

УДК 519.676

## Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод “двойной рандомизации”)\*

Г.А. Михайлов<sup>1,2</sup>

<sup>1</sup>Институт вычислительной математики и математической геофизики Сибирского отделения Российской академии наук, просп. Акад. М.А. Лаврентьева, 6, Новосибирск, 630090

<sup>2</sup>Новосибирский национальный исследовательский государственный университет (НГУ), ул. Пирогова, 2, Новосибирск, 630090

E-mail: gam@sscc.ru

**Михайлов Г.А.** Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло для задач со случайными параметрами (метод “двойной рандомизации”) // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2019. — Т. 22, № 2. — С. 187–200.

Рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло строятся путем совместной реализации базовой вероятностной модели задачи и ее случайных параметров с целью исследования параметрического распределения линейных функционалов. В работе представлена оптимизация таких алгоритмов, причем для оценки плотности распределения используется статистическая ядерная оценка. Формулируется также рандомизированный проекционный алгоритм для оценки распределения нелинейного функционала с приложением к решению задачи исследования флуктуаций критичности процесса размножения частиц в случайной среде.

**DOI:** 10.15372/SJNM20190205

**Ключевые слова:** *вероятностная модель, статистическое моделирование, случайный параметр, рандомизированный алгоритм, метод двойной рандомизации, случайная среда, метод расщепления, статистическая ядерная оценка.*

**Mikhailov G.A.** Randomized algorithms of Monte Carlo method for problems with random parameters (“double randomization” method) // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2019. — Vol. 22, № 2. — P. 187–200.

Randomized algorithms of Monte Carlo method are constructed by the combined realization of the base probabilistic model and its random parameters for investigation of the parametric distribution of linear functionals. The optimization of algorithms with the use of the statistical kernel estimator for the probability density is presented. The randomized projection algorithm for estimating a nonlinear functional distribution as applied to the investigation of criticality fluctuations for the particles multiplication process in a random medium is formulated.

**Keywords:** *probabilistic model, statistic modeling, random parameter, randomized algorithm, double randomization method, random medium, splitting method, statistic kernel estimator.*

---

## Введение

Численные методы Монте-Карло строятся на основе естественных или искусственно сформулированных базовых вероятностных моделей. Они могут быть особенно сравни-

---

\* Работа выполнена в рамках государственного задания ИВМиМГ СО РАН (проект № 0315-2016-0002) и при частичной финансовой поддержке грантов РФФИ (проекты № 16-01-00530, № 17-01-00823, № 18-01-00356).

тельно эффективными, когда базовые модели содержат случайные параметры и для оценки искомых величин используется совместное статистическое моделирование базовых и параметрических распределений, т. е. фактически реализуется произведение соответствующих вероятностных пространств (возможно, многократное). Соответствующие алгоритмы метода Монте-Карло в настоящей работе называются рандомизированными. Формулируемый таким образом метод “двойной рандомизации” можно пояснить, рассматривая интеграл

$$J(\sigma) \int_W g(w; \sigma) P(dw; \sigma)$$

со случайным (возможно, функциональным) параметром  $\sigma$ . Здесь  $P(dw; \sigma)$  — вероятностная мера в  $W$  с параметром  $\sigma$ . Пусть необходимо оценить математическое ожидание  $EJ(\sigma)$  и дисперсию  $DJ(\sigma)$ . Если определена достаточно точная оценка  $J(\sigma) \approx \hat{J}(\sigma)$ , то численное построение выборки  $\{\sigma_i\}$  дает статистические оценки требуемых величин. Однако для реальных задач такой алгоритм может быть слишком трудоемким. При этом целесообразно использовать двойную рандомизацию, моделируя для выбранного  $\sigma$  лишь сравнительно небольшое число точек  $\omega$  соответственно распределению  $P(dw; \sigma)$  с вычислением и осреднением полученных значений  $g(\omega; \sigma)$ .

Оптимизация такого алгоритма по критерию трудоемкости вычислений рассмотрена далее в пункте 1. Более сложная задача оптимизации рандомизированного алгоритма решается в п. 2 для случая, когда  $J(x) := J(\sigma; x)$  и необходимо оценить функцию  $f(x) = EJ(\sigma; x)$ .

