

ЛИТЕРАТУРА

1. Заец П. Г., Онуфриев А. Т., Пилипчук М. И. и др. Использование термоанемометрического комплекса в блоке с ЭВМ для измерения характеристик турбулентности завихренных потоков // Физические методы исследования прозрачных неоднородностей. — М.: Знание, 1986.
2. Заец П. Г. Экспериментальное исследование спектра турбулентности в потоке во вращающейся трубе: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МФТИ, 1986.
3. Сафаров Н. А. Поведение параметров развитого турбулентного потока в прямолинейном цилиндрическом канале, вращаемом относительно продольной оси: Автореф. дис. ... канд. физ.-мат. наук. — М.: МФТИ, 1986.
4. Wyngard J. C. Measurement of small-scale turbulence structure with hot wires // J. Phys. Ser. E: Scient. Instrum. — 1968. — V. 1, ser. 2. — P. 1105.
5. Laufer J. The structure of turbulence in fully developed pipe flow. — Washington, 1954. — (Techn. Rept./NASA; N 1174).
6. Lawn C. J. The determination of the rate of dissipation in turbulent flow // J. Fluid Mech. — 1971. V. 48, pt 3.
7. Pao J. H. Structure of turbulent velocity and scalar fields at large wavenumbers // Phys. Fluids. — 1965. — V. 8, N 6.
8. Монин А. С., Яглом А. М. Статистическая гидромеханика. — М.: Наука, 1965. — Ч. 1—2.
9. Driscoll R. J., Kennedy K. A. A model for the turbulent energy spectrum // Phys. Fluids. — 1983. — V. 26, N 5.
10. Patel R. P. A note on fully developed turbulent flow down a circular pipe // Aeron. J. — 1974. — V. 78, N 757.
11. Bremhorst K., Bullock K. J. Spectral measurements of temperature and longitudinal velocity fluctuations in fully developed pipe flow // Intern. J. Heat Mass Transfer. — 1972. — V. 13. — P. 1313.
12. Bremhorst K., Walker T. B. Spectral measurements of turbulent momentum transfer in fully developed pipe flow // J. Fluid Mech. — 1973. — V. 61, pt 1.
13. Morrison W. R. B., Kronauer R. E. Structural similarity for fully developed turbulence in smooth tubes // J. Fluid Mech. — 1969. — V. 39, pt 1.
14. Конт-Белло Ж. Турбулентное течение в канале с параллельными стенками. — М.: Мир, 1968.
15. Букреев В. И. Экспериментальная проверка современных представлений о турбулентном движении несжимаемой жидкости: Автореф. дис. ... д-ра физ.-мат. наук. — Новосибирск: Ин-т гидродинамики, 1984.
16. Gibson M. M. Spectra of turbulence in a round jet // J. Fluid Mech. — 1985. — V. 151, N 2.
17. Corrsin S., Uberoi M. S. Spectra and diffusion in a round turbulent jet. — Washington, 1950. — (Techn. note/NACA; N 2124).
18. Zaets P. G., Onufriev A. T., Safarov N. A., Safarov R. A. Experimental study of the turbulent one-dimensional spectrum function in rotating pipe flow. Importance of the isotropic uniform turbulence model // 5th EPS Liquid State Conf., Moscow, October 16—21, 1989: Proc. — Moscow, 1989.

г. Долгопрудный

*Поступила 10/V 1990 г.,
в окончательном варианте — 30/X 1990 г.*

УДК 523.526.517.4

В. Е. Неуважеев

ОТНОШЕНИЕ МЕЖДУ ТУРБУЛЕНТНОЙ И КИНЕТИЧЕСКОЙ ЭНЕРГИЕЙ В ПЕРЕМЕШАННОМ ВЕЩЕСТВЕ

В рамках простой полуэмпирической модели турбулентного перемешивания вычисляется турбулентная кинетическая энергия перемешанной зоны и сравнивается с кинетической энергией этой зоны. Последняя определяется действием ускорения, которое приводит в движение соответствующую массу вещества. Ранее эта задача рассматривалась в [1] на основе модели [2]. Ниже применяется приближенный подход, развитый в [3, 4]. Проводится сравнение с результатами [1] и объясняются полученные расхождения, особенно в случае импульсного ускорения. Для импульсного ускорения дается сопоставление с экспериментами [5], устанавливается удовлетворительное согласие, которое может быть улучшено при согласованной с теорией обработке экспериментов.

