

и в частности зависимости температуры воспламенения частиц алюминия от их размера и концентрации окислителя в среде.

Выражаю благодарность академику В. В. Струминскому за обсуждение данной работы и сделанные замечания.

Поступила в редакцию 23/IX 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
2. R. Fridman, A. Masek. Comb. Flame, 1962, 6, 9.
3. М. А. Гуревич, К. М. Лапкина, Е. С. Озеров. ФГВ, 1970, 6, 3, 172.
4. Б. И. Хайкин, В. И. Блошенко, А. Г. Мержанов. ФГВ, 1970, 6, 4, 474.
5. А. П. Алдушин, В. И. Блошенко, Б. С. Сенлярский. ФГВ, 1973, 9, 4, 489.
6. М. А. Гуревич, Е. С. Озеров, А. М. Степанов. ФГВ, 1970, 6, 3, 326.
7. В. М. Гремячкин, А. Г. Истратов, О. И. Лейпунский.— В кн.: Физические процессы при горении и взрыве. М.: Атомиздат, 1980.
8. П. Ф. Похил, А. Ф. Беляев, Ю. В. Фролов и др. Горение порошкообразных металлов в активных средах. М.: Наука, 1972.
9. П. Кофстад. Высокотемпературное окисление металлов. М.: Мир, 1969.
10. M. Evans, Mem. Proc. Manchester. lit. Phil. Soc., 1935, 79, 13; 1935, 30, 7981.
11. Г. Маркштейн.— В кн.: Гетерогенное горение. М.: Мир, 1967.

ЗАЖИГАНИЕ ГОРЮЧЕГО ПРИ КОНТАКТЕ С ОКИСЛИТЕЛЕМ

Ю. И. Бабенко, А. С. Штейнберг

(Черноголовка)

Рассматривается задача о зажигании полубесконечного объема конденсированного горючего, находящегося первоначально при температуре T_0 и приведенного с момента времени $t=0$ в соприкосновение с окислителем, концентрация которого на поверхности контакта $x=0$ предполагается постоянной и равной C_0 . Окислитель диффундирует в горючее, вступая с ним в экзотермическую реакцию первого порядка. Теплоотвод с поверхности отсутствует. Цель работы — определение времени зажигания по условному критерию, который будет сформулирован ниже.

Система уравнений и граничных условий для безразмерной концентрации окислителя σ и температуры Θ имеет вид

$$\frac{\partial \sigma}{\partial \tau} - \frac{\partial^2 \sigma}{\partial \xi^2} + \sigma e^\Theta = 0, \quad (1)$$

$$\frac{\partial \Theta}{\partial \tau} - \text{Le} \frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - A \sigma e^\Theta = 0, \quad (2)$$

$$0 \leq \xi < \infty, \quad 0 < \tau < \infty,$$

$$\tau = 0: \sigma = 0, \quad \Theta = 0,$$

$$\xi = 0: \sigma = 1, \quad \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0, \quad (3)$$

$$\xi = \infty: \sigma = 0, \quad \Theta = 0,$$

где $\sigma = C/C_0$; $\Theta = (T - T_0)E/RT_0^2$; $\tau = tk_0 e^{-E/RT}$; $\xi = (x/\sqrt{D})\sqrt{k_0 e^{-E/RT}}$; $A = (C_0/\rho)(EQ/RT_0^2 c \rho)$; $\text{Le} = \kappa/D$ — критерий Льюиса; C — концентрация окислителя; c — теплоемкость; T — температура; E — энергия активации; κ — температуропроводность; $k_0 \exp(-E/RT_0)$ — константа скорости реакции при температуре T_0 ; x — расстояние от поверхности; ρ — плотность горючего; Q — тепловой эффект.

Зависимость скорости реакции от температуры дается в форме Франк-Каменецкого [1]. Величину A можно представить также в виде

$A = (C_s/\rho) \cdot (1/\gamma)$, где γ — так называемый критерий выгорания. Критерий A содержит дополнительный множитель, равный отношению плотности окислителя к плотности горючего у поверхности контакта.

Аналогичный процесс изучался ранее применительно к области конечного размера [2]; различные нестационарные режимы исследовались методом взвешенного осреднения [3]. В работе [4] решалась машинным методом более общая контактная задача.

Ниже проведем рассмотрение предложенным ранее методом определения градиентов на границе полубесконечной области [5—7], причем ограничимся наиболее важным в практическом отношении случаем $Le \rightarrow \infty$.