Менее очевидным является принцип построения алгоритма двойной рандомизации для оценки величины  $DJ(\sigma)$ . В связи с тем, что  $EE(g^2(\omega; \sigma)|\sigma) \neq EJ^2(\sigma)$ , здесь необходимо моделировать по крайней мере две условно независимых (при фиксированном  $\sigma$ ) точки  $\omega$  (см. п. 2). Отметим, что такой алгоритм нельзя построить и обосновать просто из “физических соображений”. Еще более сложным в этом отношении является представленный в пунктах 3, 4 алгоритм метода Монте-Карло для оценки распределения нелинейной функции  $\Phi(J(\sigma))$  с использованием ее степенной аппроксимации.

## 1. Оптимизация оценки вероятностных моментов линейного функционала

Рассматриваются линейные функционалы вида

$$J_k(\sigma) = \int_{R^m} \varphi(x; \sigma) h_k(x; \sigma) dx.$$

Здесь  $x \in R^m$ ,  $\sigma$  — случайный, возможно, функциональный параметр задачи (“случайная среда”),  $\varphi(x; \sigma) \in L_1(R^m)$  — решение задачи с параметром  $\sigma$ , определяемое компьютерно реализуемой вероятностной моделью, т. е. базовым ансамблем траекторий  $\{\Omega\}$  в фазовом пространстве  $R^m$ ,  $h_k(x; \sigma) \in L_\infty(R^m)$ .

Методом Монте-Карло строятся несмещенные оценки  $\xi_k(\Omega; \sigma)$  функционалов  $J_k(\sigma)$ , т. е. при фиксированном  $\sigma$  имеем  $E_\Omega \xi_k(\Omega; \sigma) = J_k(\sigma)$ . Для иллюстрации такой схемы можно рассматривать задачу переноса частиц — квантов излучения — с рассеянием и поглощением через среду со случайной плотностью  $\sigma(r)$ ,  $r \in R^3$  (см., например, [1, 2]); здесь  $\{\Omega\}$  — ансамбль траекторий квантов, который можно определить однородной цепью Маркова столкновений квантов с элементами вещества. Отметим, что методом Мон-

те-Карло при этом осуществляется осреднение функционалов от решения интегро-дифференциального уравнения переноса излучения через случайную среду. Формулировки рандомизированных алгоритмов далее будут связываться с такой задачей переноса частиц, хотя они применимы также для любых численно реализуемых ансамблей  $\{\Omega\}$  и параметров  $\sigma$ .

Метод двойной рандомизации для оценки вероятностных моментов серии линейных функционалов  $\{J_k(\sigma)\}$  определяется легко проверяемым соотношением [3]

$$E \left[ \prod_{k=1}^s J_k(\sigma) \right] = E_{(\{\Omega_k\}, \sigma)} \left[ \prod_{k=1}^s \xi_k(\Omega_k; \sigma) \right]. \quad (1)$$

Здесь  $\Omega_k$  ( $k = 1, \dots, s$ ) — условно-независимые траектории квантов излучения, построенные для реализации среды с плотностью  $\sigma$ , а  $\xi_k(\Omega; \sigma)$  — несмещенные оценки функционалов  $J_k(\sigma)$ , т. е.  $E_{\Omega} \xi_k(\Omega; \sigma) = J_k(\sigma)$ .

Согласно правилу повторного осреднения (т. е. фактически по теореме Фубини) соотношение (1) реализуется следующим образом: строится реализация случайной среды (т. е., вообще говоря, поля  $\sigma$ ) и затем в этой фиксированной среде строится серия независимых (точнее, условно-независимых) траекторий  $\{\Omega_k\}$ ,  $k = 1, \dots, s$ , которая дает вклад в статистическую оценку величины (1).

Практически весьма важно, что при построении несмещенной оценки момента (1) для данной реализации  $\sigma$  достаточно строить лишь  $s$  элементарных оценок функционала. В частности, при  $s = 1$  можно строить лишь одну такую оценку, так как  $E_{(\Omega_1, \sigma)} \xi(\Omega_1, \sigma) = E J(\sigma)$ . Использование серии условно-независимых траекторий при этом может уменьшить трудоемкость оценки согласно формулам “метода расщепления” (см., например, [1]). Отметим, что при попадании траектории  $\Omega$  в подобласть среды с уже выбранными значениями  $\sigma$  их нельзя выбирать заново, иначе возникает “ошибка перевыбора” [2]. Отметим также, что согласно теореме Фубини правая часть соотношения (1) здесь должна оставаться конечной после замены  $\xi(\Omega_k; \sigma)$  на  $|\xi(\Omega_k; \sigma)|$ . При  $\xi(\Omega_k; \sigma) \geq 0$  соотношение (1) выполняется в любом случае. Ясно, что в рассмотренном выше алгоритме оценки момента (1) одновременно можно строить также оценки моментов порядка  $l < n$ . При этом целесообразно использовать все различные подпоследовательности порядка  $l$ , получаемые из последовательности  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ .

