

НЕКОТОРЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УСТАНОВИВШЕГОСЯ  
ТЕЧЕНИЯ НЕСЖИМАЕМОЙ, ВЯЗКОЙ И ЭЛЕКТРОПРОВОДЯЩЕЙ  
ЖИДКОСТИ

А. Е. Якубенко

(Москва)

Решаются две задачи течения вязкой, проводящей жидкости в магнитном поле. В первой рассматривается течение проводящей жидкости в трубе эллиптического сечения. Аналогичная задача для трубы прямоугольного и круглого сечения рассматривалась уже в работах [1-3]. Во второй задаче рассматривается движение эллиптического стержня и пластинки конечной ширины в жидкости, заполняющей все пространство. Постановка задачи о движении пластинки конечной ширины дана в работе Хазимото [4], в которой вычисляется сопротивление движению пластинки при помощи приближенного решения интегрального уравнения для больших и малых чисел Гартмана. Ниже дается решение этих задач, а также формула для сопротивления движению пластинки при любых числах Гартмана.

Обозначения

$x_1, y_1, z_1$ — декартовы координаты,	$u_0$ — скорость движения эллиптического стержня или пластинки,
$x, y$ — безразмерные координаты,	$v_z, v$ — скорость движения жидкости,
$\varepsilon, \eta$ — эллиптические координаты,	$l$ — фокальное расстояние эллипса или ширина пластинки,
$H_0$ — напряженность приложенного магнитного поля,	$k$ — перепад давления вдоль трубы,
$H_z, H$ — индуцированное магнитное поле,	$M$ — число Гартмана,
$\mu$ — вязкость среды,	$R_m$ — магнитное число Рейнольдса,
$c$ — скорость света в пустоте,	$\sigma$ — электропроводность среды,
$a, b$ — полуоси эллипса,	$\Gamma$ — контур трубы или стержня,
$\delta$ — толщина слоя жидкости,	$j$ — плотность электрического тока.

§ 1. Течение проводящей жидкости в эллиптической трубе. Рассмотрим движение проводящей, вязкой, несжимаемой жидкости в трубе эллиптического сечения под действием постоянного перепада давления вдоль трубы и приложенного поперек течения однородного магнитного поля  $H_0$ . Оси координат выбираем так, как указано на фиг. 1.

Единственной составляющей скорости при таком движении будет  $v_z = v_z(x, y)$ . Магнитное поле, возникающее в результате движения, будет также иметь только одну составляющую  $H_z = H_z(x, y)$ .

Для определения функций  $v_z$  и  $H_z$  имеем систему уравнений магнитной гидродинамики [3]

$$\Delta v + 4M \frac{\partial H}{\partial y} = -1, \quad \Delta H + 4M \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \quad \left( \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \quad (1.1)$$

с граничными условиями

$$v(\Gamma) = 0, \quad H(\Gamma) = 0 \quad \left( \Gamma - \text{контур трубы } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \quad (1.2)$$

Второе граничное условие (1.2) получено в предположении, что стенки трубы — диэлектрики.

В уравнениях (1.1) и (1.2) использованы безразмерные величины

$$x = \frac{x_1}{l}, \quad y = \frac{y_1}{l}, \quad v = \frac{\mu v_z}{k l^2}, \quad H = \sqrt{\frac{\mu}{\sigma}} \frac{c H_z}{4 \pi k l^2}, \quad M = \frac{1}{4} \frac{H_0}{c} \sqrt{\frac{\sigma}{\mu}} l$$

Здесь  $l$  — фокальное расстояние эллипса,  $M$  — число Гартмана,  $k$  — перепад давления вдоль трубы.