Заметим, что система (1)—(3) неудобна для непосредственного решения указанным методом, ибо в (2) последнее слагаемое не имеет вида $\sigma f(\Theta)$, где $f(0) = 0$, что не позволяет установить прямого соответствия с задачей типа [5] аналогично [6]. Чтобы обойти указанную трудность, ранее в [7] заменили функцию тепловыделения $\exp \Theta \rightarrow \exp \Theta - 1$. В настоящем случае такая замена невозможна, так как уравнение (2) перестает описывать процесс зажигания — задача (1)—(3) будет иметь решение, тождественно равное нулю. Тем не менее выражения для $(\partial \sigma / \partial \xi)_{\xi=0}$ и $\Theta|_{\xi=0}$, полученные методом [6, 7], если положить в формулах работы [5] $\gamma = -A\sigma e^\Theta / \Theta$ (не смешивать с γ настоящей работы), дают возможность установить структуру решения при $Le \rightarrow \infty$. Оказывается, что ряды, представляющие решение, имеют такой же вид, как при $A \rightarrow 0$, что согласуется с физическими представлениями — при хорошем теплоотводе процесс протекает так, как будто разогрев поверхности (характеризуемый величиной A) мал.

Поэтому в случае $Le \rightarrow \infty$ можно искать решение системы (1)—(3) в виде рядов

$$\sigma = \sigma_0 + A\sigma_1 + A^2\sigma_2 + \dots, \quad \Theta = A\Theta_1 + A^2\Theta_2 + \dots \quad (4)$$

Подставляя (4) в (1)—(3) и приравнявая члены при одинаковых степенях A , получаем последовательность линейных задач для определения σ_n и Θ_n . Практически из-за большого объема вычислений известными методами можно найти лишь величины σ_0 и Θ_1 . Тем не менее, можно показать, что все Θ_n почти постоянны на протяжении зоны изменения концентрации σ , кроме, может быть, первоначального отрезка времени $\tau < \tau_*$, причем τ_* тем меньше, чем больше Le . Отличие Θ_n от постоянной величины в зоне реакции также тем меньше, чем больше Le , что согласуется с физическими представлениями о характере протекания процесса.

Поэтому будем полагать, что в экспоненциальных членах (1) и (2) температура зависит только от времени и равна температуре поверхности $\Theta = \Theta_s(\tau)$. Так как $\exp \Theta$ умножается на величину σ , гораздо быстрее убывающую при $\xi \rightarrow \infty$, нежели Θ , погрешность, вносимая такой заменой в решение, несущественна.

Уравнение (2) в соответствии с [8] представим в виде

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} + \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \Theta = \left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} - \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{-1} A\sigma e^\Theta. \quad (5)$$

Производные дробного порядка определены выражением

$$\frac{d^v f(\tau)}{d\tau^v} = \frac{1}{\Gamma(1-v)} \frac{d}{d\tau} \int_0^\tau (\tau-z)^{-v} f(z) dz, \quad -\infty < v < 1, \quad (6)$$

где f — произвольная функция.

Оператор в правой части (5) определяется следующим свойством:

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} - \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi} \right)^{-1} \left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} - \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi} \right) f(\xi, \tau) = f(\xi, \tau). \quad (7)$$

Непосредственная проверка формулы (7) показывает, что обратный оператор можно записать в виде

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} - \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{-1} f(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Le}} \int_{\xi}^{\infty} \exp\left[-\frac{u-\xi}{\sqrt{Le}} \frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}}\right] f(u, \tau) du. \quad (8)$$

«Оператор экспоненты» в подынтегральном выражении формулы (8) определен в работе [9]. Для $Le \rightarrow \infty$ и $\xi = 0$, используя свойства «оператора экспоненты», для всех τ , кроме $\tau < \tau_{**}$ (причем τ_{**} тем меньше, чем больше Le), можно показать, что

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} - \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{-1} f(0, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Le}} \int_0^{\infty} f(u, \tau) du. \quad (9)$$

К этому же выражению можно прийти, производя формальное разложение обратного оператора в биномиальный ряд

$$\left(\frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} - \sqrt{Le} \frac{\partial}{\partial \xi}\right)^{-1} f(\xi, \tau) = \frac{1}{\sqrt{Le}} \int_{\xi}^{\infty} f d\xi - \frac{1}{Le} \frac{\partial^{1/2}}{\partial \tau^{1/2}} \int_{\xi}^{\infty} f d\xi^2 + \dots$$

и ограничиваясь для $Le \rightarrow \infty$ первым членом разложения.

