ПМТФ, № 3, 1974

УДК 533.951.7/.3

ИОННО-ЗВУКОВАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В БЕССТОЛКНОВИТЕЛЬНОЙ УДАРНОЙ ВОЛНЕ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА СТРУКТУРУ ФРОНТА

Г. Е. Векштейн

(Новосибирск)

Рассмотрена задача о структуре бесстолкновительной ударной волны, во фронте которой возбуждается ионно-звуковая турбулентность. На основе теории аномального сопротивления получены уравнения для спектра колебаний и функций распределения частиц в плазме, зная которые, можно найти профиль магнитного поля, плотности и другие макроскопические характеристики ударной волны.

Обсуждается возможность сравнения теоретических предсказаний с результатами экспериментов по рассеянию света на фронте ударной волны.

1. Введение. Можно считать установленным, что существование бесстолкновительных ударных волн в плазме, помещенной в магнитное поле, в широком диапазоне параметров связано с явлением аномального сопротивления [1]. Причиной его возникновения является сильная неравновесность плазмы и, как следствие этого, возбуждение различных неустойчивостей. Большое число экспериментальных результатов, относящихся к ударным волнам, распространяющимся поперек магнитного поля, показывает, что в плазме низкого давления такой, что $\beta \equiv 8\pi p/H^2 \ll 1$ (p — газокинетическое давление плазмы, H — напряженность магнитного поля) и в не слишком сильных магнитных полях (когда электронная плазменная частота ω_{pe} много больше электронной циклотронной частоты ω_{He}) главную роль играет ионно-звуковая неустойчивость. Ее развитие хорошо описывается теорией слабой турбулентности, и основным возникающим здесь вопросом является выбор механизма, обеспечивающего установление равновесного уровня флуктуаций. Этот вопрос неоднократно обсуждался, и анализ экспериментальных данных, проведенный в [2], позволяет отдать предпочтение линейному затуханию Ландау на ионах [3].

Зная энергию колебаний, из квазилинейных уравнений можно найти эффективную частоту столкновений частиц, т. е. диссипативные свойства плазмы, определяющие структуру ударной волны. Так как время развития неустойчивости, по порядку величины равное обратному инкременту γ^{-1}, много меньше времени τ прохождения фронта через данную точку в пространстве ($\tau \sim \delta / u$, где δ — ширина фронта, а u — скорость распространения ударной волны), то подобно тому, как это делается в газодинамике, сначала определяются локальные функции распределения частиц, устанавливающиеся под действием квазилинейных столкновений. Как будет видно из дальнейшего, они далеки от максвелловских. Затем на основе законов сохранения можно получить уравнения магнитной гидродинамики, описывающие изменение макроскопических характеристик плазмы в пространстве и во времени.

2. Функции распределения электронов и ионов и спектр колебаний. Обычно в ударных волнах частота рассеяния электронов существенно меньше их циклотронной частоты. Поэтому направленное движение электронов является дрейфовым. Пусть оно происходит вдоль оси x с некоторой скоростью $\bar{v}_e$ (магнитное поле считаем направленным вдоль z). Тогда в системе покоя электронов их функция распределения по скоростям $f_e(\mathbf{v})$ аксиально-симметрична вокруг оси z. В данном случае, когда рассеяние электронов связано с ионно-звуковыми колебаниями, ее можно считать вообще изотропной: $F_e(v)$. Это есть следствие того, что из-за малой фазовой скорости ионного звука электроны рассеиваются почти упруго. Поэтому при возбуждении колебаний единственным выделенным направлением оказывается ось x — направление дрейфа электронов.

Введем сферические координаты в пространстве скоростей (v, θ, φ) и в пространстве волновых векторов (k, θ', φ') с полярной осью вдоль x. Плотность электростатической энергии колебаний обозначим $W(k, \theta')$. Согласно определению квазилинейных коэффициентов диффузии для электронов

$$D_{\alpha\beta}^{(e)} = \frac{8\pi^2 e^2}{m_e^2} \int \frac{k_\alpha k_\beta}{k^2} W_{\mathbf{k}} \delta(\omega_{\mathbf{k}} - \mathbf{kv})\, d^3\mathbf{k} \tag{2.1}$$

