ПМТФ, № 6, 1974

УДК 532.5

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ НЕСЖИМАЕМОЙ ЖИДКОСТИ, ПОДВЕРЖЕННОЙ ДЕЙСТВИЮ СИЛ ПОВЕРХНОСТНОГО НАТЯЖЕНИЯ. СЛУЧАЙ ДВУСВЯЗНОЙ РАВНОВЕСНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

В. Р. Орёл

(Москва)

Рассматривается устойчивость положения равновесия объема несжимаемой жидкости, ограниченного твердыми стенками сосуда и двумя равновесными поверхностями. Условия устойчивости выражаются через параметры, определяемые для каждой из поверхностей независимым решением задачи на собственные значения.

В качестве примера исследуется устойчивость произвольного объема несжимаемой жидкости, обе равновесные поверхности которого являются сферическими сегментами.

1. Пусть объем Q несжимаемой жидкости ограничен твердыми стенками сосуда S, двумя поверхностями раздела Σ_1, Σ_2 и находится в поле массовых сил с потенциалом П. Для простоты предположим, что Σ_1 и Σ_2 являются свободными поверхностями. Пусть σ_1, σ_2 — коэффициенты поверхностного натяжения на Σ_1 и Σ_2, а α_1, α_2 — разности коэффициентов поверхностного натяжения на границах твердое тело — жидкость и твердое тело — газ в окрестности контуров L_1 и L_2, по которым свободные поверхности пересекаются с S. Тогда потенциальная энергия системы принимает вид

$$U = \sigma \int_{\Sigma_1} d\Sigma_1 + \sigma_2 \int_{\Sigma_2} d\Sigma_2 + \alpha_1 \int_{L_1} dl_1 + \alpha_2 \int_{L_2} dl_2 + \int_{Q} \Pi dQ \tag{1.1}$$

Равенство нулю первой вариации потенциальной энергии дает необходимые условия равновесия [2, 3] объема Q. Далее считаем, что задача о нахождении равновесной формы решена. Для проверки устойчивости данного положения равновесия следует определить знак второй вариации потенциальной энергии. В соответствии с [4] необходимым условием устойчивости является неотрицательность второй вариации, а достаточным — неравенство

$$\delta^2 U > 0 \tag{1.2}$$

Воспользуемся выражением для второй вариации энергии равновесной поверхности Σ, полученным в работе [1]. Пусть $\mathbf{n}_i$ ($i = 1,2$) — внешняя по отношению к области Q единичная нормаль к поверхности Σ_i, а N_i (ξ) — малое отклонение точки $\xi \in \Sigma_i$ вдоль направления $\mathbf{n}_i$. Вторая вариация энергии U_i i-й поверхности имеет вид [1] квадратичного функционала относительно возмущения $N = N_i$ ($i = 1, 2$)

$$\delta^2 U_i / \sigma_i = \int_{\Sigma_i} (-\Delta_i N + \tau_i N)\, N\, d\Sigma_i + \int_{L_i} (\chi_i N + \partial N / \partial e_i)\, N\, dl_i \tag{1.3}$$

Здесь Δ_i — оператор Лапласа [5] на поверхности Σ_i, функции τ_i, χ_i равны [1]

$$(1.4)\qquad \tau_i(\xi) = \frac{1}{\sigma_i}\frac{\partial\Pi}{\partial n_i} - 4H_i^2(\xi) + 2K_i(\xi), \quad \xi \in \Sigma_i$$

$$(1.5)\qquad \chi_i(\xi) = \frac{\varkappa_i(\xi)\cos\gamma_i - \eta_i(\xi)}{\sin\gamma_i} \; (\sin\gamma_i \neq 0), \quad \xi \in L_i$$

где $H_i(\xi)$ — средняя кривизна, а $K_i(\xi)$ — гауссова кривизна [5] в точке $\xi \in \Sigma_i$; γ_i — краевой угол, $\cos\gamma_i = \alpha_i / \sigma_i$, $\varkappa_i(\xi)$ — кривизна нормального сечения поверхности Σ_i вдоль касательной к ней, направленной по внешней нормали к L_i (соответствующий орт обозначен через $\mathbf{e}_i$); $\eta_i(\xi)$ — аналогично определяемая кривизна нормального сечения поверхности S в точке $\xi \in L_i$.

