

8. Петухов Б. С., Поляков А. Ф. Экспериментальное исследование теплообмена при вязкостно-гравитационном течении жидкости в горизонтальной трубе.— ТВТ, 1967, т. 5, № 1.
9. Петухов Б. С., Поляков А. Ф., Стригин Б. К. Исследование теплообмена в трубах при вязкостно-гравитационном течении.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 1. М., «Энергия», 1968, с. 607.

УДК 532.529.2

ОБ ОДНОМ СЛУЧАЕ СМЕШАННОЙ КОНВЕКЦИИ

В. В. Попов

(Ленинград)

Пусть в горизонтальном слое под влиянием неравномерного нагрева сверху происходит конвекция и одновременно существует течение вдоль слоя, вызванное другими причинами (внешний поток). Предположим, что скорость этого потока находится в той же плоскости, что и скорости конвективных потоков, так что конвекция будет либо помогать частице двигаться вдоль слоя, либо препятствовать этому. Рассмотрим случай малоинтенсивной конвекции, который описывается линеаризованными уравнениями. При этом течение считается ползущим, а обратное влияние конвекции на температурное поле несущественным. Такой режим течения будет при малых числах Грасгофа и малых скоростях внешнего потока.

Уравнения в приближении Буссинеска, описывающие конвекцию при таких предположениях, в плоском стационарном случае в безразмерных переменных имеют вид

$$\Delta^2\psi = Gr \partial T/\partial x, \quad \Delta T = 0,$$

где ψ — функция тока; T — температура; Gr — число Грасгофа. За единицу длины принята высота слоя H , температуры — разность между максимальным и минимальным значениями температуры на границе, функции тока — ν (значение кинематического коэффициента вязкости).

Примем следующие граничные условия. Пусть сверху задано распределение температуры в виде

$$T(x, 1) = \sin kx.$$

Снизу слой теплоизолирован

$$(1) \quad \partial T/\partial y = 0.$$

Верхнюю границу слоя предположим свободной, причем деформацией границы, вызванной конвекцией, пренебрежем, а нижнюю будем считать твердой. Обозначив объем жидкости, протекающей в направлении оси x за единицу времени, через ψ_1 ($\psi_1 \geq 0$), имеем следующие граничные условия для функции тока:

$$\psi(x, 0) = (\partial\psi/\partial y)(x, 0) = 0;$$

$$(2) \quad \psi(x, 1) = \psi_1, \quad (\partial^2\psi/\partial y^2)(x, 1) = 0.$$

Ввиду линейности уравнений достаточно решить задачу для случая свободной конвекции и к полученному решению добавить член

$$(3/2)\psi_1(y^2 - y^3/3).$$

Последняя задача может быть решена точно [1, 2].

Для температуры получим

$$T = (\text{ch}ky/\text{ch}k)\sin kx.$$

Если искать функцию тока в виде

$$\psi = \psi_0(y) \cos kx,$$

то для ψ_0 будем иметь уравнение

$$(3) \quad (d^2/dy^2 - k^2)\psi_0 = \text{Gr} k \text{ch}ky/\text{ch} k.$$

Отсюда с учетом условий (2) при $\psi_1 = 0$ получим выражение для ψ_0 в виде

$$(4) \quad \psi_0(y) = \frac{\text{Gr}}{8k} \left[y^2 \frac{\text{ch} ky}{\text{ch} k} + e^{-ky} \frac{\text{ch} ky}{\text{sh} 2k} - \left(\frac{1}{2} - \frac{k \text{ch} k - \text{sh} k}{k \text{sh} 2k} \right) y \frac{\text{sh} ky}{\text{sh} k} + e^{-k} \frac{2 \text{sh} ky}{k \text{sh} 2k} \right].$$