При этом отличны от нуля только компоненты $D_{vv}^{(e)}$, $D_{v\theta}^{(e)}$, $D_{\theta\theta}^{(e)}$ и $D_{\varphi\varphi}^{(e)}$. При их вычислении нужно иметь в виду, что в системе покоя электронов, движущейся со скоростью $\bar{V}_e$, которая намного превышает фазовую скорость ионного звука, частота всех колебаний (из-за эффекта Допплера) $\omega_{\mathbf{k}} \approx -k_x\bar{V}_e = -k\bar{V}_e \cos\theta'$. Кроме того, учтем, что $\bar{V}_e$ мало по сравнению с тепловой скоростью электронов. Тогда из (2.1) получаем

$$D_{\theta\theta}^{(e)} = \frac{D(\theta)}{v \sin^2\theta}, \quad D_{v\theta}^{(e)} = \frac{D(\theta)}{v \sin\theta}\frac{V_e}{v}, \quad D_{vv}^{(e)} - \frac{D(\theta)}{v}\frac{\bar{V}_e^2}{v^2} \tag{2.2}$$

$$D(\theta) = \frac{16\pi^2 e^2}{m_e^2} \int\limits_{\pi/2-\theta}^{\pi/2} \frac{\sin\theta' \cos^2\theta'\, d\theta'}{[\sin^2\theta - \cos^2\theta']^{1/2}} \int\limits_0^\infty W(k, \theta')\, dk$$

при $\theta < \pi/2$, $D(\pi - \theta) = D(\theta)$.

Уравнение для изотропной функции распределения электронов $F_e(v)$ находится интегрированием квазилинейного уравнения по углу

$$\frac{dF_e}{\partial t} = \frac{1}{2}\int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \left[\frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta}^{(e)} \frac{\partial F_e}{\partial v_\beta}\right] = \tag{2.3}$$

$$= \frac{\bar{V}_e^2}{2v^2}\frac{\partial}{\partial v}\frac{1}{v}\frac{\partial F_e}{\partial v}\int\limits_0^\pi D(\theta)\sin\theta\, d\theta$$

Электронный инкремент возбуждения колебаний, определяемый функцией $F_e(v)$, приближенно равен

$$\gamma_e = \pi^2 \frac{m_i}{m_e}\frac{\omega_k^3}{k^2}\frac{F_e(0)}{n}\bar{V}_e \cos\theta' \tag{2.4}$$

Вычислим силу трения R, испытываемую электронами при их дрейфовом движении

$$R = \int m\mathbf{v}\left[\frac{\partial}{\partial v_\alpha} D_{\alpha\beta}^{(e)} \frac{\partial F_e}{\partial v_\beta}\right] d^3\mathbf{v} = -2\pi m_e \bar{V}_e F_e(0) \int\limits_0^\pi D(\theta)\sin\theta d\theta \tag{2.5}$$

Определяя эффективную частоту рассеяния электронов ν_e таким образом, чтобы $R = -m_e\bar{V}_e n\nu_e$, получаем

$$\nu_e = 2\pi \frac{F_e(0)}{n}\int\limits_0^\pi D(\theta)\sin\theta d\theta \tag{2.6}$$

Перейдем к нахождению ионного распределения по скоростям. В принятой модели основная масса ионов с колебаниями не взаимодействует [3]. Вклад в линейное затухание Ландау дает лишь малая группа ионов, которые могут находиться в резонансе с колебаниями. Введем их функцию распределения $f_i(v, \theta)$, а полное их число в единице объема обозначим через nx_i, так что

$$\int f_i d^3\mathbf{v} = nx_i$$

Кинетическое уравнение для f_i имеет вид

$$\frac{\partial f_i}{\partial t} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial}{\partial v} v^2 \left(D_{vv}^{(i)}\frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{D_{v\theta}^{(i)}}{v}\frac{\partial f_i}{\partial \theta}\right) + \frac{1}{v\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\left(D_{v\theta}^{(i)}\frac{\partial f_i}{\partial v} + \frac{D_{\theta\theta}^{(i)}}{v}\frac{\partial f_i}{\partial\theta}\right) \tag{2.7}$$

(конкретный вид коэффициентов диффузии $D_{\alpha\beta}^{(i)}$ будет приведен ниже в более удобных переменных).

Под действием колебаний функции распределения частиц меняются таким образом, чтобы полный инкремент $\gamma = \gamma_e + \gamma_i$ был близок к нулю при тех значениях волнового вектора $\mathbf{k}$, где $W_\mathbf{k} \neq 0$, и был не положителен там, где $W_\mathbf{k} = 0$.