На поверхностях Σ_i рассмотрим следующие задачи на собственные значения ($i = 1, 2$):

$$(1.6)\qquad \begin{aligned} &A_i u \equiv \sigma_i(-\Delta_i + \tau_i)\, u(\xi) = \lambda u(\xi), \quad \xi \in \Sigma_i \\ &\chi_i u(\xi) + \partial u / \partial e_i = 0, \quad \xi \in L_i \end{aligned}$$

Можно показать [6], что каждый оператор A_i ($i = 1, 2$) является самосопряженным на множестве D_i дважды непрерывно дифференцируемых на поверхности Σ_i функций, удовлетворяющих на контуре L_i краевому условию i-й задачи (1.6). Поэтому собственные значения каждой задачи (1.6) являются действительными числами, а собственные функции, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны на соответствующей поверхности Σ_i. При этом совокупность собственных значений i-й задачи (1.6) представляет собой [6] последовательность, ограниченную снизу и сходящуюся к $+\infty$.

Пусть φ_k, ν_k ($k = 1, 2, \ldots$) — собственные функции и собственные значения задачи (1.6) на Σ_1, а ψ_k, $\varkappa_k$ — на поверхности Σ_2. Без потери общности ортогональные системы функций $\{\varphi_k\}$, $\{\psi_k\}$ считаем нормированными, а последовательности собственных значений $\{\nu_k\}$, $\{\varkappa_k\}$ — расположенными в порядке возрастания

$$(1.7)\qquad \nu_1 \leqslant \nu_2 \leqslant \ldots, \; \varkappa_1 \leqslant \varkappa_2 \leqslant \ldots$$

Любые возмущения $N_1 \in D_1$, $N_2 \in D_2$ поверхностей Σ_1, Σ_2 представимы в виде сходящихся рядов

$$(1.8)\qquad N_1 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k, \quad N_2 = \sum_{k=1}^{\infty} b_k\psi_k$$

Вычисляя с помощью (1.3), (1.8) значения $\delta^2 U_1$, $\delta^2 U_2$, получим

$$(1.9)\qquad \delta^2 U = \delta^2 U_1 + \delta^2 U_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \nu_k a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} \varkappa_k b_k^2$$

Условие постоянства объема Q дает связь между последовательностями $\{a_k\}$, $\{b_k\}$

$$(1.10)\qquad \delta Q = \int_{\Sigma_1} N_1\, d\Sigma_1 + \int_{\Sigma_2} N_2\, d\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} v_k a_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k b_k = 0$$

$$(1.11)\qquad v_k = \int_{\Sigma_1} \varphi_k\, d\Sigma_1, \quad w_k = \int_{\Sigma_2} \psi_k\, d\Sigma_2$$

Возмущения N_1, N_2 считаем отличными от нуля. Это условие можно принять в виде

$$\int\limits_{\Sigma_1} N_1^2\, d\Sigma_1 + \int\limits_{\Sigma_2} N_2^2\, d\Sigma_2 = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2 = 1 \tag{1.12}$$

2. Задача исследования устойчивости свелась к проверке знака ряда (1.9) при условиях (1.10), (1.12). Пусть W — множество всех пар последовательностей $\{a_k, b_i\}$, удовлетворяющих соотношениям (1.10), (1.12). Для устойчивости системы, согласно (1.2), достаточно, чтобы выражение (1.9) было положительным на W. Если же существует такой набор чисел $\{a_k, b_i\} \in W$, при котором вариация $\delta^2 U$, определяемая по (1.9), отрицательна, то система неустойчива. Перечислим некоторые случаи, когда вопрос о знаке $\delta^2 U$ решается тривиально.

А. Если $\nu_1 > 0$, $\varkappa_1 > 0$, то вследствие (1.7) выражение (1.9) для $\delta^2 U$ положительно на W и система устойчива.