Контур трубы  $\Gamma$  и граничные условия (1.2) симметричны относительно оси  $x$ , поэтому из уравнений (1.1) следует

$$v(x, -y) = v(x, y), \quad H(x, -y) = -H(x, y) \quad (1.3)$$

Свойство (1.3) для функций  $v$  и  $H$  позволяет искать решение уравнений (1.1) и (1.2) в виде

$$v = \operatorname{ch} 2Myu_1(x, y) - \operatorname{sh} 2Myu_2(x, y) \quad (1.4)$$

$$H = -\operatorname{sh} 2Myu_1(x, y) + \operatorname{ch} 2Myu_2(x, y) - y / 4M \quad (1.5)$$

Для  $u_1$  и  $u_2$  согласно (1.3) имеем

$$u_1(x, -y) = u_1(x, y), \quad u_2(x, -y) = -u_2(x, y)$$

Подстановка (1.4), (1.5) в (1.1), (1.2) дает

$$\Delta u_1 - 4M^2 u_1 = 0, \quad u_1(\Gamma) = [y(\Gamma) / 4M] \operatorname{sh} 2My(\Gamma), \quad \partial u_1(x, 0) / \partial y = 0 \quad (1.6)$$

$$\Delta u_2 - 4M^2 u_2 = 0, \quad u_2(\Gamma) = [y(\Gamma) / 4M] \operatorname{ch} 2My(\Gamma), \quad u_2(x, 0) = 0 \quad (1.7)$$

Вторые граничные условия в (1.6), (1.7) следуют из симметрии (1.3). В уравнениях и граничных условиях (1.6), (1.7) перейдем к эллиптическим координатам  $x = \operatorname{ch} \xi \sin \eta$ ,  $y = \operatorname{sh} \xi \cos \eta$ .

Для контура трубы в эллиптических координатах имеем уравнение

$$\xi = \xi_1 = \frac{1}{2} \operatorname{In} \left| \frac{a+b}{a-b} \right|$$

После простых преобразований из (1.6), (1.7) получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} - 2M^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta) u_1 = 0$$

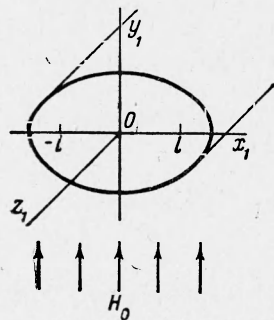
$$u_1(\xi_1, \eta) = (\operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta / 4M) \operatorname{sh} (2M \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta)$$

$$\partial u_1(0, \eta) / \partial \xi = 0, \quad \partial u_1(\xi, \pi/2) / \partial \eta = 0 \quad (1.9)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} - 2M^2 (\operatorname{ch} 2\xi + \cos 2\eta) u_2 = 0 \quad (1.10)$$

$$u_2(\xi_1, \eta) = (\operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta / 4M) \operatorname{ch} (2M \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta)$$

$$u_2(0, \eta) = 0, \quad u_2(\xi, \pi/2) = 0 \quad (1.11)$$



Фиг. 1

Уравнения (1.8), (1.10) решаем методом разделения переменных, полагая  $u = G(\eta) F(\xi)$ .

Для функций  $G(\eta)$  и  $F(\xi)$  получаем уравнения Матье

$$G''(\eta) + (\lambda - 2M^2 \cos 2\eta) G(\eta) = 0 \quad (1.12)$$

$$F''(\xi) - (\lambda + 2M^2 \operatorname{ch} 2\xi) F(\xi) = 0 \quad (\lambda = \text{const}) \quad (1.13)$$

Для того, чтобы решение было однозначным в каждой точке необходимо, чтобы решение (1.12) было периодической функцией  $\eta$  с периодом  $2\pi$ . Из общей теории уравнений Матье следует, что по заданному  $M$

можно найти бесчисленное множество значений  $\lambda = \lambda_0, \lambda_1, \dots, \lambda_n, \dots$  таких, что решения (1.12) будут периодическими. Эти решения образуют полную ортогональную систему.

