

О ДВИЖЕНИИ ЧАСТИЦЫ В ВИХРЕВОЙ КАМЕРЕ

М. А. Гольдштик, В. Н. Сорокин

(Новосибирск)

Рассмотрим газовый поток типа вихревого стока в пространстве между двумя параллельными плоскостями, перпендикулярными оси вращения и отстоящими одна от другой на расстоянии h .

Пусть в этот поток введена сферическая частица диаметра d . Если частица не взаимодействует с плоскостями, то в стационарном режиме, вращаясь вместе с потоком, она будет двигаться по круговой орбите, радиус которой находится из уравнения баланса сил, действующих на частицу в радиальном направлении

$$\frac{1}{6} \pi d^3 \rho_1 \frac{v_\varphi^2}{r} = \xi \frac{\pi d^2 \rho v_r^2}{4} \quad (1)$$

Соотношение (1) выражает тот факт, что центробежная сила уравновешивается силой радиального сопротивления. Здесь v_r и v_φ — радиальная и тангенциальная компоненты вектора скорости потока; ρ , ρ_1 — плотности газа и частицы; ξ — коэффициент сопротивления частицы. Для вихревого стока несжимаемой жидкости

$$v_\varphi = \frac{\Gamma}{2\pi r}, \quad v_r = -\frac{Q}{2\pi r}$$

С учетом этого из уравнения (1) для радиуса равновесной орбиты находим

$$r = \frac{4}{3\xi} \frac{\rho_1}{\rho} \left(\frac{\Gamma}{Q} \right)^2 d \quad (2)$$

Здесь Γ , Q — циркуляция и расход на единицу длины вихревого стока.

Экспериментальное изучение движения частицы в вихревой камере не подтверждает соотношения (2), при этом обнаруживаются два характерных свойства такого движения. Во-первых, в стационарном режиме частица не вращается вместе с потоком, а сильно отстает от него, во-вторых, частица интенсивно взаимодействует со стенками камеры, совершая многократные, более или менее периодически повторяющиеся удары об обе стенки. Очевидно, что оба эти факта связаны между собой, а именно отставание частицы от потока обусловлено потерей орбитального момента количества движения частицы при ее ударах о стенки, причем условие стационарности режима состоит в том, что указанная потеря восполняется закручивающим действием потока. Отметим, что при достаточно большой скорости потока скорость частицы не зависит от ориентации камеры в поле силы тяжести, поэтому последняя в предлагаемом ниже расчете учитываться не будет.

Результатом удара частицы о стенку будет не только потеря нормальной и касательной составляющих первоначального импульса, но и приобретение частицей угловой скорости ω , вследствие чего к силам, действующим на частицу, прибавляется поперечная сила Магнуса. Величину силы Магнуса можно приближенно определить из следующих соображений.

Пусть шар радиуса a , вращающийся с угловой скоростью ω , обтекается потоком со скоростью V , направленной перпендикулярно оси вращения. На расстоянии z от центра шара выделим слой толщины dz , перпендикулярный оси вращения. В духе теории крыла конечного размаха примем гипотезу «плоских сечений», т. е. допустим, что картина течения около выделенного слоя не отличается от плоского обтекания круга с циркуляцией $\Gamma = 2\pi\omega(a^2 - z^2)$. Поперечная сила dF , действующая на слой dz , вычислится по формуле Жуковского $dF = \rho v \Gamma dz$ ($\rho v \Gamma$ — сила на единицу длины бесконечного цилиндра). Для полной силы F найдем

$$F = 2\rho v \int_0^a \Gamma dz = 2 \frac{4}{3} \pi a^3 \rho \omega v = 2m \frac{\rho}{\rho_1} \omega v$$

Здесь m — масса частицы.

Приведенные выкладки не учитывают вторичных течений от экватора к полюсам, возникающих около вращающейся сферы [1], поэтому полученное выражение должно давать несколько завышенные значения поперечной силы. Однако экспериментальная проверка данной формулы [2] показывает, что для быстро вращающихся мелких частиц поправку можно не вводить.