Б. Пусть $\nu_1 < 0$, $v_1 = 0$. Положим $a_1 = 1$, а все остальные a_k, b_i заменим нулями. Условия (1.10), (1.12) удовлетворены. Но при таком наборе коэффициентов

$$\delta^2 U = \nu_1 < 0$$

и система оказывается неустойчивой. Аналогичное утверждение справедливо для любого отрицательного собственного числа, если объем (1.11) соответствующей собственной функции равен нулю.

В. Система также будет неустойчивой, если среди чисел $\{\nu_k\}$, $\{\varkappa_i\}$ есть хотя бы два отрицательных (с отличными от нуля объемами (1.11)). Соответствующие этим двум собственным числам коэффициенты однозначно определяются из (1.10), (1.12), если положить остальные a_k, $b_i \equiv 0$, при этом выражение (1.9) оказывается отрицательным.

Остается рассмотреть случай, когда имеется только одно отрицательное собственное значение, отвечающее собственной функции, у которой коэффициент (1.11) отличен от нуля. Для определенности считаем, что отрицательным является число ν_1. Найдем минимум (1.9) на множестве W. Рассмотрим следующий вспомогательный функционал:

$$V = \delta^2 U + \lambda \Big(1 - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^2 - \sum_{k=1}^{\infty} b_k^2\Big) + \mu \Big(\sum_{k=1}^{\infty} v_k a_k + \sum_{k=1}^{\infty} w_k b_k\Big) \tag{2.1}$$

где λ, μ — множители Лагранжа.

Необходимые условия экстремума функционала V дают

$$a_k = -\mu v_k / (\nu_k - \lambda), \quad b_k = -\mu w_k / (\varkappa_k - \lambda) \tag{2.2}$$

Условие нормировки (1.12) позволяет с помощью (2.2) выразить множитель μ через λ

$$\mu(\lambda) = \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2}{(\nu_k - \lambda)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k^2}{(\varkappa_k - \lambda)^2}\right]^{-1/2} \tag{2.3}$$

Тогда

$$\delta^2 U = \mu^2(\lambda) \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\nu_k v_k^2}{(\nu_k - \lambda)^2} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varkappa_k w_k^2}{(\varkappa_k - \lambda)^2}\right] \tag{2.4}$$

Из условия сохранения объема (1.10) с учетом (2.3) получим уравнение для нахождения искомого значения параметра

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\nu_k - \lambda} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k^2}{\varkappa_k - \lambda} = 0 \tag{2.5}$$

Уравнение (2.5) имеет счетный набор корней $\{\lambda_j\}$, которые перемежаются с полюсами ν_k, $\varkappa_i$. Вследствие (1.7) можно утверждать, что

$$\lambda_1 \leqslant \lambda_2 \leqslant \lambda_3 \leqslant \ldots \tag{2.6}$$

Подставляя произвольный корень λ_j уравнения (2.5) в выражение (2.4) для второй вариации энергии и используя (2.3), нетрудно показать, что

$$\delta^2 U(\lambda_j) = \lambda_j \; (j = 1, 2, \ldots) \tag{2.7}$$

Поэтому из (2.7), (2.6) получим

$$\min_W \delta^2 U = \lambda_1 \tag{2.8}$$

Таким образом, ответ на вопрос об устойчивости системы дается либо одним из условий А, Б, В, либо определяется согласно (1.2) и (2.8) знаком первого корня λ_1 уравнения (2.5). В последнем случае необходимым условием устойчивости является неотрицательность, а достаточным — положительность первого корня уравнения (2.5).

Заметим, что если кинематические ограничения таковы, что на обеих поверхностях допустимы возмущения только нулевого объема, то (2.5) распадается на два уравнения

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{v_k^2}{\nu_k - \lambda} = 0, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{w_k^2}{\varkappa_k - \lambda} = 0 \tag{2.9}$$

Об устойчивости следует судить по знаку наименьшего из первых корней уравнений (2.9). Возможны случаи, когда первые корни (2.9) положительны, а первый корень уравнения (2.5) отрицателен, т. е. система, которая устойчива при поверхностных возмущениях нулевого объема, оказывается неустойчивой по отношению к произвольным возмущениям $N_1 \in D_1$, $N_2 \in D_2$, связанным условием (1.10) (см. п. 4).