Граничные условия (1.9), (1.11) четные функции  $\eta$ , поэтому решения уравнений (1.12) берем в виде  $G(\eta) = ce_n(\eta, M^2)$ , где  $ce_n(\eta, M^2)$  — четные функции Матье. Решения уравнения (1.13), соответствующие [5] решениям (1.12), обозначаются через  $Se_n(\xi, -M^2)$  и  $Fe_n(\xi, -M^2)$ .

Решения для  $u_1$  и  $u_2$  ищем в виде

$$u_1 = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n} \frac{Ce_{2n}(\xi_1, -M^2)}{Ce_{2n}(\xi_1, -M^2)} ce_{2n}(\eta, M^2) \tag{1.14}$$

$$u_2 = \sum_{n=0}^{\infty} L_{2n+1} \frac{Ce_{2n+1}(\xi, -M^2) Fe_{2n+1}(0, -M^2) - Fe_{2n+1}(\xi, -M^2) Ce_{2n+1}(0, -M^2)}{Ce_{2n+1}(\xi_1, -M^2) Fe_{2n+1}(0, -M^2) - Fe_{2n+1}(\xi_1, -M^2) Ce_{2n+1}(0, -M^2)} \times \\ \times ce_{2n+1}(\eta, M^2) \tag{1.15}$$

Из граничных условий (1.9), (1.11) для постоянных имеем

$$L_{2n} = \frac{(-1)^n \text{th } \xi_1 A_0^{(2n)} Ce'_{2n}(\xi_1, -M^2)}{4M^2 ce_{2n}(\pi/2, M^2)} \\ L_{2n+1} = \frac{(-1)^{n+1} \text{th } \xi_1 A_1^{(2n+1)} Se'_{2n+1}(\xi_1, -M^2)}{4M ce'_{2n+1}(\pi/2, M^2)} \quad (n = 0, 1, \dots) \tag{1.16}$$

Здесь  $A_r^{(n)}$  — коэффициенты разложения функции  $ce_n(\eta, M^2)$  в ряд Фурье.

Подстановка (1.14) — (1.16) в (1.4), (1.5) даст нам окончательное решение.

Легко показать, что полученное решение переходит в известное решение [2,3] для круглой трубы при деформации эллипса в окружность [5].

Выражение для скорости в центре трубы можно найти, полагая  $\xi = 0$ ,  $\eta = 0$  в полученном решении

$$v(0,0) = \frac{\text{th } \xi_1}{4M^2} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_0^{(2n)} Ce'_{2n}(\xi_1, -M^2) ce_{2n}(0, M^2)}{Ce_{2n}(\xi_1, -M^2)} \tag{1.17}$$

При  $M \rightarrow \infty$  из (1.17) получаем, что  $v(0,0) \sim 1/4M$

Таким образом, наличие магнитного поля приводит к торможению потока.

**§ 2. Движение эллиптического стержня и пластинки конечной ширины в проводящей жидкости.** Рассмотрим движение вдоль образующей цилиндрического стержня эллиптической формы с постоянной скоростью  $u_0$  в вязкой, электропроводящей несжимаемой жидкости, заполняющей все пространство. Ось  $z_1$  направим вдоль направления скорости  $u_0$ , а оси  $x_1, y_1$  по большой и малой главной оси эллипса.

Предположим, что  $\partial p / \partial z_1 = 0$ , внешнее магнитное поле  $H_0$  приложено вдоль направления малой оси эллипса, а скорость и индуцированное магнитное поле имеют только составляющие  $v_z$  и  $H_z$ .

Для определения  $v_z$  и  $H_z$  имеем систему уравнений магнитной гидродинамики [4]

$$\Delta v + 4M \frac{\partial H_z}{\partial y} = 0, \quad \Delta H + 4M \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{2.1}$$

С граничными условиями

$$v(\Gamma) = 1, \quad H(\Gamma) = 0 \quad \left( \Gamma - \text{контур стержня } \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \right) \quad (2.2)$$

$$v \rightarrow 0, \quad H \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.3)$$

Здесь

$$x = \frac{x_1}{l}, \quad y = \frac{y_1}{l}, \quad v = \frac{v_z}{u_0}, \quad H = \frac{4M}{R_m} \frac{H_z}{H_0}$$

где  $l$  — фокальное расстояние эллипса,  $M$  — число Гартмана,  $R_m$  — магнитное число Рейнольдса.