Функция $\psi_0(y)$ обращается в нуль на концах интервала $[0, 1]$, положительна внутри него и имеет там единственный максимум. Полное выражение для функции тока с учетом внешнего потока имеет вид

$$(5) \quad \psi = \psi_0(y)\cos kx + (3/2)\psi_1(y^2 - y^3/3).$$

Рассмотрим случай малых волновых чисел $k \ll 1$, который отвечает медленным изменениям температуры вдоль горизонтали. При этом возникает возможность упростить аналитический вид функции $\psi_0(y)$. Разложим (4) в ряд по k и оставим член наименьшей степени. Этот же результат получается, если отбросить члены порядка k^2 и выше непосредственно в уравнении (3), т. е. решить уравнение

$$d^4\psi_0/dy^4 = \text{Gr} k,$$

что дает

$$(6) \quad \psi_0(y) = (\text{Gr}k/48)(2y^4 - 5y^3 + 3y^2).$$

Это решение назовем длинноволновым приближением для (4). Простой вид (6) позволяет решать вопрос о структуре течения с помощью элементарных вычислений.

Представим выражение (5) с учетом (6) в виде

$$\psi = (\text{Gr}k/48)y^2[(2y^2 - 5y + 3)\cos kx + \alpha(1-y/3)],$$

где $\alpha = 72\psi_1/\text{Gr} k$.

Ввиду периодичности функции тока достаточно рассмотреть область $-\pi/2 \leq kx \leq 3\pi/2$, далее картина будет повторяться. При $\alpha = 0$, т. е. в случае свободной конвекции в области $-\pi/2 < kx < \pi/2$, существует ячейка 1, центр которой имеет абсциссу $x = 0$. Здесь поток вращается против часовой стрелки. В области $\pi/2 < kx < 3\pi/2$ (ячейка 2) поток вращается по часовой стрелке, центр ячейки расположен на линии $kx = \pi$. При этом все линии тока замкнуты. В случае отсутствия конвекции ($\alpha = \infty$) все линии тока разомкнуты.

При каких значениях α в потоке возникают замкнутые структуры (застойные зоны), каковы их формы и взаимоотношения с внешним потоком?

Найдем положения центров ячеек, где жидкость покоится, т. е. $u = v = 0$. Пользуясь формулами

$$u = \partial\psi/\partial y, \quad v = -\partial\psi/\partial x,$$

а также выражением (5), можно показать, что и при наличии потока центры ячеек могут располагаться только на линиях $kx = 0, kx = \pi$, т. е. не смещаются по горизонтали. Для длинноволнового приближения имеем

$$u = (Grk/48)y[(8y^2 - 15y + 6)\cos kx + \alpha(2 - y)].$$

Ордината центра ячейки 1 определяется из уравнения

$$(7) \quad 8y^2 - (15 + \alpha)y + 6 + 2\alpha = 0.$$

Корень этого уравнения, соответствующий знаку минус перед радикалом, имеет вид

$$y_1 = (1/16)(15 + \alpha - \sqrt{33 - 34\alpha + \alpha^2}).$$

При $\alpha = 0$ $y_1 \approx 0,58$, с увеличением α y_1 увеличивается. При $\alpha = 1$ центр ячейки попадает на верхнюю границу, при $\alpha > 1$ значения y_1 лежат за пределами интервала $[0, 1]$. Значения второго корня уравнения (7) не попадают в этот интервал ни при каких α . Поскольку именно вокруг центра группируются замкнутые линии тока, попадание центра на границу означает прекращение существования ячейки. Если учесть, что значение α отражает соотношение интенсивностей внешнего и конвективного потоков, то описанное поведение корней уравнения (7) соответствует факту, что при достаточной интенсивности внешнего потока ячейка пропадает и вновь не возникает. Для ячейки 2 имеем

$$(8) \quad 8y^2 - (15 - \alpha)y + 6 - 2\alpha = 0;$$

$$y_2 = (1/16)(15 - \alpha - \sqrt{33 + 34\alpha + \alpha^2}).$$

Другой корень уравнения (8) опять не попадает в интервал $[0, 1]$. Центр ячейки 2 при $\alpha = 0$ также расположен на высоте $y_1 \approx 0,58$, но затем симметрия пропадает. Здесь с увеличением α центр движется вниз и достигает нижней границы при $\alpha = 3$. В интервале $1 < \alpha < 3$ существуют лишь ячейки типа 2.