Полученные результаты без труда обобщаются на случай несжимаемой жидкости с n равновесными поверхностями при $n > 2$.

3. Рассмотрим случай, когда обе свободные поверхности Σ_1, Σ_2, внешнее поле П и смачиваемая поверхность S (в окрестности контуров L_1, L_2) обладают осевой симметрией. Ось симметрии обозначим через Z. Введем цилиндрические координаты $\{r, z, \theta\}$. В качестве криволинейных координат на поверхностях Σ_1, Σ_2 возьмем угол θ и длину дуги s, отсчитываемую вдоль меридиана. Меридиан поверхности Σ_i зададим параметрически

$$r = r_i(s), \; z = z_i(s), \; 0 \leqslant s \leqslant c_i \; (i = 1,2)$$

где c_i — длина меридиана i-й поверхности.

Оператор Лапласа на Σ_i имеет вид

$$\Delta_i = \frac{1}{r_i} \frac{\partial}{\partial s}\left(r_i \frac{\partial}{\partial s}\right) + \frac{1}{r_i^2} \frac{\partial^2}{\partial \theta^2} \tag{3.1}$$

Собственные функции $\{\varphi_k(s, \theta)\}$, $\{\psi_k(s, \theta)\}$ задач (1.6) на осесимметричных поверхностях Σ_1, Σ_2 распадаются на следующие семейства ($n = 0, 1, \ldots, k = 1, 2, \ldots$):

$$\left\{\varphi_{nk}(s) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\theta\right\}, \quad \left\{\psi_{nk}(s) \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} n\theta\right\} \tag{3.2}$$

где $\{\varphi_{nk}\}$, $\{\psi_{nk}\}$ — наборы собственных функций одномерных задач $(i = 1, 2)$

$$\sigma_i\left(-\frac{1}{r_i}\frac{d}{ds}\left(r_i\frac{d}{ds}\right)+\frac{n^2}{r_i^2}+\tau_i\right)u=\lambda u \tag{3.3}$$

$$0 < s < c_i, \quad n = 0,\ 1,\ \ldots$$

$$[\chi_i u - u']_{s=0} = [\chi_i u + u']_{s=c_i} = 0$$

Функция τ_i определяется выражением (1.4), а параметр χ_i — выражением (1.5) или условием ограниченности решения, если соответствующий конец меридиана лежит на оси z.

Функциям φ_{nk}, ψ_{ni} (3.2) отвечают собственные числа $\nu_{nk}, \varkappa_{ni}$ задач (3.3), причем нумерация такова, что числа $\{\nu_{nk}\}$, $\{\varkappa_{ni}\}$ при любом фиксированном значении n $(=0, 1, \ldots)$ удовлетворяют соотношениям (1.7).

Очевидно, что при $n \geqslant 1$ все объемы v_{nk}, w_{ni} (1.11) равны нулю. Поэтому для неустойчивости системы достаточно (случай Б, п. 2), чтобы хотя бы одно из чисел ν_{nk}, $\varkappa_{ni}$ $(n \geqslant 1)$ было отрицательным. В работе [1] показано, что при $n > 1$ выполняются неравенства

$$\nu_{n1} > \nu_{11},\ \varkappa_{n1} > \varkappa_{11}$$

Отсюда с учетом (1.7) необходимые условия устойчивости по отношению к возмущениям с ненулевыми $(n \geqslant 1)$ гармониками в окружном направлении принимают вид

$$\nu_{11} \geqslant 0,\ \varkappa_{11} \geqslant 0 \tag{3.4}$$

Для исследования устойчивости по отношению к осесимметричным возмущениям $(n = 0)$ необходимо, вообще говоря, применить метод, использованный в п. 2.