Граничное условие для  $H$  получено в предположении, что стенки стержня диэлектрики, а его контур симметричен относительно оси  $x$ .

Решение уравнений (2.1) ищем в виде

$$v = \text{ch } 2Myu_1 - \text{sh } 2Myu_2, \quad H = -\text{sh } 2Myu_1 + \text{ch } 2Myu_2 \quad (2.4)$$

Для определения  $u_1$  и  $u_2$  имеем краевые задачи

$$\Delta u_1 - 4M^2 u_1 = 0, \quad u_1(\Gamma) = \text{ch } 2My(\Gamma), \quad u_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.5)$$

$$\Delta u_2 - 4M^2 u_2 = 0, \quad u_2(\Gamma) = \text{sh } 2My(\Gamma), \quad u_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } r \rightarrow \infty \quad (2.6)$$

В эллиптических координатах из (2.5) и (2.6) получим

$$\frac{\partial^2 u_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_1}{\partial \eta^2} - 2M^2 (\text{ch } 2\xi + \cos 2\eta) u_1 = 0 \quad (2.7)$$

$$u_1(\xi_1, \eta) = \text{ch } (2M \text{ sh } \xi_1 \cos \eta), \quad u_1 \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (2.8)$$

$$\frac{\partial^2 u_2}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 u_2}{\partial \eta^2} - 2M^2 (\text{ch } 2\xi + \cos 2\eta) u_2 = 0 \quad (2.9)$$

$$u_2(\xi_1, \eta) = \text{sh } (2M \text{ sh } \xi_1 \cos \eta), \quad u_2 \rightarrow 0 \quad \text{при } \xi \rightarrow \infty \quad (2.10)$$

Методом разделения переменных из (2.7) — (2.10) найдем

$$u_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n A_0^{(2n)} \text{Ce}_{2n}(\xi_1, -M^2) \text{Fek}_{2n}(\xi, -M^2)}{\text{ce}_{2n}(\pi/2, M^2) \text{Fek}_{2n}(\xi_1, -M^2)} \text{ce}_{2n}(\eta, M^2) \quad (2.11)$$

$$u_2 = 2M \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} A_1^{(2n+1)} \text{Se}_{2n+1}(\xi_1, -M^2) \text{Fek}_{2n+1}(\xi, -M^2)}{\text{ce}_{2n+1}(\pi/2, M^2) \text{Fek}_{2n+1}(\xi_1, -M^2)} \text{ce}_{2n+1}(\eta, M^2) \quad (2.12)$$

Окончательно решение получается подстановкой  $u_1$  и  $u_2$  из (2.11), (2.12) в (2.4).

Иследуем полученное решение. При больших  $\xi$  из (2.11), (2.12), (2.4) имеем

$$v \sim (2M\pi \text{ch } \xi)^{-1/2} \exp \{ -2M (\text{ch } \xi - \text{sh } \xi \cos \eta) \} \quad (2.13)$$

Для магнитного поля  $H$  при больших  $\xi$  получается асимптотическая формула, совпадающая с (2.13).