Как указано выше, трудоемкость алгоритма двойной рандомизации для оценки величины  $E J(\sigma) = E_{(\Omega; \sigma)} \xi(\Omega; \sigma)$  можно уменьшить, используя серию условно-независимых траекторий  $\{\Omega_k\}_{k=1, \dots, n}$ , которые строятся для фиксированного  $\sigma$ , т. е. используя оценку “метода расщепления” [4]

$$\zeta_n = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \xi(\Omega_k; \sigma).$$

При этом (см., например, [4])

$$D\zeta_n = d_0 + d_1/n, \quad \text{где } d_0 = D_{\sigma} E_{\Omega} \xi(\Omega; \sigma), \quad d_1 = E_{\sigma} D_{\Omega} \xi(\Omega; \sigma).$$

Среднее число вычислительных операций здесь определяется формулой  $T_n = t_0 + nt_1$ , где  $t_0$  соответствует реализации  $\sigma$ , а  $t_1$  — реализации  $\Omega$ . Минимизирующее (с точностью до перехода к целой части) величину трудоемкости  $S_n = D\zeta_n T_n$  (см. [4]) значение  $n$  равно

$$n_{\text{opt}} = \sqrt{\frac{t_0 d_1}{t_1 d_0}}, \quad (2)$$

причем (см., например, [1])

$$S_{n_{\text{opt}}} = \left( \sqrt{t_0 d_0} + \sqrt{t_1 d_1} \right)^2 \leq T_1. \quad (3)$$

Для оценки эффективности такого рандомизированного алгоритма с расщеплением рассмотрим модельную задачу переноса частиц с дельта-рассеянием и поглощением через среду со случайной оптической толщиной поглощения  $\sigma$ , равномерно (т. е. с плотностью  $1/\Delta$ ) распределенной в интервале  $(\Sigma, \Sigma + \Delta)$ , причем  $\Sigma, \Delta \gg 1$ . Рандомизированный алгоритм строится для вычисления осредненной по реализациям среды вероятности прохождения  $p = \text{Er}(\sigma)$ . В данном случае  $p(\sigma) = e^{-\sigma}$ , и возможна асимптотическая (при  $\Sigma, \Delta \rightarrow \infty$ ) оценка  $p = \text{Er}(\sigma) \asymp e^{-\Sigma}/\Delta$ . Предполагается, что элементарная оценка  $\xi(\sigma; \Omega)$  здесь является “бернуллиевской”, т. е.  $\xi(\sigma; \Omega) = 1$  с вероятностью  $p(\sigma)$  и  $\xi(\sigma; \Omega) = 0$  с вероятностью  $1 - p(\sigma)$ . При этом

$$d_0 \asymp p^2 \frac{\Delta}{2}, \quad d_1 \asymp p, \quad n_{\text{opt}} \asymp \sqrt{\frac{t_0}{t_1} \frac{2}{p\Delta}} \asymp \sqrt{2 \frac{t_0}{t_1}} e^{\Sigma},$$

$$S_{n_{\text{opt}}} \asymp \left( \sqrt{\frac{\Delta}{2}} p^2 t_0 + \sqrt{p t_1} \right)^2 \asymp p t_1 \asymp S_1 \left( 1 + \frac{t_0}{t_1} \right)^{-1},$$

так как для оценки без расщепления имеем  $S_1 \asymp d_1(t_1 + t_0) \asymp p(t_1 + t_0)$ . Таким образом, эффективность расщепления здесь определяется отношением  $t_0/t_1$ . Для реальных задач это отношение может принимать большие значения с учетом того, что  $t_1$  ограничено величиной  $C/p_c$ , если реализуется прямое моделирование поглощения частицы при столкновении соответственно заданной вероятности  $p_c$  [5]. При этом соотношение между  $d_0$  и  $d_1$ , и тем самым между  $S_{n_{\text{opt}}}$  и  $S_1$ , может быть близким к полученному модельному. С другой стороны, приведенная оценка показывает, что не всегда целесообразно использовать  $n > 1$ .