Постановка задачи. Рассматривается задача о перемешивании двух несжимаемых жидкостей разной плотности, находящихся в поле ускорения. Направление его таково, что возникает неустойчивость, приводящая к турбулентному перемешиванию веществ. В [1] на основании диффузион-

ной модели [2] вычислено отношение между изменением потенциальной энергии, обусловленным турбулентным перемешиванием, и кинетической энергией, приобретенной перемешанным веществом за счет действия ускорения.

Вычисляется изменение потенциальной энергии, вызванное перемешиванием вещества в интервале $x_2 \leq x \leq x_1$:

$$(1) \quad \Delta\Pi = g_0 \left[\int_{x_2}^0 (\rho_2 - \rho) x dx + \int_0^{x_1} (\rho_1 - \rho) x dx \right].$$

Здесь g_0 — ускорение; ρ — плотность смеси; ρ_2 и ρ_1 — плотности легкой и тяжелой жидкостей; $x = 0$ — положение границы раздела в начальный момент, когда жидкости не перемешаны.

Изменение потенциальной энергии обозначено в отличие от [1] иначе, так как под E_t понимается кинетическая энергия турбулентности, обусловленная характерной турбулентной скоростью v . Можно определить кинетическую энергию массы перемешанного вещества, обозначив ее как в [1] через E_d :

$$(2) \quad E_d = (1/2) \left(\int_0^t g dt \right)^2 \int_{x_2}^{x_1} \rho dx.$$

В [1] вычислено отношение $\Delta\Pi/E_d$ в предположении о линейной зависимости профиля плотности ρ от x и уточнено с учетом конкретных профилей плотности, доставляемых выбранной диффузионной моделью, совпадающей с моделью [2].

Особый случай представляет импульсный вид ускорения, приближенно отвечающий прохождению через границу раздела ударной волны. В [1] применена модель, приводящая к линейному закону роста зоны перемешивания во времени, что справедливо только в окрестности момента действия ускорения. Как показано в [3, 4], ширина области перемешивания будет развиваться со временем по закону $t^{2/7}$, который устанавливается в предположении, что часть турбулентной энергии переходит в тепло. С учетом этого обстоятельства ниже вычислено отношение $\Delta\Pi/E_d$ как для постоянного, так и для импульсного ускорения. За основу принята lv -модель, развитая в [6]. Здесь используется приближенный подход [7], приводящий к простым аналитическим зависимостям.

Основная идея работы [7] состоит в том, что характерная турбулентная скорость v в области перемешивания полагается не зависящей от пространственной переменной. Для нее строится балансное уравнение, которое после осреднения по области перемешивания принимает вид

$$(3) \quad d\bar{v}^2/2d\tau + k\bar{v}^2/\tau = gA/(2\eta_1\sqrt{\tau}), \quad d\tau = \alpha Lv dt;$$

$$(4) \quad f_1 = (\rho - \rho_2)/(\rho_1 - \rho_2) = 0,5(1 + \Phi(\eta)), \quad L = 4\eta_1\sqrt{\tau},$$

$$\eta = x/2\tau^{0,5}, \quad k = 0,25 + v/16\eta_1^2\alpha^2 + A^2/24, \quad A = (\rho_1 - \rho_2)/(\rho_1 + \rho_2), \quad \eta_1 = 2/\sqrt{\pi},$$

$$\Phi(\eta) = (2/\sqrt{\pi}) \int_0^\eta \exp(-\eta^2) d\eta$$

(α и v — постоянные, выбираемые из сравнения с экспериментом: $\alpha = 0,287$, $v = 16\eta_1^2\alpha^2$). Такой выбор обеспечивает совпадение с результатами [8, 9] при постоянном ускорении $L = 0,14 Ag_0 t^2$ и закон «2/7» при выключенном. Строго говоря, постоянную 0,14 следовало бы пересчитать, определяя ширину области перемешивания в эксперименте не по фронту, а интегрально по формуле

$$(5) \quad L = 2 \left(\int_{x_2}^0 (f_1/f_1(0)) dx + \int_0^{x_1} (f_2/f_2(0)) dx \right),$$

однако это здесь не сделано. Такой пересчет приведет к незначительному уменьшению постоянной 0,14.