Учитывая направление силы Магнуса, можно окончательно написать

$$F = 2m \frac{\rho}{\rho_1} [\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{u}] \quad (\mathbf{u} = \mathbf{w} - \mathbf{v}) \quad (3)$$

Здесь \mathbf{u} — вектор относительной скорости частицы, \mathbf{w} — вектор абсолютной скорости частицы. С учетом поперечной силы, уравнение движения частицы, подчиняющейся квадратичному закону сопротивления, имеет вид

$$\frac{d\mathbf{w}}{dt} = 2 \frac{\rho}{\rho_1} [\boldsymbol{\omega}, \mathbf{u}] - \frac{3}{4} \frac{\xi}{d} \frac{\rho}{\rho_1} |\mathbf{u}| \mathbf{u} \quad (4)$$

$$|\mathbf{u}| = \sqrt{(w_r - v_r)^2 + (w_\varphi - v_\varphi)^2 + (w_z - v_z)^2}$$

причем $w_r = v_r = 0$. Величину $|\mathbf{u}|$ будем считать постоянной. В случае малого отставания частицы от потока $|\mathbf{u}| \approx |v_r|$, в случае, когда

$$w_\varphi \ll v_\varphi, \quad |\mathbf{u}| = \sqrt{v_r^2 + v_\varphi^2}$$

Схематизируя задачу, развернем цилиндрическую поверхность, в которой движется частица, в плоскость, т. е. рассмотрим плоское движение частицы между двумя параллельными плоскостями под действием поступательного потока со скоростью $v = v_\varphi$.

Известным оправданием такого приближения может служить то обстоятельство, что при ударе о стенку частицы, движущейся по цилиндрической поверхности, она приобретает угловую скорость ω , направленную радиально.

При этом, согласно (3), поперечная сила не приобретает радиальной компоненты. Допущение о постоянстве скорости v поперек потока предполагает достаточно большое значение соответствующего числа Рейнольдса, когда относительная толщина торцевых пограничных слоев мала. Проектируя уравнение (4) на оси координат, получаем

$$\begin{aligned} \frac{du_x}{d\tau} &= u_y - \lambda u_x, & \frac{du_y}{d\tau} &= -u_x - \lambda u_y \\ \tau &= \frac{t}{\kappa}, & \frac{1}{\kappa} &= 2 \frac{\rho}{\rho_1} \omega, & \lambda &= \frac{3}{8} \frac{\xi}{d} \frac{|\mathbf{u}|}{\omega} \end{aligned} \quad (5)$$

(Для удобства здесь у величины ω изменен знак, так что ω считается положительным, когда частица катится по горизонтальной плоскости слева направо.)

Решение системы (5) имеет вид

$$W_x = v + e^{-\lambda\tau} (A \cos \tau + B \sin \tau), \quad W_y = e^{-\lambda\tau} (B \cos \tau - A \sin \tau) \quad (6)$$

Здесь A, B — произвольные постоянные.

Для выявления характера действия силы Магнуса рассмотрим следующий пример. Пусть сила сопротивления отсутствует, так что $\lambda = 0$. Пусть далее $w_x = w_y = x = y = 0$ при $\tau = 0$ и вторая плоскость отсутствует. В этом случае $B = 0, A = v$ и

$$\begin{aligned} w_x &= v (1 - \cos \tau), & w_y &= v \sin \tau \\ x &= \kappa v (\tau - \sin \tau), & y &= \kappa v (1 - \cos \tau) \end{aligned}$$