В случае малых чисел Гартмана решения для  $u_1$  и  $u_2$  сильно упрощаются [5]. При  $M \rightarrow 0$

$$u_1 \approx \frac{K_0(2M \text{ch } \xi)}{K_0(2M \text{ch } \xi_1)}, \quad u_2 \approx 2M \text{sh } \xi_1 \cos \eta \frac{\text{cth } \xi}{\text{cth } \xi_1} \frac{K_1(2M \text{ch } \xi)}{K_1(2M \text{ch } \xi_1)} \quad (2.14)$$

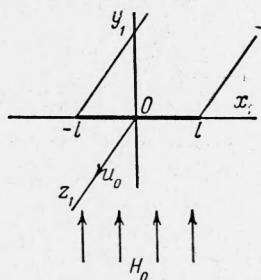
Для  $v$  и  $H$  имеем

$$v \approx \frac{K_0(2M \text{ch } \xi)}{K_0(2M \text{ch } \xi_1)} \quad (2.15)$$

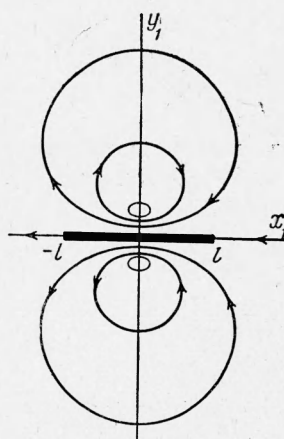
$$H \approx 2M \text{sh } \xi_1 \cos \eta \left[ \frac{\text{cth } \xi}{\text{cth } \xi_1} \frac{K_1(2M \text{ch } \xi)}{K_1(2M \text{ch } \xi_1)} - \frac{K_0(2M \text{ch } \xi)}{K_0(2M \text{ch } \xi_1)} \right]$$

В пределе при  $M \rightarrow 0$  из (2.15) получим  $\lim v = 1$ ,  $\lim H = 0$ , т. е. решение, соответствующее непроводящей жидкости.

Формула (2.13) показывает, что, начиная с некоторого  $\xi = \xi_0$ , скорость и магнитное поле будут мало отличаться от нуля, причем чем больше  $M$ , тем меньше  $\xi_0$ . Отметим, что аналогичная задача в обычной гидродинамике имеет только тривиальное решение  $v = 1$ , т. е. пластинка увлекает всю жидкость. Это видно из асимптотики (2.15) для  $v$  и  $H$  при  $M \rightarrow 0$ .



Фиг. 2



Фиг. 3

При больших числах Гартмана получим [5] следующие формулы:

$$v \approx \frac{K_0 (2M \operatorname{ch} \xi)}{K_0 (2M \operatorname{ch} \xi_1)} \operatorname{ch} (2M \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \operatorname{ch} (2M \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta) - \frac{K_1 (2M \operatorname{ch} \xi)}{K_1 (2M \operatorname{ch} \xi_1)} \operatorname{sh} (2M \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \operatorname{sh} (2M \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta) \quad (2.16)$$

$$H \approx - \frac{K_0 (2M \operatorname{ch} \xi)}{K_0 (2M \operatorname{ch} \xi_1)} \operatorname{sh} (2M \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \operatorname{ch} (2M \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta) + \frac{K_1 (2M \operatorname{ch} \xi)}{K_1 (2M \operatorname{ch} \xi_1)} \operatorname{ch} (2M \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \operatorname{sh} (2M \operatorname{sh} \xi_1 \cos \eta) \quad (2.17)$$

Формулы (2.16), (2.17) показывают, что при очень больших числах Гартмана  $M$  скорость и магнитное поле будут отличаться от нуля только в узком слое, прилегающем к поверхности стержня.

Положим  $\xi_1 = 0$  в формулах (2.11), (2.12). Этот случай будет соответствовать движению непроводящей пластинки конечной ширины фиг. 2 в поперечном магнитном поле. При  $\xi_1 = 0$  имеем [5]

$$(-1)^n \operatorname{Ce}_{2n}(0, -M^2) = \operatorname{ce}_{2n}(\pi/2, M^2), \quad \operatorname{Se}_{2n+1}(0, -M^2) = 0 \quad (2.18)$$