Записав (5) при $\xi = 0$ с учетом (9) и граничных условий (3), получим соотношение, определяющее температуру поверхности Θ_s .

$$\frac{d^{1/2} \Theta_s}{d\tau^{1/2}} = \frac{Ae^{\Theta_s}}{\sqrt{Le}} \int_0^{\infty} \sigma d\xi. \quad (10)$$

Решение уравнения (1), где $\Theta = \Theta_s$ — функция только от температуры, для условий (3) легко получается известными методами

$$\sigma = e^{-\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \operatorname{erfc}\left(\frac{\xi}{2\sqrt{\tau-z}}\right) e^{\int_0^z \exp \Theta_s dz} dz. \quad (11)$$

Принимая во внимание, что

$$\int_0^{\infty} \operatorname{erfc} \alpha \xi d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi \alpha}},$$

найдем из (11), изменив порядок интегрирования,

$$\int_0^{\infty} \sigma d\xi = e^{-\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau} \frac{d}{d\tau} \int_0^{\tau} \frac{2\sqrt{\tau-z}}{\sqrt{\pi}} e^{\int_0^z \exp \Theta_s dz} dz = e^{-\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau} \frac{d^{-1/2}}{d\tau^{-1/2}} e^{\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau}. \quad (12)$$

Подставляя (12) в (10), получим уравнение, определяющее зависимость Θ_s от τ

$$\frac{d^{1/2}}{d\tau^{1/2}} \Theta_s = \varepsilon e^{\Theta_s} e^{-\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau} \frac{d^{-1/2}}{d\tau^{-1/2}} e^{\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau}, \quad \varepsilon = \frac{A}{\sqrt{Le}}. \quad (13)$$

Очевидно, что чем больше Le , тем при больших временах τ происходит процесс разогрева. Поэтому найдем асимптотическое выражение для функционала, входящего в (13), для $\tau \rightarrow \infty$. В предположении, что $f(\tau) =$

возрастающая функция, имеем

$$I = e^{-f(\tau)} \frac{d^{-1/2}}{d\tau^{-1/2}} e^{f(\tau)} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\tau} \frac{\exp\{-[f(\tau) - f(z)]\}}{\sqrt{\tau - z}} dz =$$

$$= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\sqrt{\tau}} \exp\{-[f(\tau) - f(\tau - z^2)]\} dz.$$

После подстановки $z/\sqrt{\tau} = u$ получаем

$$I = \frac{2\sqrt{\tau}}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 \exp\{-[f(\tau) - f[\tau(1 - u^2)]]\} du.$$

Если $f(\tau) \rightarrow \infty$, существенный вклад в интеграл вносит область малых u . Поэтому, используя метод перевала [10], положим, что верхний предел интегрирования равен ∞ , а также $f(\tau) - f[\tau(1 - u^2)] \sim \tau f(\tau) u^2$. Тогда, если при $\tau \rightarrow \infty$ $\tau f(\tau) \rightarrow \infty$, то

$$I \approx \frac{1}{\sqrt{f(\tau)}}. \quad (14)$$

Положим в (13) $\int_0^{\tau} \exp \Theta_s d\tau = f$. Указанная функция растет при $\tau \rightarrow \infty$ не медленнее, чем τ , поэтому, используя (14), получим уравнение, определяющее Θ_s при больших τ

$$\frac{d^{1/2} \Theta_s}{d\tau^{1/2}} = \varepsilon e^{\Theta_s/2}.$$

Отсюда после интегрирования в пределах 0, τ найдем

$$\Theta_s = \varepsilon \frac{d^{-1/2}}{d\tau^{-1/2}} e^{\Theta_s/2}. \quad (15)$$

Замена переменной $u = \varepsilon^2 \tau$, как следует из (6), переводит (15) в уравнение, не содержащее параметра

$$\Theta_s = \frac{d^{-1/2}}{du^{-1/2}} e^{\Theta_s/2}. \quad (16)$$

Очевидно, что время зажигания по любому критерию определяется соотношением $u_{ign} = \text{const}$ или

$$\tau_{ign} = \text{const}/\varepsilon^2. \quad (17)$$

При вычислении постоянной в (17) будем определять τ_{ign} как время достижения бесконечного значения величины Θ_s . Указанный критерий широко используется в теории зажигания [11].

