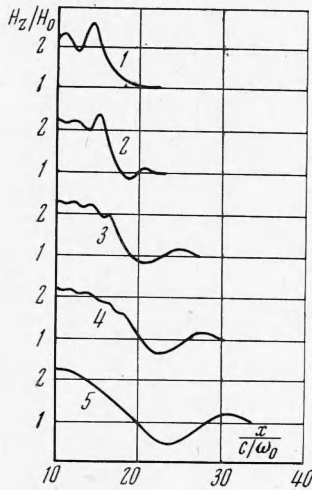
в соответствии с резистивным механизмом диссипации во фронте ударной волны [2]. Например, расчеты режима $A = 2$, $\theta = 30^\circ$, $\kappa = 8$ дают $L \approx 0.2 c / \omega_{0i}$. Увеличение эффективной частоты столкновений ν (или $\kappa = \nu / \omega_*$) изменяет характер профиля ударной волны от осцилляторного к монотонному. Осцилляции исчезают, когда дисперсионный размер $c\theta / \omega_{0i}$ становится сравнимым с диссипативным размером $c^2 / (4\pi\sigma V_A M)$. Так, в случае $A = 2$, $\theta = 30^\circ$ при $\kappa = 16$ ($\nu = 16\omega_*$) профиль ударной волны является монотонным.

По мере уменьшения угла θ структура ударных волн изменяется. При $\theta \gg \beta^{1/2}$ дисперсия связана с анизотропией плазмы (ионная дисперсия), при $\theta \ll \beta^{1/2}$ дисперсия обуславливается инерцией электронов (электронная дисперсия). Законы дисперсии в этих случаях резко различны (рост ω / k с увеличением волнового числа k в первом случае и падение ω / k — во втором). Поэтому в указанных предельных случаях структура ударных волн разная (уходящие вперед или отстающие осцилляции). Когда величина угла θ приближается к значению $\theta = \beta^{1/2}$, то ударная волна имеет промежуточную структуру: осцилляции с характерным размером $\delta \sim c / \omega_0$ за фронтом и осцилляции с $\delta \sim c / \omega_{0i}$ перед фронтом.

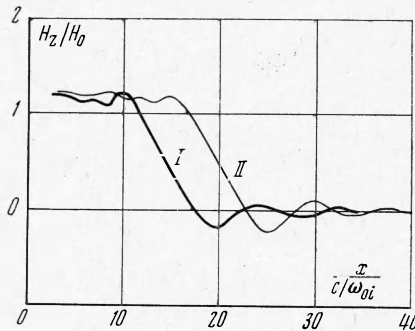
На фиг. 2 представлена трансформация профиля магнитного поля в ударной волне при изменении угла θ между плоскостью фронта и направлением

невозмущенного магнитного поля H_0 . Кривые, отмеченные цифрами 1, 2, 3, 4, 5, соответствуют значениям $\theta = 0, 2.5, 4, 5, 6^\circ$. С уменьшением угла θ происходит развитие осцилляционной структуры за фронтом волны и уменьшение амплитуды передних осцилляций. При $M \approx 2$ двойная структура фронта наблюдается при значениях углов θ , лежащих в интервале $\theta_{\min} \leq \theta \leq \theta_{\max}$, где $\theta_{\min} \approx 2^\circ$, $\theta_{\max} \approx 6^\circ$. Увеличение числа Маха приводит к росту θ_{\min} . Так, при $M \approx 2.3$ $\theta_{\min} \approx 2.5^\circ$.

Рассмотрим распространение ударных волн вдоль поля H_0 ($\theta = 90^\circ$) при сравнительно низких частотах $\omega \sim \omega_i = eH_0 / m_i c$ (волны «включения»). Амплитуда и скорость ударных волн включения ограничены сверху значениями $\approx 1.5H_0$ и $\approx 2V_A$ [9]. Типичный профиль магнитного поля ударной волны, распространяющейся вдоль магнитного поля H_0 , представлен на фиг. 3. Кривая I соответствует моменту времени $t = 13 \omega_i^{-1}$, кривая II — $t = 17 \omega_i^{-1}$ ($M \approx 1.2$, $\omega = 0.5\omega_i$, $A = 1.3$). Эта волна представляет собой суперпозицию двух волн в соответствии с тем, что в линейном приближении при частотах $\omega \sim \omega_i$ вдоль магнитного поля могут распространяться две волны с правой и левой круговой поляризацией. Законы дис-



Фиг. 2



Фиг. 3

персии для них разные, поэтому профиль магнитного поля в волне включения содержит осцилляции как за фронтом волны, так и в его передней части. Более быстрая волна, имеющая резонанс при $\omega = eH_0 / m_e c$, опережает медленную волну (с резонансом при $\omega = eH_0 / m_i c$), и происходит пространственное разделение профиля ударной волны на две различающиеся по характеру осцилляций части. Уменьшение частоты внешнего поля ω , например до значений порядка $0.1\omega_i$, приводит к сближению фазовых скоростей обеих волн, и указанного разделения не происходит.