Правая часть уравнения (3) является источником турбулентного перемешивания. При импульсном законе ускорения она берется всегда со знаком +. Второй член в левой части характеризует диссипацию турбулентной энергии, точнее, переход турбулентной энергии в тепло определяется вторым и третьим слагаемыми в коэффициенте k . Если их исключить, то будет иметь место тождественный переход изменения потенциальной энергии в кинетическую энергию турбулентного перемешивания.

Постоянное ускорение. Объемная концентрация i_1 , характеризующая распределение плотности, в принятой здесь модели не зависит от числа Атвуда A . На рис. 1 она сравнена с концентрацией, полученной в [1] (линия 1 — формула (4), 2 и 3 из [1] при $A = 0,1$ и 1, прямая 4 — формула (5)). Решение для кинетической энергии турбулентного перемешивания и ширины имеет вид

$$(6) \quad \bar{v}^2 = g_0 AL / (2\eta_1^2 (1 + 4k)) = 0,065 g_0 AL / (1 + 0,028A^2),$$

$$L = 8\eta_1^2 \alpha^2 g_0 A t^2 / (1 + 4k) = 0,14 g_0 A t^2 / (1 + 0,028A^2).$$

Изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ и кинетическая энергия E_d вычисляются по формулам (1) и (2) с использованием выражения для плотности (4). Окончательно получим

$$(7) \quad \Delta\Pi / E_d = LA / 4\eta_1^2 g_0 t^2 = 0,0275A^2 / (1 + 0,028A^2),$$

где изменение потенциальной энергии $\Delta\Pi$ найдено по формуле (1) в предположении, что $-\infty < x < \infty$. Долю турбулентной кинетической энергии определим с учетом (6) как

$$(8) \quad E_t / E_d = \bar{v}^2 / g_0^2 t^2 = 0,0092A^2 / (1 + 0,028A^2)^2.$$

Зависимости (7) и (8) нанесены на рис. 2 (линия 1 из [1], 2 — формула (7)) в сравнении с результатами [1]. Имеет место значительное отличие отношения энергий (7) (при $A = 1$ (7) = 0,0267, в [1] (7) = 0,014) в основном из-за разных профилей объемной концентрации. При сравнении совмещались фронты перемешивания (см. рис. 1). Если в [1], как и здесь, имеющийся профиль заменить прямой так, чтобы перемешанная масса вещества сохранялась, то результаты [1] (линия 3 на рис. 2) заметно сблизятся с приведенными выше. Такое сравнение лучше согласуется и с экспериментами, в которых измерялся профиль плотности [8, 9] и примыкание к начальным данным, скорее, носило негладкий характер. Отношение $\Delta\Pi / E_d$ из [1] найдено с учетом того, что ширина перемешивания работы [1] и настоящей связаны между собой формулой $L = (5/8)L_3$, где под L понимается ширина, определенная по формуле (5). Эта формула, а также аналитическое выражение для $\Delta\Pi / E_d$ при малых A в предположении модели [2] получены в приложении.

Импульсное ускорение. Нетривиальное решение уравнения (3) возможно только при наличии начальной шероховатости ($L_0 \neq 0$) [10]. В этом случае решение уравнений предыдущего пункта принимает вид

$$(9) \quad \bar{v}^2 = \bar{v}_1^2(\beta) (L_1/L)^{4k};$$

$$(10) \quad L = L_1 [1 + 8\eta_1^2 \alpha (1 + k) \bar{v}_1(\beta) (t - t_0) / L_1]^{1/(1+2k)}.$$

Здесь $\bar{v}_1(\beta)$ — турбулентная скорость, передаваемая ударной волной; β — безразмерный параметр, определяемый ниже; t_0 — время прохождения ударной волной границы, размытой на ширину L_0 . При этом E_t и E_d запишем как

$$E_t = 0,25 \bar{v}_1^2(\beta) (\rho_1 + \rho_2) L_1^{4k} L^{1-4k}, \quad E_d = 0,25 U_0^2 (\rho_1 + \rho_2) L$$

$$\left(U_0 = \int_0^{t_0} g dt \right) \text{ — скорость, приобретаемая границей в результате действия}$$