Заметим, что в случае поля массовых сил с потенциалом $\Pi = Bz$ (B — постоянная, z — значение координаты по оси, параллельной полю) все сказанное выше справедливо также для поверхностей Σ_1, Σ_2, оси симметрии которых не совпадают, но параллельны направлению внешнего поля. В случае же невесомости оси симметрии могут быть ориентированы произвольно.

4. Рассмотрим модельную задачу. Пусть находящийся в условиях невесомости объем Q несжимаемой жидкости ограничен твердыми стенками S и имеет две свободные поверхности Σ_1, Σ_2. Считаем, что поверхность S осесимметрична в окрестности контуров L_1, L_2 (см. п. 1), а давления P_1, P_2 над поверхностями Σ_1, Σ_2 постоянны. Тогда Σ_1, Σ_2 имеют вид сферических сегментов. Обозначим через β_1, β_2 углы полураствора сегментов, а через R_1, R_2 — радиусы их оснований. Необходимое условие равновесия объема имеет вид

$$P_1 \pm \frac{\sigma_1 \sin\beta_1}{R_1} = P_2 \pm \frac{\sigma_2 \sin\beta_2}{R_2} \tag{4.1}$$

Знак плюс в (4.1) соответствует случаю, когда i-й мениск выпуклый по отношению к области Q (фиг. 1, *а*), а минус — когда i-й мениск вогнутый (фиг. 1, *б*).

Предполагая, что жидкость абсолютно смачивает поверхность S твердых стенок вплоть до контуров L_1, L_2, рассмотрим устойчивость произвольной равновесной системы двух сферических сегментов с параметрами $\{\sigma_i, R_i, \beta_i\}$.

Задача (3.3) на поверхности Σ_i имеет вид ($i = 1, 2$)

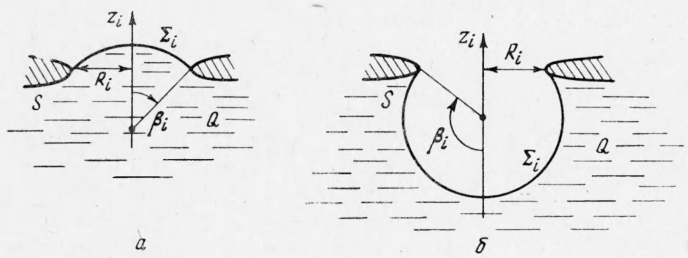
$$(4.2)\qquad -\frac{\sigma_i \sin^2\beta_i}{R_i^2}\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + \operatorname{ctg}\alpha \frac{d}{d\alpha} - \frac{n^2}{\sin^2\alpha} + 2\right) u = \lambda u$$

$$0 < \alpha < \beta_i,\ n = 0{,}1$$

$$|u(0)| < +\infty,\ u(\beta_i) = 0$$

Здесь краевое условие в точке β_i — следствие полной смачиваемости.

Заметим, что задача (4.2) имеет одинаковый вид как для выпуклых, так и для вогнутых менисков Σ_i, а объемы v_k, w_j (1.11) собственных функций задачи (4.2) входят в уравнение (2.5) во второй степени. Поэтому устойчивость системы $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ сферических сегментов не зависит от комбинации выпуклости — вогнутости менисков, а определяется только величинами $\{\sigma_i, R_i, \beta_i\}$.



Фиг. 1

Рассмотрим следующую вспомогательную задачу ($0 < \gamma < \pi$):

$$(4.3)\qquad -\sin^2\gamma\left(\frac{d^2}{d\alpha^2} + \operatorname{ctg}\alpha \frac{d}{d\alpha} - \frac{n^2}{\sin^2\alpha} + 2\right) u = \eta u$$

$$0 < \alpha < \gamma,\ n = 0{,}1\quad |u(0)| < +\infty,\ u(\gamma) = 0$$

При $\gamma = \beta_i$ и фиксированном n собственные значения $\lambda_{ij}(\beta_i)$ задач (4.2) и $\eta_j(\gamma)$ задачи (4.3) связаны соотношением ($i = 1, 2$, индекс n опущен)

$$(4.4)\qquad \lambda_{ij}(\beta_i) = \frac{\sigma_i}{R_i^2}\,\eta_j(\beta_i),\qquad j = 1, 2, \ldots$$