Два последних соотношения представляют собой параметрические уравнения циклоиды. Под действием силы Магнуса частица движется сначала вертикально вверх, а затем поворачивает вправо. При $\tau = \pi$ она достигает наивысшей точки $x = 2\kappa v$, в которой $w_x = 2v$, а затем опускается по траектории, симметричной участку подъема. На каждом шаге циклоиды сила Магнуса дважды меняет знак: при $\tau = 1/2 \pi$ и $3/2 \pi$, т. е. в те моменты времени, когда $w_x = v$. В промежутке $1/2 \pi < \tau < 3/2 \pi$ частица движется быстрее потока, и поэтому сила Магнуса направлена вниз. Средняя горизонтальная скорость частицы за период $\langle w_x \rangle = v$, несмотря на отсутствие сопротивления. Явление удара частицы о плоскость можно интерпретировать как результат действия импульсивной силы с импульсом I . Имеют место следующие соотношения:

$$m \Delta w_x = I_x, \quad m \Delta w_y = I_y, \quad J \Delta \omega = -1/2 dI_x \quad (7)$$

Здесь $\Delta w = w^+ - w^-$, где индексами плюс и минус обозначены соответственно величины после и до удара; $J = 0.1 m d^2$ — момент инерции шара. Из первого и последнего соотношений (7) следует:

$$\Delta w_x = -1/5 d \Delta \omega \quad (8)$$

Система (7) содержит пять неизвестных: $w_x^+, w_y^+, \omega^+, I_x, I_y$. Поэтому ее необходимо дополнить еще двумя соотношениями.

В качестве первого соотношения используем формулу Ньютона

$$w_y^+ = -\mu w_y^- \quad (9)$$

Здесь μ — «коэффициент восстановления» Ньютона.

Для получения недостающего соотношения заметим, что при ударе с трением могут реализоваться две возможности: во-первых, в процессе удара скольжение частицы о поверхность прекращается и тогда

$$w_x^+ = 1/2 \omega d \quad (10)$$

во-вторых, к моменту отлета частица продолжает скользить. В этом случае используется закон сухого трения: $I_x = f I_y$, где f — коэффициент трения. Осуществление той или иной возможности зависит от свойств поверхностей и от угла подлета частицы к плоскости. В дальнейшем рассматривается лишь случай реализации первой возможности и используется формула (10).

Поставим задачу о разыскании установившегося движения частицы в потоке между двумя плоскостями, причем под установившимся движением будем понимать периодическое движение частицы.

Рассмотрим движение частицы между ударами. Пусть в момент отскока частицы от нижней плоскости $\tau = 0$, $w_x = w_x^0$, $w_y = w_y^0$. У соответствующих величин, относящихся к моменту удара частицы о верхнюю плоскость, индексы опустим.

Угловую скорость частицы ω в процессе ее полета будем полагать неизменной. Условия периодичности требуют выполнения следующих равенств:

$$w_x^0 = w_x^+, \quad w_y^0 = w_y^+, \quad w_x = w_x^-, \quad w_y = -w_y^-, \quad \Delta\omega = 2\omega$$

Применяя эти равенства к соотношениям (8) — (10), находим

$$w_x^0 = 5/9 w_x, \quad w_y^0 = \mu w_y, \quad 1/2 \omega d = w_x^0 \quad (11)$$

Соотношения (11) показывают, как должна возрасти скорость частицы на участке ее свободного полета под действием силы Магнуса, чтобы этот рост компенсировал потери при ударе и был возможен периодический режим.

Условия (11) позволяют определить константы A и B в соотношениях (6). Имеем

$$A = -\frac{4v}{\Delta} (1 - \mu e^{-\lambda\tau} \cos \tau), \quad B = \frac{4v}{\Delta} \mu e^{-\lambda\tau} \sin \tau \quad (12)$$

$$\Delta = 9 + 5\mu e^{-2\lambda\tau} - (9 + 5\mu) e^{-\lambda\tau} \cos \tau$$

Для определения τ зададим расстояние между плоскостями.