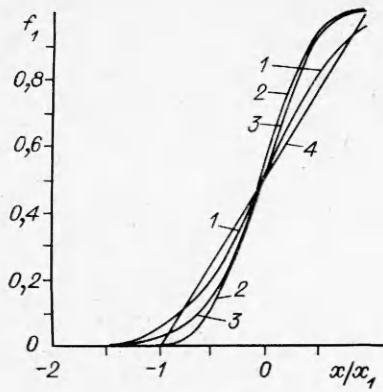


Рис. 1

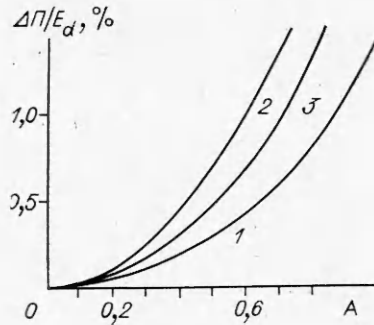


Рис. 2

импульсного ускорения). Их отношение есть

$$(11) \quad E_t/E_d = (\bar{v}_1^2(\beta)/U_0^2) (L_1/L)^{4k}.$$

Отметим, что при $k = 0,25$ турбулентная кинетическая энергия, переданная ударной волной, будет сохраняться. В случае же закона «2/7» $4k = 5$ и имеет место затухание энергии со степенью 5. Значение $\bar{v}_1^2(\beta)/U_0^2$ принадлежит интервалу $[4\alpha^2 A^2/(1+4k)^2, 4\alpha^2 A^2]$. Решение представим в виде

$$(12) \quad \bar{v}_1^2(\beta)/U_0^2 = (0,065AL_1/(\beta L_0)) [1 - (L_0/L_1)^6],$$

$$L_1/L_0 = \begin{cases} 1 + 10,2\alpha^2\beta A, & \text{если } \beta A \leq 0,24, \\ (0,924 + 1,23\alpha\sqrt{\beta A})^2, & \text{если } \beta A \geq 0,24, \end{cases}$$

где $\beta = U_0 t_0/L_0$. При больших β реализуется левое значение интервала, указанного выше.

Рассмотрим формулу (11) при $L = L_1$: $E_t/E_d = \bar{v}_1^2(\beta)/U_0^2$. Это отношение имеет квадратичную зависимость от A , а коэффициент у ней может изменяться при крайних значениях параметра β в $(1+4k)^2 = 36$ раз:

$$(13) \quad E_t/E_d = (0,01 \div 0,37) A^2.$$

Другим значениям β соответствует более сложный закон, определяемый формулой (11). Случай $\beta = 1$ для сравнения нанесен на рис. 3 при $L = L_1$ (линия 1 из [1], 2–4 отвечают $\beta = 0, \infty$ и 1).

Импульсное ускорение. Сравнение с экспериментами [5, 11]. В [5] измерялась зависимость безразмерной величины $(dL/dt)/U_0$ от A . Установлено, что при прохождении через границу раздела первой ударной волны имела место линейная зависимость вида

$$(14) \quad (dL_1/dt)/U_0 = 0,02 + 0,068(0,070)|A|$$

и после второй волны, когда зона размытия границы была 10 мм, коэффициент при числе Атвуда получился большим примерно на порядок:

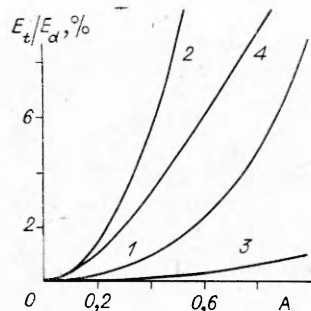
$$(15) \quad (dL_2/dt)/U_0 = 0,05 + 1,15(0,85)|A|.$$

В скобках указаны значения коэффициента при движении ударной волны из тяжелого в легкое.