Проверим выполнение необходимых условий (3.4) устойчивости системы по отношению к ненулевым гармоникам ($n \geqslant 1$) возмущений. Первой собственной функцией задачи (4.3) при $n = 1$ является присоединенная функция Лежандра первого рода [7] $P_{q*}^1(\cos\alpha)$, где q_* — первый корень уравнения $P_q(\cos\gamma) = 0$. Вычисления при различных значениях угла $\gamma \in (0, \pi)$ показали, что $q_* > 1$. Поэтому первое собственное значение задачи (4.3) при $n = 1$

$$\eta_{11}(\gamma) = (q_*(q_* + 1) - 2)\sin^2\gamma$$

положительно при $0 \leqslant \gamma < \pi$. Учитывая (4.4), можно убедиться, что необходимые условия устойчивости (3.4) выполнены.

Рассмотрим влияние осесимметричных возмущений. В случае $n = 0$ собственными функциями задачи (4.3) являются функции Лежандра первого рода [7] $P_{\mu_k}(\cos\alpha)$, где μ_k — последовательные корни уравнения

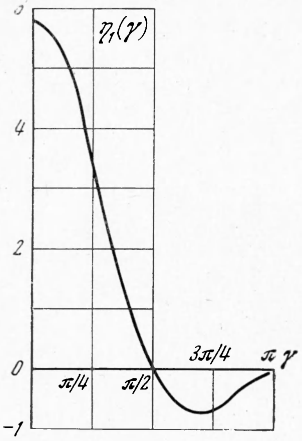
$$(4.5)\qquad P_\mu(\cos\gamma) = 0$$

Соответствующие собственные числа задачи (4.3)

$$(4.6)\qquad \eta_k(\gamma) = (\mu_k(\mu_k + 1) - 2)\sin^2\gamma$$

Предельным переходом можно показать, что при $\gamma = 0$ собственными функциями задачи (4.3) являются функции Бесселя $J_0(\xi_k r)$, где $r \in (0, 1)$, ξ_k — корни уравнения $J_0(\xi) = 0$ [8], причем $\eta_k(0) = \xi_k^2$. При $\gamma = \pi / 2$ собственные функции задачи (4.3) — полиномы Лежандра [7] $P_{2k-1}(\cos\alpha)$, т. е. $\eta_k(\pi / 2) = 2k(2k - 1) - 2$.

Для произвольных $\gamma \in (0, \pi)$ уравнение (4.5) можно решить с помощью ЭЦВМ. Вычисления показали, что собственное значение $\eta_1(\gamma)$ положительно при $0 \leqslant \gamma < \pi / 2$ и отрицательно при $\pi / 2 < \gamma < \pi$ (фиг. 2). Остальные собственные значения $\eta_k(\gamma)$ положительны при $0 \leqslant \gamma < \pi$.



Фиг. 2

В зависимости от величины углов полураствора β_1, β_2 сферических сегментов Σ_1, Σ_2 будем различать три типа равновесных форм: *I* — $\beta_1, \beta_2 < \pi / 2$, *II* — $\beta_1, \beta_2 > \pi / 2$, *III* — один из углов больше $\pi / 2$, а другой — меньше $\pi / 2$. Принимая во внимание соотношение (4.4) и случаи А, В из п. 2, можно из вида зависимости собственного числа η_1 от угла γ заключить, что равновесные формы типа *I* устойчивы, а равновесные формы типа *II* неустойчивы при любых значениях параметров σ_i, R_i $(i = 1, 2)$.