Согласно (2.18), (2.11), (2.12), (2.4) для непроводящей пластинки получим

$$v = 2 \operatorname{ch} (2M \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} \frac{\operatorname{Fek}_{2n}(\xi, -M^2)}{\operatorname{Fek}_{2n}(0, -M^2)} \operatorname{ce}_{2n}(\eta, M^2) \quad (2.19)$$

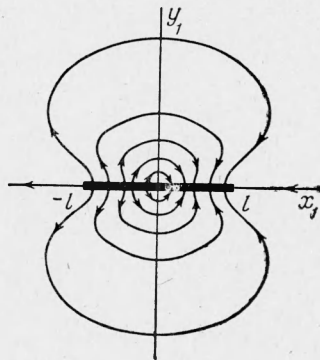
$$H = - 2 \operatorname{sh} (2M \operatorname{sh} \xi \cos \eta) \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} \frac{\operatorname{Fek}_{2n}(\xi, -M^2)}{\operatorname{Fek}_{2n}(0, M^2)} \operatorname{ce}_{2n}(\eta, M^2) \quad (2.20)$$

Качественная картина электрических токов, текущих вне пластинки, изображена на фиг. 3. Все линии электрического тока, кроме  $y = 0$ ,

замкнуты, так как линии электрического тока определяются уравнением  $H = \text{const}$ , а магнитное поле обращается в нуль только при  $y = 0$  и в бесконечности. Точки, в которых плотность электрического тока  $\mathbf{j}$  обращается в нуль, имеют координаты  $(\eta = 0, \xi = \xi_0)$  и  $(\eta = \pi, \xi = \xi_0)$ , где  $\xi_0$  определяется уравнением  $\partial H(\xi, 0) / \partial \xi = 0$ . Найдем выражение для сопротивления движению пластинки. Имеем

$$\tau_1 = \frac{\tau l}{\mu u_0} = 2 \int_0^\pi \frac{\partial v(0, \eta)}{\partial \xi} d\eta, \quad \text{или} \quad \tau_1 = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} [A_0^{(2n)}]^2 \frac{\text{Fek}'_{2n}(0, -M^2)}{\text{Fek}_{2n}(0, -M^2)} \quad (2.21)$$

При малых и больших числах Гартмана  $M$  из (2.21) получаются формулы, найденные Хазимото [4]. При  $M \rightarrow 0$ , как это следует из теории функций Матье [5]



Фиг. 4

$$\tau_1 \approx - \frac{2\pi}{-\ln M/2 - C}$$

Здесь  $C = 0.577 \dots$  — эйлерова постоянная. При больших  $M$

$$\tau_1 \approx - (8M + 2) \quad (2.22)$$

Сильное увеличение сопротивления движению (2.22) при возрастании  $M$  можно объяснить тем, что в этом случае пластинка при своем движении увлекает очень тонкий слой жидкости  $\delta$ , прилегающий к ней. В этом слое, толщина которого стремится к нулю с возрастанием  $M$ , происходит изменение скорости от единицы до нуля, что приводит к резкому увеличению сопротивления.

В заключение рассмотрим движение идеально проводящей пластинки в поперечном магнитном поле.

Решение для функций  $v$  и  $H$  ищем, как и в случае движения непроводящего эллиптического стержня, в виде (2.4). Для определения функций  $u_1$  и  $u_2$  в эллиптических координатах получаем уравнения (2.7), (2.9) с граничными условиями на контуре пластинки [4]

$$u_1(0, \eta) = 1, \quad \partial u_1(\xi, \pi/2) / \partial \eta = 0, \quad (\xi > 0), \quad u_1 \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty \quad (2.23)$$

$$\partial u_2(0, \eta) / \partial \xi = 2M \cos \eta, \quad u_2(\xi, \pi/2) = 0 \quad (\xi > 0), \quad u_2 \rightarrow 0 \text{ при } \xi \rightarrow \infty \quad (2.24)$$