Рассмотрим далее случай больших чисел Маха. Увеличение числа Маха приводит к перестройке структуры ударной волны из-за усиления влияния эффектов нелинейности и нестационарности. В случае поперечного распространения с учетом теплопроводности при числах Маха $2.8 \lesssim M \lesssim 3.3$ имеет место квазистационарный изомагнитный скачок плотности, а при числах Маха $M \gtrsim 3.4$ наблюдалось разрушение структуры ударных волн [5]. Расчеты показывают, что для косых и продольных волн при достаточно больших числах Маха происходит непрерывное увеличение (при отсутствии теплопроводности) крутизны профилей плотности и x -компоненты скорости частиц. Решение приближается к разрывному в этих функциях. Значения критического числа Маха M_* в зависи-

мости от угла θ приведены ниже:

θ°	0	30	45	60	85	90
M_*	2.8	2.6	2.3	2.1	1.65	1.6

Таким образом, с ростом угла θ между плоскостью фронта и направлением невозмущенного магнитного поля H_0 значение критического числа Маха M_* , при котором наблюдается разрушение ударных волн, уменьшается.

Учет электронной теплопроводности приводит для косых волн к появлению изомагнитного скачка, ширина которого определяется величиной коэффициента теплопроводности. В этом случае критические числа Маха M_* при фиксированном θ возрастают по сравнению со случаем, когда теплопроводностью можно пренебречь.

Например, расчеты с $\chi = 0.1$ и для углов $\theta = 0$ и 30° дают $M_* = 3.5$ и 2.9 соответственно.

Анализ результатов расчетов для случая $\theta = 90^\circ$ показывает, что увеличение числа Маха ударной волны включения приводит к непрерывному падению амплитуды магнитного поля и к резкому возрастанию газодинамического давления. Критические параметры ударной волны включения, при которых происходит опрокидывание, получены в режиме с амплитудой внешнего поля на границе плазмы $A = 1.7$ и равны $M_* \approx 1.6$, $H_* \approx 1.0$.

Рассмотрим влияние нагрева электронов за фронтом волны. В соответствии с экспериментальными результатами [3,10] и теоретическими предсказаниями [1] о преимущественном нагреве электронной компоненты плазмы во

фронте бесстолкновительной ударной волны в рассматриваемой задаче (2) — (4) учитывалось только электронное давление, т. е. предполагалось, что в течение всего процесса $T_e \gg T_i$.

На фиг. 4 приведено решение нестационарной задачи (2) — (4) для угла $\theta = 30^\circ$ (кривая II), экспериментальная зависимость давления за фронтом ударной волны от амплитуды магнитного поля, полученная на установке УН-4 в ИЯФ СО АН СССР [10] (кривая III), и адиабата Гюгонио (кривая I), характеризующая зависимость полного газодинамического давления $p = p_e + p_i$ от амплитуды ударной волны. Из графика видно, что электронное давление $p_e = nT_e$ близко к значению полного давления плазмы. Данный факт подтверждает теоретические предсказания о преимущественном нагреве электронной компоненты плазмы при $M < M_*$, $H < H_*$. Аналогичные выводы можно сделать и в случае ударных волн, распространяющихся поперек невозмущенного магнитного поля [3].

Автор благодарит Ю. А. Березина за ценные дискуссии.

Поступила 24 X 1972

ЛИТЕРАТУРА

1. Сагдеев Р. З. Коллективные процессы и ударные волны в разреженной плазме. В сб. «Вопросы теории плазмы», вып. 4, М., Атомиздат, 1964.
2. Galeev A. A., Sagdeev R. Z. Lectures on the non-linear theory of plasma. Trieste, 1966.
3. Куртмуллаев Р. Х., Пильский В. И., Семенов В. Н. Исследование электронного нагрева за фронтом ударной волны в плазме зондовым методом. Ж. техн. физ., 1970, т. 40, вып. 5.