В реальных задачах аналитические оценки коэффициентов в формуле (2) затруднительны, поэтому их целесообразно оценивать, как указано в [1], на основе предварительной статистической оценки величин  $D\zeta_n, T_n$  для двух значений  $n = n_1, n_2$  (по возможности близких к  $n_{\text{opt}}$ ), т. е. путем решения уравнений:

$$d_0 + \frac{d_1}{n_i} = \hat{D}\zeta_{n_i}, \quad t_0 + n_i t_i = \hat{T}_{n_i}, \quad i = 1, 2. \quad (4)$$

Методика, основанная на (2), требует уточнения в тех случаях, когда “достраивание” реализации  $\sigma$  происходит при последовательном моделировании траекторий  $\Omega_k$  [6]. При этом величина трудоемкости  $S_n$  нелинейно, а в реальных задачах сложно, зависит от  $n$  так, что эффективное значение отношения  $t_0/t_1$  и тем самым  $n_{\text{opt}}$  уменьшается. Однако можно предположить, что в представлении  $T_n = t_0 + n\varphi(n)t_1$  функция  $\varphi(n)$  в некоторой окрестности  $n_{\text{opt}}$  меняется существенно слабее, чем  $n$ ; следовательно, уравнение (4) с выражением (2) могут эффективно уточнять оценку величины  $n_{\text{opt}}$ . Например, если после моделирования траектории  $\Omega_k$  число операций для построения  $\Omega_{k+1}$  уменьшается на сравнительно малую величину  $t_2$ , то можно положить  $\varphi(n) = 1 - t_2(n-1)/2$ , причем  $n_{\text{opt}}$  уменьшается вследствие связанного с этим преобразованием уменьшения  $t_0$ . Отметим, что предлагаемая методика оптимизации расщепления непосредственно распространяется на моменты (1) путем повторения реализации группы траекторий  $\{\Omega_k\}$  независимо  $n$  раз.

## 2. Оптимизация оценки осредненных распределений

Пусть для начала  $\varphi(x; \sigma)$  — некоторая одномерная (по  $x$ ) функциональная характеристика задачи. Необходимо оценить осредненную функцию  $f(x) = \mathbb{E}\varphi(x; \sigma)$  с помощью численного моделирования параметра  $\sigma$  и соответствующих траекторий  $\Omega$ . Практически эффективной для этой цели может быть универсальная статистическая ядерная оценка Парзена–Розенблатта [7] с прямоугольным (“равномерным”) ядром (см. также [8]). Она строится на основе статистической оценки функционалов вида

$$J_{\Delta} = \int f(x')I_{\Delta}(x') dx' = \mathbb{E} \int \varphi(x'; \sigma)I_{\Delta}(x') dx',$$

где  $I_{\Delta}(x')$  — индикатор интервала  $\Delta = \left(x - \frac{\delta}{2}, x + \frac{\delta}{2}\right)$ . Предполагается, что постановка задачи допускает построение бернуллиевской оценки функционалов  $J_{\Delta}(\sigma) = \int \varphi(x'; \sigma) \times I_{\Delta}(x') dx'$  путем подсчета числа траекторий  $\Omega$ , невозвратно “посетивших” интервал  $\Delta$ . В задачах теории переноса частиц  $\varphi(x'; \sigma)$  — это, в частности, стохастическая плотность распределения числа частиц в точках их “гибели”, например, вследствие невозвратного вылета из среды. Вследствие соотношения (1) имеет место статистическая оценка

$$J_{\Delta} = \mathbb{E}J_{\Delta}(\sigma) \approx \frac{n_{\Delta}}{N},$$

где  $n_{\Delta}$  — число траекторий частиц, “посетивших” интервал  $\Delta$  в выборке  $\{(\sigma_i, \Omega_i)\}$  ( $i = 1, \dots, N$ ), так как  $\mathbb{E}_{\sigma} \mathbb{E}_{\Omega} n_{\Delta} = NJ_{\Delta}$ .

Средний квадрат погрешности оценки  $f(x) \approx n_{\Delta}/(N\delta)$  равен (см., например, [8])

$$\begin{aligned} \varepsilon^2(x; N, \delta) &= \mathbb{E} \left[ f(x) - \frac{n_{\Delta}}{N\delta} \right]^2 = \mathbb{D} \left( \frac{n_{\Delta}}{N\delta} \right) + \left( f(x) - \frac{J_{\Delta}}{\delta} \right)^2 \\ &\approx \frac{f(x)}{N\delta} + (f''(x))^2 \frac{\delta^4}{576} \end{aligned} \quad (5)$$