Перепишем (16) в виде (см. (6))

$$\Theta_s = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^u \frac{\exp[\Theta_s(z)/2]}{\sqrt{u-z}} dz.$$

После замены $u - z = (u - v)^2$, $v = w/u$, придем к выражению

$$\Theta_s = \frac{2}{\sqrt{\pi}} u \int_0^1 \exp\left\{\frac{1}{2} \Theta_s [u - u^2(1 - w)^2]\right\} dw. \quad (18)$$

Согласно (18), функция Θ_s для отрицательных значений аргумента не может быть вещественной. Поэтому (18) не имеет при $u > 1$ веществен-

ного решения. Последний факт интерпретируем как достижение особенности $\Theta_s = \infty$ в точке $u = 1$ на кривой $\Theta_s = \Theta_s(u)$.

Таким образом, время зажигания в соответствии с (17) определится как

$$\tau_{ign} = 1/\varepsilon^2 = Le/A^2. \quad (19)$$

Из вывода следует (см. (14)), что для справедливости (19) недостаточно неравенства $Le \gg 1$. Требуется также, чтобы было

$$Le/A^2 \gg 1. \quad (20)$$

В работе [4] приведено интерполяционное выражение, представляющее машинное решение, которое в наших обозначениях имеет вид

$$\tau_{ign} = 2,4(Le^{0,6}/A^2 + Le^{0,16}). \quad (21)$$

Формула получена для интервала $0,1 < Le < 10$ и справедлива, если время зажигания ограничено неравенствами $2 < \tau_{ign} < 50$.

Для $Le = 10$, $A \rightarrow 0$ отношение численных значений для τ_{ign} , рассчитанное по формулам (21) и (19), равно 0,956, что подтверждает наш результат. Для $A = 1$; 10 указанная величина равна соответственно 1,3; 35,8. Расхождение тем меньше, чем сильнее выполняется условие (20).

Основные качественные результаты работы следующие:

1) время зажигания при $Le \rightarrow \infty$ обратно пропорционально квадрату концентрации окислителя;

2) время зажигания при $Le \rightarrow \infty$ пропорционально числу Льюиса.

Рассмотренная задача представляется практически важной в том отношении, что она является «максимизирующей». Для случая других граничных условий при $x = 0$, а также для реакции второго порядка время зажигания будет превышать величину (19).

Авторы благодарят В. И. Розенбанд за плодотворную дискуссию и А. Г. Мержанова за внимание к работе.

Поступила в редакцию 10/VI 1982

ЛИТЕРАТУРА

1. Д. А. Франк-Каменецкий. Диффузия и теплопередача в химической кинетике. М.: Наука, 1967.
2. Н. Е. Коловертных, С. И. Худяев, А. С. Штейнберг. ФГВ, 1980, 16, 4.
3. А. И. Вольперт, С. И. Худяев. Анализ в классах разрывных функций и уравнения математической физики. М.: Наука, 1975.
4. В. И. Розенбанд, Т. М. Мартельянова. ФГВ, 1978, 14, 3.
5. Ю. И. Бабенко.— В кн.: Тепло- и массоперенос. Т. 8. Минск: ИТМО АН БССР, 1972.
6. Ю. И. Бабенко. ИФЖ, 1980, 39, 1.
7. Ю. И. Бабенко. ФГВ, 1980, 16, 4.
8. Ю. И. Бабенко. ПММ, 1974, 38, 5.
9. Ю. И. Бабенко. ИФЖ, 1978, 34, 2.
10. А. Эрдейи. Асимптотические разложения. М.: Физматгиз, 1962.
11. А. Г. Merzhanov, А. Е. Averson. Comb. Flame, 1971, 16.

МЕХАНОАКТИВАЦИЯ ВОСПЛАМЕНЕНИЯ И ГОРЕНИЯ ПОРОШКА ТИТАНА

*С. И. Воево, В. М. Маслов, С. В. Полегаев, В. И. Розенбанд,
Е. В. Черненко, С. З. Шмурак, В. В. Барзыкин*

(Черноголовка)

Механическая обработка в диспергирующих аппаратах различных материалов, в том числе и металлических порошков, приводит к интенсификации многих физико-химических процессов как на стадии механообработки, так и после ее (разложение и синтез веществ, растворение,