Записывая выражение для ионного декремента

$$\gamma_i = \pi\frac{\omega_k^3}{nk^2}\int\left[\frac{\omega}{k}\frac{\partial f_i}{\partial v} + \left(\frac{\omega}{kv}\cos\theta - \cos\theta'\right)\frac{\partial f_i}{\partial\theta}\right] \times \left[\sin^2\theta\sin^2\theta' - \left(\frac{\omega}{kv} - \cos\theta\cos\theta'\right)^2\right]^{-1/2} d\theta dv \tag{2.8}$$

и учитывая, что электроны возбуждают все волны, для которых $\cos\theta' \geqslant 0$, получим еще одно уравнение, которому должна удовлетворять функция $f_i(v, \theta)$

$$\gamma_i + \gamma_e = \begin{cases} 0 & \text{при } \cos\theta' \geqslant 0 \\ \leqslant 0 & \text{при } \cos\theta' < 0 \end{cases} \tag{2.9}$$

Из (2.1), (2.3), (2.7) и (2.9) и должны определяться неизвестные функции $F_e(v, t)$, $f_i(v, \theta, t)$ и $W(k, \theta', t)$. Эти уравнения обладают тем свойством, что F_e, f_i и W перестают зависеть от начальных условий и их эволюция во времени приобретает универсальный характер (по терминологии [4] устанавливается асимптотическое решение). Так как в начальном состоянии перед ударной волной плазма холодная ($\beta_0 \ll 1$), то ее нагрев происходит очень быстро, и всюду внутри фронта успевает произойти переход к асимптотическому решению. Для его нахождения нужно ввести в уравнения автомодельные переменные, подобно тому, как это проделано в [4]. В результате определяется функция распределения электронов

$$F_e = \frac{an}{(T_e/m_e)^{3/2}}\exp\left[-\frac{v^5}{b(T_e/m_e)^{5/2}}\right] \tag{2.10}$$

$$a = \frac{3}{4\pi 5^{3/5}[\Gamma(3/5)]^{1/2}}, \quad b = \left[5\Gamma\left(\frac{8}{5}\right)\right]^{5/2}$$

где температура T_e определена так, что плотность кинетической энергии электронов равна $3nT_e/2$, а давление — соответственно, nT_e. Спектральную плотность электростатической энергии колебаний удобно записать в виде

$$(2.11)\qquad W(k,\theta')=\frac{T_e^{3/2}m_i^{1/2}}{32\pi^2e^2\omega_{pe}^2m_e^{3/2}}\frac{dT_e}{dt}w(q,\theta')$$

$$q=kT_e^{1/2}/m_e^{1/2}\omega_{pe}$$

Функция распределения ионов

$$(2.12)\qquad f_i=\frac{nx_i}{(T_i/m_i)^{3/2}}g_i(\xi,\theta)$$

$$\xi=m_i^{1/2}v/T_i^{1/2},\qquad 2\pi\int\limits_0^\pi\sin\theta d\theta\int\limits_0^\infty g_i(\xi,\theta)\,\xi^2d\xi=1$$

а величина T_i есть эффективная температура резонансных ионов. Уравнение для $g_i(\xi,\theta)$ следует из (2.7)

$$(2.13)\qquad \frac{\partial}{\partial\xi}\left(\xi^3g_i+D_{\xi\xi}\frac{\partial g_i}{\partial\xi}+D_{\xi\theta}\frac{\partial g_i}{\partial\theta}\right)+$$

$$+\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\sin\theta\left(D_{\xi\theta}\frac{\partial g_i}{\partial\xi}+D_{\theta\theta}\frac{\partial g_i}{\partial\theta}\right)=0$$

$$D_{\xi\xi}=\frac{1}{\xi}\int\frac{\omega_q^2}{q}\Phi dqd\theta',\quad D_{\xi\theta}=\frac{1}{\xi}\int\omega_q\left(\frac{\omega_q}{q\xi}\operatorname{ctg}\theta-\frac{\cos\theta'}{\sin\theta}\right)\Phi\,dqd\theta'$$

$$D_{\theta\theta}=\frac{1}{\xi}\int q\left(\frac{\omega_q}{q\xi}\operatorname{ctg}\theta-\frac{\cos\theta'}{\sin\theta}\right)^2\Phi dqd\theta'$$

$$\Phi=\frac{w(q,\theta')\sin\theta'}{[\sin^2\theta\sin^2\theta'-(\omega_q/q\xi-\cos\theta\cos\theta')^2]^{1/2}}$$

$$\omega_q=\omega_k/\omega_{pi}$$

В асимптотическом режиме остаются постоянными число резонансных ионов x_i, отношение температур электронов и ионов T_i/T_e и отношение дрейфовой скорости $\bar V_e$ к тепловой скорости электронов $(T_e/m_e)^{1/2}$.

В [3] было получено, что

$$(2.14)\qquad \bar V_e=\alpha_1(m_e/m_i)^{1/4}(T_e/m_e)^{1/2},\quad x_i=\alpha_2(m_e/m_i)^{1/4},\quad T_i=\alpha_3T_e$$

где числа $\alpha_{1,2,3}$ — постоянные порядка единицы, для определения которых нужно знать точное решение уравнения (2.13).