с относительной погрешностью, убывающей до нуля при  $N \rightarrow \infty$ ,  $\delta \rightarrow 0$  и  $N\delta \rightarrow \infty$ . Минимизируя (5) соответственно [8], получаем

$$\delta_0^5(x) = \frac{144 f(x)}{N(f''(x))^2}, \quad \varepsilon^2(x; N, \delta_0) \approx \frac{5}{4} \frac{f(x)}{\delta_0(x)N} \asymp N^{-\frac{4}{5}}.$$

Отметим, что в [9] для оценки  $f(x)$  и  $f''(x)$  была использована наилучшая в метрике  $L_2$  квадратическая аппроксимация функции  $f(x)$  в интервале  $\Delta_0 \supset \Delta$  с помощью полиномов Лежандра порядков 0, 1, 2. Так же, как в [10], в работе [9] для оптимизации ядерной оценки была использована “микрोगруппированная” выборка с шагом  $h \ll \varepsilon / \max_x |f'(x)|$ . При этом среднее число операций в алгоритме практически не зависит от  $\delta$ .

Целью настоящего пункта работы является минимизация трудоемкости оценки соответственно (5), рассмотренным в п. 1 методом расщепления с параметром  $n$ . Здесь целесообразно осреднить соотношение (5) по  $x$ , т. е. по аналогии с [8] минимизировать величину

$$\varepsilon^2(N, \delta) = \int \varepsilon^2(x; N, \delta) dx = \frac{d}{N\delta} + f_0 \delta^4,$$

где  $d = \int f(x) dx$ ,  $f_0 = \int (f''(x))^2 dx / 576$ , после замены  $N$  на  $Nn$ .

**Теорема 1.** *Минимальное значение величины*

$$S^*(n, \delta) = \varepsilon^2(Nn, \delta)T_n = \left( \frac{d}{Nn\delta} + f_0\delta^4 \right) (t_0 + nt_1)$$

достигается при

$$\delta = \delta^* = \left( \frac{t_1}{t_0} \frac{d}{16f_0N} \right)^{\frac{1}{5}}, \quad n = n^* = \left( \frac{t_0}{t_1} \frac{d}{f_0} \frac{1}{(\delta^*)^5 N} \right)^{\frac{1}{2}} = 4 \frac{t_0}{t_1},$$

причем

$$\varepsilon^2(Nn^*, \delta^*) = \frac{5}{16} \frac{t_1 d}{t_0 N \delta^*} \asymp N^{-\frac{4}{5}}.$$

**Доказательство.** Поскольку предполагается независимость  $t_0, t_1$  от  $\delta$ , то согласно (3) величина  $\delta^*$  после несложных выкладок получается из уравнения

$$\frac{\partial}{\partial \delta} \left( \sqrt{f_0\delta^4 t_0} + \sqrt{\frac{t_1 d}{N\delta}} \right)^2 = 0.$$

Далее  $n^*$  получается из (2) при  $d_0 = f_0(\delta^*)^4, d_1 = d/(N\delta^*)$ .  $\square$

Напомним, что в случае аналоговой бернулливской оценки функционала  $J_\Delta$  используется значение  $d = \int f(x) dx$ . Для несмещенной весовой модификации моделирования во всех выражениях, начиная с (5), соответственно [9] символ  $f(x)$  заменяется на  $f_w(x)$ , если вспомогательный вес частицы  $w$  ограничен, т. е.  $w \leq C < +\infty$ . Здесь  $f_w(x)$  — плотность распределения квадрата веса. Заметим, что в задаче о переносе частиц можно не “разыгрывать” поглощение, при этом вспомогательный вес равен  $\exp(-\tau_c)$ , где  $\tau_c$  — “оптическая” длина траектории относительно коэффициента поглощения (см., например, [2, 5]).

Перейдем теперь к точной формулировке задачи оптимизации рассматриваемой рандомизированной ядерной оценки. Для этого потребуется следующая

**Лемма 1.** *Если средний квадрат погрешности статистической функциональной оценки с параметром  $\beta$  равен  $D(\beta)N^{-\alpha}$ , а среднее число операций для вычисления выборочного значения оценки равно  $t(\beta)$ , где  $N$  — объем выборки, то оптимальное (по критерию трудоемкости вычислений) значение  $\beta$  равно*

$$\arg \min_{\beta} D^{1/\alpha}(\beta)t(\beta) = \arg \min_{\beta} D(\beta)t^\alpha(\beta).$$