Найдем уравнения сепаратрис — линий, отделяющих замкнутые линии тока от незамкнутых. Для ячейки 1 она дается уравнением

$$\psi_0 \cos kx + (3/2)\psi_1(y^2 - y^3/3) = \psi_1$$

и для длинноволнового приближения после некоторых упрощений

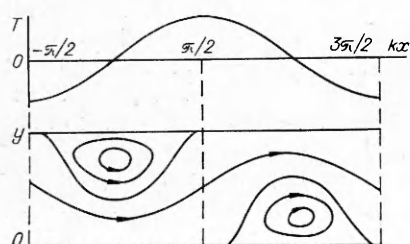
$$(9) \quad \cos kx = \alpha(y^2 - 2y - 2)/3y^2(2y - 3).$$

Для ячейки 2

$$\psi_0 \cos kx + (3/2)\psi_1(y^2 - y^3/3) = 0;$$

$$(10) \quad \cos kx = -\alpha(1 - y/3)/(2y^2 - 5y + 3).$$

Линии тока в интервале $0 < \psi < \psi_1$ не замкнуты и соответствуют



внешнему потоку. Структура течения схематически показана на фигуре (в верхней части показана температура на поверхности).

С увеличением α ячейки прижимаются к границам слоя, одновременно уменьшаясь в горизонтальных размерах. При критических значениях α сепаратрисы вырождаются в точки.

Итак, если интенсивность потока в слое меньше некоторого значения ($\alpha < 3$), в нем при неравномерном нагреве сверху возникают замкнутые конвективные структуры с движением по часовой стрелке, заключенные между линией (10) и нижней границей слоя. При $\alpha < 1$ возникают ячейки с движением против часовой стрелки, заключенные между линиями (9) и верхней границей. Внешний поток обтекает ячейки обоих типов.

Образование замкнутых структур (застойных зон) может существенно повлиять на массообмен в некоторых технологических процессах. Возможно, такие зоны существуют в стекловаренной печи [3].

Хотя рассмотренное относилось в основном к случаю $k \ll 1$, главные особенности картины течения сохраняются при произвольных k . Можно написать аналоги уравнений (7) — (10) для общего случая, которые нужно решать численно. При этом появится зависимость критических значений α от k .

Не является существенным выбор граничных значений для температуры на нижней границе (можно вместо (1) взять $T = \text{const}$ или условия третьего рода). Можно также взять верхнюю границу слоя твердой. Хотя вид функций при этом изменится, деление потока на зоны остается.

Опыт численного решения полных уравнений для случая свободной конвекции при нагреве сверху свидетельствует о том, что основные особенности структуры течения, определяемые формой температурной кривой на верхней границе, сохраняются в широком интервале чисел Грасгофа [2]. Есть основания ожидать того же самого и для рассмотренного случая смешанной конвекции.

Поступила 9 I 1976

ЛИТЕРАТУРА

1. Allen D. W. et al. Convection in the earth mantle.— In: Mantles of the Earth and Terrestrial Planets. L., Wiley, 1967.
2. Лыков А. В., Берковский Б. М. Конвекция и тепловые волны. М., «Энергия», 1974.
3. Mase H., Sasagawa Y. Mathematical modeling of glass tank furnace. Reports Res. Lab. Asahi Glass Co., 1973, vol. 23, N 2.

УДК 551.491—624.131

ПРОМАЧИВАНИЕ ПОЧВ И ГРУНТОВ ЗОНЫ АЭРАЦИИ

Н. Н. Веригин, С. В. Васильев

(Москва)

При поливах и промывках с.-х. земель посредством дождевания на поверхность почвы подается постоянный удельный расход воды q . Подобные условия имеются также при наполнении наливных водоемов и водохранилищ.

Рассмотрим промачивание почв и грунтов зоны аэрации при $q > k$ (k — коэффициент фильтрации грунта). В этом случае область промачивания грунта состоит из двух зон: полного насыщения, где давление $p > 0$ (гравитационная зона), и неполного насыщения, где давление $p < 0$ (капиллярная зона). При этом на поверхности грунта появляется слой воды,