Остается исследовать устойчивость равновесных форм типа *III*. Обозначим через $g_k(\gamma)$ объем нормированной собственной функции задачи (4.3) при $n = 0$

$$g_k(\gamma) = \frac{1}{\sin\gamma}\int\limits_0^\gamma P_{\mu_k}(\cos\alpha)\sin\alpha\, d\alpha \left[\int\limits_0^\gamma (P_{\mu_k}(\cos\alpha))^2 \sin\alpha\, d\alpha\right]^{-1/2} \tag{4.7}$$

$$0 < \gamma < \pi, \quad k = 1, 2, \ldots$$

Пусть $v_k(\beta_1)$, $w_k(\beta_2)$ — объемы нормированных собственных функций задач (4.2) на сферических сегментах Σ_1, Σ_2 соответственно. Нетрудно показать, что

$$v_k(\beta_1) = R_1 g_k(\beta_1), \quad w_k(\beta_2) = R_2 g_k(\beta_2) \tag{4.8}$$

Для определенности везде далее считаем, что у равновесных форм типа *III* $\beta_1 > \pi / 2$, $\beta_2 < \pi / 2$. Зафиксируем некоторый угол β_1. Чтобы найти угол $\beta_2 < \pi / 2$, при котором происходит потеря устойчивости системы $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$, необходимо решить уравнение (2.5) при $\lambda = 0$. Это уравнение с учетом (4.4), (4.8) принимает вид

$$\sum_{k=1}^{m} \frac{g_k^2(\beta_1)}{\eta_k(\beta_1)} + \zeta \sum_{k=1}^{m} \frac{g_k^2(\beta_2)}{\eta_k(\beta_2)} = 0 \tag{4.9}$$

где m — достаточно большое целое число, а

$$\zeta = \sigma_1 R_2^4 / \sigma_2 R_1^4 \tag{4.10}$$

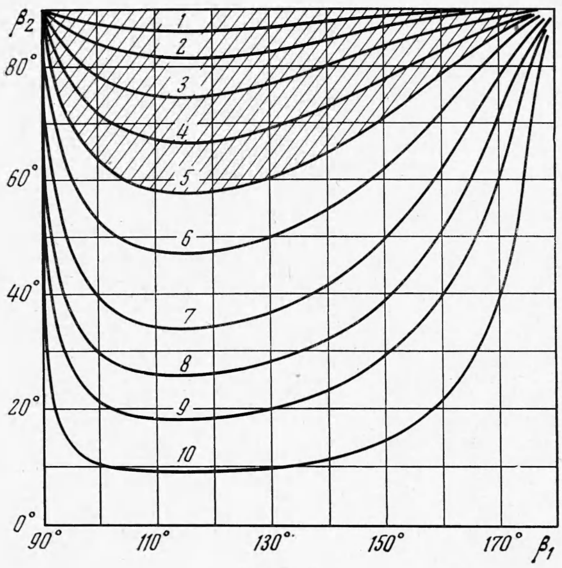
Пусть найден корень уравнения (4.9). Обозначим его через $\beta_2^\zeta(\beta_1)$. Поскольку при любом $\gamma \in (0, \pi / 2)$ выполняются неравенства [7]

$$0 < \eta_1(\gamma) < \eta_2(\gamma) < \ldots, \quad g_1^2(\gamma) < g_2^2(\gamma) < \ldots \tag{4.11}$$

то из вида уравнений (2.5), (4.9) следует, что система менисков $\{\Sigma_1, \Sigma_2\}$ при данном ζ и угле β_1 будет устойчивой, если $\beta_2 < \beta_2^\zeta(\beta_1)$, и неустойчивой, если $\beta_2 > \beta_2^\zeta(\beta_1)$.

При фиксированном параметре ζ уравнение (4.9) определяет некоторую кривую $\beta_2^\zeta(\gamma)$, $\gamma \in (\pi / 2, \pi)$. Функция β_2^ζ непрерывна на интервале $(\pi / 2, \pi)$, причем $\beta_2^\zeta(\pi / 2) = \beta_2^\zeta(\pi) = \pi / 2$. Используя соотношения (4.11), можно показать, что при $0 < \xi < \zeta$, кривая β_2^ζ располагается строго ниже кривой β_2^ξ, т. е. $\beta_2^\zeta(\gamma) < \beta_2^\xi(\gamma)$, $\pi / 2 < \gamma < \pi$.