Интегрируя второе из соотношений (6), с учетом (12) находим

$$h = \frac{4\lambda v}{(1 + \lambda^2) \Delta} [1 + \mu e^{-2\lambda\tau} - (1 + \mu) e^{-\lambda\tau} \cos \tau - \lambda (1 - \mu) e^{-\lambda\tau} \sin \tau] \quad (13)$$

Последнее из соотношений (14) дает

$$\frac{\omega d}{2} = \frac{5v}{\Delta} [1 + \mu e^{-2\lambda\tau} - (1 + \mu) e^{-\lambda\tau} \cos \tau] \quad (14)$$

Из уравнений (13) и (14) должны быть определены неизвестные величины ω и τ .

Вычислим среднюю скорость поступательного движения частицы $\langle w_x \rangle = x/\lambda\tau$.

Путем интегрирования первого из соотношений (6) получаем

$$\frac{(1 + \lambda^2) \langle w_x \rangle}{v} = 1 + \lambda^2 - \frac{4}{\tau \Delta} \{ \lambda [1 + \mu e^{-2\lambda\tau} - (1 + \mu) e^{-\lambda\tau} \cos \tau] + (1 - \mu) e^{-\lambda\tau} \sin \tau \}$$

Используя формулы (13) и (14), это соотношение можно преобразовать к виду

$$\langle w_x \rangle = v - \frac{2}{5} \frac{\omega d}{\lambda \tau} (1 - \alpha) \quad \left(\alpha = 5 \frac{\rho}{\rho_1} \frac{h}{d} \right) \quad (15)$$

Введем обозначение

$$\beta = 3/80 \xi |u| v \quad (16)$$

Тогда

$$\omega = 10 \beta v / \lambda d \quad (17)$$

и соотношениям (13), (14) можно придать вид

$$1 - \frac{\lambda (1 - \mu) e^{-\lambda\tau} \sin \tau}{1 + \mu e^{-2\lambda\tau} - (1 + \mu) e^{-\lambda\tau} \cos \tau} = d (1 + \lambda^2) \quad (18)$$

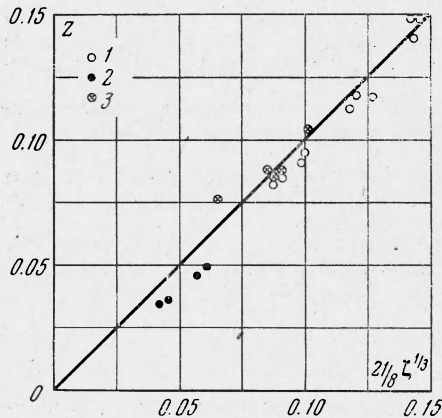
$$\lambda \frac{1 + \mu e^{-2\lambda\tau} - (1 + \mu) e^{-\lambda\tau} \cos \tau}{9 + 5\mu e^{-2\lambda\tau} - (9\mu + 5) e^{-\lambda\tau} \cos \tau} = \beta$$

Здесь неизвестные λ и τ . При помощи соотношений (13), (14) и (12) находим

$$B = w_y^0 = \frac{4\mu}{1 - \mu} \left[\frac{\omega d}{10\lambda} - \frac{(1 + \lambda^2) h}{4\lambda} \right] = \frac{2}{5} \frac{\mu}{1 - \mu} \frac{\omega d}{\lambda} [1 - \alpha (1 + \lambda^2)]$$

Для того, чтобы $w_y^\circ \geq 0$, необходимо иметь $\alpha \leq 1/(1 + \lambda^2)$. В случае равенства $w_y^\circ = w_y = 0$, $\tau = \pi$ (максимально возможное значение скорости частицы равно $\langle w_x \rangle = v(1 - 4\pi^{-1}\alpha\beta)$). При $\alpha > 1/(1 + \lambda^2)$ периодическое движение невозможно.