Методом разделения переменных найдем

$$u_1 = 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_0^{(2n)} \frac{\text{Fek}_{2n}(\xi, -M^2)}{\text{Fek}_{2n}(0, -M^2)} \text{ce}_{2n}(\eta, M^2) \quad (2.25)$$

$$u_2 = 2M \sum_{n=0}^{\infty} A_1^{(2n+1)} \frac{\text{Fek}_{2n+1}(\xi, -M^2)}{\text{Fek}'_{2n+1}(0, -M^2)} \text{se}_{2n+1}(\eta, M^2) \quad (2.26)$$

Функции  $v$  и  $H$  определяются окончательно подстановкой  $u_1$  и  $u_2$  из (2.25), (2.26) в (2.4).

Можно показать, что, как и в случае непроводящей пластинки, функции  $v$  и  $H$  быстро стремятся к нулю при  $\xi \rightarrow \infty$ .

Качественная картина линий электрического тока изображена на фиг. 4. Линии электрического тока определяются уравнением  $H = \text{const}$

и так как  $H$  обращается в нуль только при  $y = 0$  и в бесконечности, линии электрического тока, кроме  $y = 0$ , выходя из пластинки, снова возвращаются к ней. В точках с координатами  $(\xi = 0, \eta = 0)$ ,  $(\xi = 0, \eta = \pi)$  плотность электрического тока  $\mathbf{j}$  равна нулю.

Для силы сопротивления движению пластинки имеем

$$\tau_2 = 2 \int_0^{\pi} \left[ \frac{\partial v(0, \eta)}{\partial \xi} + 4MH(0, \eta) \cos \eta \right] d\eta$$

или

$$\tau_2 = \tau_1 + 4M \int_0^{\pi} H(0, \eta) \cos \eta d\eta = \tau_1 + \tau_H \quad (2.27)$$

Первое слагаемое в (2.27) уже вычислено (см. (2.21)). Для второго имеем

$$\tau_H = 4\pi M^2 \sum_{n=0}^{\infty} [A_1^{(2n+1)}]^2 \frac{\text{Fek}_{2n+1}(0, -M^2)}{\text{Fek}'_{2n+1}(0, -M^2)} \quad (2.28)$$

Для  $\tau_2$  окончательно получим

$$\tau_2 = 4\pi \sum_{n=0}^{\infty} [A_0^{(2n)}]^2 \frac{\text{Fek}'_{2n}(0, -M^2)}{\text{Fek}_{2n}(0, -M^2)} + 4\pi M^2 \sum_{n=0}^{\infty} [A_1^{(2n+1)}]^2 \frac{\text{Fek}_{2n+1}(0, -M^2)}{\text{Fek}'_{2n+1}(0, -M^2)} \quad (2.29)$$

При малых  $M$  имеем

$$\tau_H = -4\pi M^2, \quad \tau_2 \approx \tau_1$$

При любых числах Гартмана  $M$ , как это следует из (2.29), сопротивление, которое испытывает при движении идеально проводящая пластинка, больше сопротивления, которое испытывает непроводящая пластинка. Это связано с тем, что текущие по пластинке токи, взаимодействуя с приложенным поперечным магнитным полем, вызывают дополнительное сопротивление.

Поступила 30 XII 1962

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Shercliff I. Steady motion of conducting fluids in pipes under transverse magnetic fields. Proc. Cambridge Phil. Soc., 1953, vol. 49, p. 136.
2. Уфлянд Я. С. Задача Гартмана для круглой трубы. ЖТФ, 1960, т. 30, № 10.
3. Якубенко А. Е. Течение по трубам вязкой, несжимаемой, проводящей жидкости в однородном и неоднородном магнитном поле. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 1.
4. Nasimoto H. Steady longitudinal motion of cylinder in a conducting fluid. Journal of Fluid Mechanics, 1960, vol. 8, pt. 1.
5. Мак-Лаклан Н. Теория и приложения функций Матъе. ИЛ, 1953.