На фиг. 3 представлены графики функций $\beta_2^\zeta(\beta_1)$ для некоторых значений параметра ζ (кривым *1—10* соответствуют $\zeta = 0.4$, 1, 2.5, 5, 10, 20, 50, 100, 200, 1000). Величины углов β_1, β_2 отложены по осям в угло-



Фиг. 3

вых градусах. Согласно сказанному выше, кривая β_2^ζ при любом фиксированном значении $\zeta > 0$ делит квадрат $\{\pi / 2 < \beta_1 < \pi,\ 0 < \beta_2 < \pi / 2\}$ на область устойчивых форм равновесия (типа *III*) и область неустойчивых форм. Именно, часть квадрата ниже кривой β_2^ζ — область устойчивости, а выше кривой — область неустойчивости. На фиг. 3 заштрихована область неустойчивости равновесных форм типа *III* при $\zeta = 10$.

Построение функций β_2^ζ было проведено с помощью ЭЦВМ. Собственные числа $\eta_k(\gamma)$ и объемы $g_k(\gamma)$ (4.7) нормированных собственных функций задачи (4.3) были затабулированы для номеров $k = 1, 2, \ldots, 6$ и углов γ от 1 до 178° через каждый угловой градус. Значения в промежуточных точках определялись с помощью интерполяции, после чего для широкого набора параметров ζ последовательно при $\beta_1 = 91, 92, \ldots, \ldots, 178°$ решались уравнения (4.9), в которых число удерживаемых членов изменялось от 1 до 6. В таблице приведены значения корней $\beta_{2,m}^\zeta$ уравнений (4.9) при $\zeta = 1$ для некоторых углов β_1 и числа членов $m = 1, 2, 3, 4$. Нетрудно видеть, что процесс вычисления $\beta_2^\zeta(\beta_1)$ сходится хорошо.

m	β_1							
	91°	100°	115°	125°	135°	150°	160°	170°
1	89.0672	84.329	82.624	83.240	84.532	86.983	88.511	89.600
2	89.0659	84.272	82.467	83.045	84.330	86.832	88.425	89.576
3	89.0657	84.264	82.447	83.021	84.307	86.818	88.424	89.575
4	89.0656	84.262	82.441	83.014	84.301	86.815	88.423	89.575

В п. 2 отмечалось, что возможны случаи систем двух равновесных поверхностей, которые устойчивы при возмущениях с нулевыми объемами на каждой поверхности и неустойчивы при произвольных возмущениях $N_1 \in D_1$, $N_2 \in D_2$, которые связаны условием (1.10). Как показали вычисления, примером такой системы может служить произвольная неустойчивая форма равновесия рассмотренных выше пар сферических менисков (первые корни уравнений (2.9) положительны при любых углах β_1, β_2).

В заключение автор благодарит Ф. Л. Черноусько за постановку задачи и внимание к работе. Автор признателен А. А. Миронову за ценные замечания.

Поступила 23 V 1974

ЛИТЕРАТУРА

1. *Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. Устойчивость равновесных форм поверхности жидкости. Изв. АН СССР. МЖГ, 1966, № 2.
2. *Черноусько Ф. Л.* Задача о равновесии жидкости, подверженной действию сил тяжести и поверхностного натяжения. В кн. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.
3. *Беляева М. А., Слобожанин Л. А., Тюпцов А. Д.* Гидростатика в слабых силовых полях. В кн. «Введение в динамику тела с жидкостью в условиях невесомости». М., ВЦ АН СССР, 1968.
4. *Моисеев Н. Н., Румянцев В. В.* Динамика тела с полостями, содержащими жидкость. М., «Наука», 1965.
5. *Бляшке В.* Дифференциальная геометрия и геометрические основы теории относительности Эйнштейна. М.— Л., ОНТИ, Глав. ред. общетехн. лит-ры и номогр., 1935.
6. *Михлин С. Г.* Вариационные методы в математической физике. М., «Наука», 1970.
7. *Гобсон Е. В.* Теория сферических и эллипсоидальных функций. М., Изд-во иностр. лит., 1952.
8. *Грей Э., Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя и их приложения к физике и механике. М., Изд-во иностр. лит., 1953.