Найти точное решение системы (18) затруднительно, поэтому ограничимся приближенным решением, а именно положим



$$\langle w_x \rangle \approx \frac{w_x^\circ + w_x}{2},$$

$$\langle w_y \rangle = \frac{h}{\kappa\tau} \approx \frac{w_y^\circ + w_y}{2} \quad (19)$$

Использование формулы (19) при не слишком больших значениях α не вносит существенной погрешности, поскольку функции $x(\tau)$ и $y(\tau)$ монотонно возрастают при $\alpha < 1/(1 + \lambda^2)$. Подставляя (11) в (19), получаем

$$\langle w_x \rangle = \frac{7}{5} w_x^\circ, \quad \langle w_y \rangle = \frac{h}{\kappa\tau} = \frac{1 + \mu}{2\mu} w_y^\circ$$

$$\omega d = \frac{10}{7} \langle w_x \rangle,$$

$$\frac{h}{\kappa\tau} = \frac{1}{5} \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{\omega d}{\lambda} [1 - \alpha(1 + \lambda^2)]$$

Кроме того, используя (17), находим

$$\lambda = 7\beta v / \langle w_x \rangle$$

Подставляя значения ω , λ и τ в формулу (15), получаем кубическое уравнение

$$(1 - \alpha)^2 z^3 + \alpha [b - a(1 - \alpha)] z - \alpha b = 0$$

$$z = \frac{\langle w_x \rangle}{v}, \quad a = 49\beta^2, \quad b = \frac{7(1 - \mu)}{2(1 + \mu)} 49\beta^2 \quad (20)$$

Соотношение (20) удобно анализировать, если из него найти зависимость $\alpha(z)$. Несложные выкладки дают

$$\alpha = \frac{2z^3 + [b + (a - b)z] - \sqrt{[b + (a - b)z]^2 + 4b(1 - z)z^3}}{2(z^3 + az)} \quad (21)$$

Из соотношения (21) следует, что $\alpha(0) = 0$; $\alpha(1) = 1/(1 + a)$.

Для значений $\alpha \ll 1$ из уравнения (20) находим

$$Z = (\alpha b)^{1/3} = 21/8 (\zeta)^{1/3} \left(\zeta = \frac{\xi^2}{15} \frac{\rho}{\rho_1} \frac{1 - \mu}{1 + \mu} \frac{h}{d} \frac{u^2}{v^2} \right) \quad (22)$$

Это выражение теряет силу при значениях μ , близких к единице. При $\mu = 1$

$$Z = \left(\frac{a\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/2} = \frac{21}{80} \zeta \frac{|u|}{v} \left(\frac{\alpha}{1 - \alpha} \right)^{1/2}$$

Отметим, что соотношение (22) можно получить непосредственно из (11) и (6), если в последних положить $\sin \tau \approx \tau$, $\cos \tau = 1$, $e^{-\lambda\tau} \approx 1 - \lambda\tau$, что справедливо при $\tau \ll 1$. На фигуре показано сопоставление некоторых экспериментальных данных с расчетами по формуле (22). Опыты были проведены на вихревой камере диаметром около 300 мм.

На фигуре точке 1 соответствуют плексигласовые шарики диаметром 1 и 2 мм; точке 2 — стальной шарик диаметром 1 мм $\mu = 0.9$; $\alpha = 0.01$; точке 3 — плексигласовый шарик диаметром 3 мм, $\mu = 0.57$, $\alpha = 0.02$. Не вдаваясь здесь в особенности экспериментов, чему будет посвящена отдельная статья, можно констатировать вполне удовлетворительное согласие теории и опыта.

Поступила 27 XI 1967

ЛИТЕРАТУРА

1. Г о л ь д ш т и к М. А. Вторичные течения, возникающие около сферы при ее вращении в вязкой жидкости. Инж.-физ. ж., 1960, № 3.
2. Г о л ь д ш т и к М. А., Л е о н т ь е в А. К., П а л е е в И. И. Экспериментальное изучение движения твердых частиц в вихревой камере. Научн.-техн. информ. бюллетень Ленингр. Политехн. ин-та, 1960, № 2.