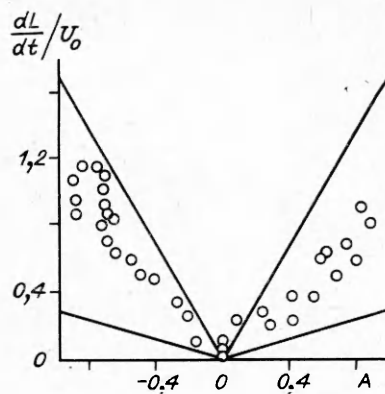
Сравним эти результаты с теоретическими выводами предыдущего пункта. Для этого, как и при получении выражений (14) и (15), рассмотрим соотношение (11) при $L = L_1$, подставив в него (12). Чтобы найти связь с (14) и (15), извлечем из обеих частей (10) квадратный корень. Имеем

$$(16) \quad \sqrt{(E_t/E_d)(L = L_1)} = \bar{v}_1(\beta)/U_0 = (dL/dt)/(U_0 8\eta_1^2 \alpha).$$

Здесь использовано уравнение $dL/dt = 8\eta_1^2 \alpha \bar{v}_1$, следующее из формул



Р и с. 3



Р и с. 4

первого пункта. Таким образом, из сопоставления (12) и (16) вытекает $(dL/dt)/U_0 = 8\eta_1^2 \alpha \bar{v}_1(\beta)$.

На рис. 4 сравниваются теоретические зависимости (линии) с результатами экспериментов [5] (кружки), которые лежат в пределах, указанных теорией. Исключение составляет первая ударная волна, в момент прохождения которой, по-видимому, существенное влияние оказала пленка.

Приложение. Аналитическое представление решения при малых значениях A . Профиль объемной концентрации имеет вид [2]

$$(17) \quad f_1 = 0,5 + 15x/8L_3 - 5(x/L_3)^3 + 6(x/L_3)^5,$$

где положено, что перемешивание при малых A симметрично, поэтому $-L_{3/2} \leq x \leq L_{3/2}$. Вычисление отношения $\Delta\Pi/E_d$ приводит к выражению

$$(18) \quad \Delta\Pi/E_d = L_3 A / (14g_0 t^2).$$

Переход к ширине L , определяемой из закона сохранения перемешанной массы, осуществляется по формуле (5). Подставим (17) в (18) и получим $L = (5/8)L_3$. С учетом последнего равенства (18) принимает вид $\Delta\Pi/E_d = 0,016 A^2$. Эта формула верна при малых значениях A .

ЛИТЕРАТУРА

1. Mikaelian K. O. a) Turbulent mixing generated by Rayleigh — Taylor and Richtmayer — Meshkov instabilities // Physica D.— 1989.— V. 36.— P. 343. b) Turbulent energy of accelerating and shocked interfaces // LLNL, 1986. VCRR, 93977.
2. Беленький С. З., Фрадкин Е. С. Теория турбулентного перемешивания // Тр. ФИАН им. Лебедева.— 1965.— Т. 29.— С. 207.
3. Неуважаев В. Е. Свойства модели турбулентного перемешивания // ПМТФ.— 1983.— № 4.
4. Неуважаев В. Е. Распльвание турбулентного слоя смеси // ПМТФ.— 1988.— № 2.
5. Зайцев С. Г., Лазарева Е. В., Чернуха В. В., Беляев В. М. Интенсификация перемешивания на границе разноплотных сред при прохождении через нее ударной волны // ДАН СССР.— 1985.— Т. 283, № 1.
6. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. К теории турбулентного перемешивания границы раздела в поле тяжести // ПМТФ.— 1976.— № 4.
7. Неуважаев В. Е. К теории турбулентного перемешивания // ДАН СССР.— 1975.— Т. 222, № 5.
8. Анучина Н. Н., Кучеренко Ю. А., Неуважаев В. Е. и др. Турбулентное перемешивание на ускоряющейся границе разноплотных жидкостей // МЖГ.— 1978.— № 6.
9. Read K. I. Experimental investigation of turbulent mixing by Rayleigh — Taylor instability // Physica D.— 1984.— V. 12.— P. 45.
10. Неуважаев В. Е., Яковлев В. Г. О перемешивании контактной границы, замедляемой стационарными ударными волнами // ПМТФ.— 1981.— № 2.
11. Novas L., Ramdani A., Fortes J. Creation and enhancement of turbulent mixing zones due to high Mach number shock interface interaction // International Workshop on the Physics of Turbulent Compressible Mixing, Oct. 1988: Pros.— Princeton, USA: Springer, 1988.

г. Челябинск

Поступила 14/IX 1990 г.