3. Структура слабой ударной волны. В рассматриваемой задаче дисперсионные эффекты, связанные с учетом инерции электронов или нарушением квазинейтральности, несущественны. Поэтому достаточно ограничиться одножидкостным приближением. Плазма как целое движется вдоль оси y — направления распространения ударной волны. Скорость плазмы обозначим через u. Все величины будем вычислять в системе отсчета, движущейся вместе с ударной волной. Электромагнитное поле имеет следующие отличные от нуля компоненты: $H_z=H(y)$, $E_y(y)$ — электрическое поле, возникающее из-за поляризации плазмы, и E_x — индукционное электрическое поле, в системе волны от координаты не зависящее.

В невозмущенной плазме перед ударной волной, т. е. при $y\to+\infty$, магнитное поле H_0, плотноть n_0, скорость $-u_0$. Начальную температуру можно считать равной нулю. Интенсивность ударной волны характеризуется числом Маха $M=u_0/v_A$, где $v_A=H_0/\sqrt{4\pi m_in_0}$. Рассмотрим случай слабых ударных волн, для которых $(M-1)\ll1$. Из соотношений Гюгонио следует, что в этом пределе изменение величин H, n и u в ударной волне порядка $(M-1)$, в то время как конечная температура электронов за фронтом $T_e \sim (M - 1)^3$. Все записанные ниже уравнения являются упрощенными с учетом этого обстоятельства.

Так как в лабораторной системе в невозмущенной плазме электрического поля нет, то

$$E_x = u_0 H_0 / c = M H_0 v_A / c \tag{3.1}$$

Поляризационное поле E_y устанавливается таким, чтобы электроны и ионы двигались вдоль y совместно. Отсюда

$$E_y = \overline{V}_e H(y) / c \tag{3.2}$$

Суммарная сила, действующая на электроны в направлении их дрейфа, должна равняться нулю

$$R = ne(E_x - uc^{-1}H) = nec^{-1}(Mv_A H_0 - uH) \tag{3.3}$$

Условие постоянства плотности потока импульса, уравнение непрерывности и уравнение Максвелла для магнитного поля записываются в виде

$$m_i n_0 M v_A (u - M v_A) + \frac{H^2}{8\pi} = \frac{H_0^2}{8\pi}, \quad nu = -n_0 M v_A, \tag{3.4}$$
$$\frac{dH}{dy} = -\frac{4\pi}{c} ne\overline{V}_e$$

В тепловом балансе плазмы существенна только джоулева диссипация

$$^3/_2 nu dT_e/dy = R\overline{V}_e = ne\overline{V}_e c^{-1}(Mv_A H_0 - uH) \tag{3.5}$$

Учитывая, что в слабых ударных волнах токовая скорость электронов $\overline{V}_e$ пропорциональна их тепловой скорости (2.14), из (3.4) и (3.5) получаем одно уравнение для профиля магнитного поля, которое с необходимой точностью записывается в виде

$$\frac{c^2}{\omega_{pe}^2}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/2}\frac{d^2h}{dy^2} = \frac{\alpha_1^2}{6}[4(M-1)h - 3h^2], \quad h = (H - H_0)/H_0$$

Оно интегрируется

$$\frac{h}{2(M-1)} = 1 - \operatorname{th}^2\left\{\frac{\alpha_1}{2}\left[\frac{2}{3}(M-1)\right]^{1/2}\frac{\omega_{pe}}{c}\left(\frac{m_e}{m_i}\right)^{1/4} y\right\} \tag{3.6}$$

Представляет интерес только тот интервал значений координат y, в котором h меняется от нуля до $h_1 = {}^4/_3(M-1)$ — значения магнитного поля в конечном состоянии за ударной волной. Ширина фронта слабой ударной волны δ оказывается, как это видно из (3.6), следующей:

$$\delta \sim \frac{c}{\omega_{pe}\sqrt{M-1}}\left(\frac{m_i}{m_e}\right)^{1/4} \tag{3.7}$$

Предсказываемое теорией постоянство отношения токовой скорости электронов к тепловой наблюдается в экспериментах, и из измерений в водородной плазме коэффициент $\alpha_1 \approx 1 \div 2$ [2]. Сравнение профиля магнитного поля (3.6) с измеряемым показывает, что приближение слабой ударной волны оказывается пригодным вплоть до чисел Маха $M \lesssim 2$. Функции распределения частиц во фронте определяются из (2.10) и (2.12), а спектр колебаний — по формуле (2.11), где $dT_e / dt = -u dT_e / dy$.

Дальнейшее увеличение интенсивности ударной волны приводит к такому нагреву электронов, что величина β во фронте становится порядка единицы. Наряду с сопротивлением существенной становится электронная теплопроводность. В результате функция распределения электронов по скоростям «искажается», и автомодельное решение (2.10) —