**Доказательство.** По определению (см. [4]) трудоемкость вычислений — это среднее число  $S$  вычислительных операций, необходимых для достижения заданной погрешности  $\varepsilon$ . В условиях леммы  $\varepsilon^2 = D(\beta)N^{-\alpha}$ , откуда  $N = D^{1/\alpha}(\beta)\varepsilon^{-2/\alpha}$  и

$$S(\beta) = D^{1/\alpha}(\beta)t(\beta)\varepsilon^{-2/\alpha}. \quad \square$$

Таким образом, справедлива

**Теорема 2.** *Трудоемкость рандомизированной ядерной оценки функции  $f(x)$  асимптотически по  $N$  определяется параметрами  $n_0^*, \delta_0^*$ , минимизирующими величину*

$$\varepsilon^2(Nn, \delta)(t_0 + nt_1)^{4/5}.$$

При этом сохраняется асимптотика  $\varepsilon^2(Nn_0^*, \delta_0^*) \asymp N^{-4/5}$ .

Представленную в теореме 2 задачу минимизации можно решать численно. В первом приближении  $n_0^* \approx n^*$ ,  $\delta_0^* \approx \delta^*$ , так как

$$S_0^*(n, \delta) \leq S^*(n, \delta)t_0^{-1/5}$$

и  $(t_0 + nt_1)^{1/5}$  — сравнительно слабо меняющаяся функция аргумента  $n$ .

Дополнительные исследования показали, что  $S(1, \delta_0)/S(n^*, \delta^*) = 0.8(1 + t_0/t_1)$ , причем использование  $n_0^*$ ,  $\delta_0^*$  может увеличить такую оценку с учетом примера из п. 1 лишь до  $1 + t_0/t_1$ .

Отметим, что в случае указанной в п. 1 нелинейной зависимости величины  $T_n = t_0 + nt_1$  от  $n$  значение  $n^*$  и тем самым отношение  $t_0/t_1$  можно уточнить с помощью численной оптимизации алгоритма расщепления для функционала  $J = \int f(x) dx$  на основе соотношений (4).

Рассмотрим теперь обобщение полученных результатов на многомерный случай, т. е. когда  $x \in R^m$ . Для соответствующей ядерной оценки с “гиперкубическим” ядром (с ребром  $\delta$ ) так же, как в одномерном случае, согласно [11] получаются следующие выражения:

$$\varepsilon_m^2(x, N, \delta) \approx \frac{f(x)}{N\delta^m} + F_m(x)\delta^4, \quad \varepsilon^2(N, \delta) = \frac{d}{N\delta^m} + f_0^{(m)}\delta^4,$$

где  $F_m(x) = (\sum_{i=1}^m f_i''(x))^2 / 576$ ,  $f_0^{(m)} = \int F_m(x) dx$ .

Отсюда получаем

$$\delta_0^{m+4}(x) = \frac{mf(x)}{4NF_m(x)}, \quad \varepsilon_m^2(x; N, \delta_0) = \delta_0^{-m} \frac{f(x)}{N} \frac{4+m}{4} \asymp N^{-\frac{4}{4+m}}.$$

По аналогии со сказанным выше для алгоритма с расщеплением далее имеем

$$\delta_m^* = \left( \frac{m^2}{16} \frac{t_1 d}{t_0 f_0^{(m)}} \frac{1}{N} \right)^{\frac{1}{m+4}}, \quad n^* = \frac{4}{m} \frac{t_0}{t_1}, \quad \varepsilon^2(Nn^*, \delta^*) = \frac{t_1 dm(4+m)}{16t_0 N(\delta^*)^m} \asymp N^{-\frac{4}{4+m}},$$

причем асимптотически точная оптимизация получается путем минимизации величины  $\varepsilon_m^2(Nn, \delta)(t_0 + nt_1)^{4/(4+m)}$ .

Это обобщение соответствует случаю “равномасштабных” координат вектора  $x = (x^{(1)}, \dots, x^{(m)})$ . В противном случае следует, как обычно, использовать масштабирование  $\delta^{(k)} = c_k \delta$  ( $k = 1, \dots, m$ ). При этом в полученных соотношениях  $f(x)$  заменяется на  $f(x) / \prod_{k=1}^m c_k$ , а  $f_i''(x)$  — на  $c_i^2 f_i''(x)$ . Здесь  $S(1, \delta_0)/S(n^*, \delta^*) = 4(4+m)^{-1}(1 + t_0/t_1)$ .

В заключение заметим, что предложенный Н.Н. Ченцовым для использования в рамках численного статистического моделирования рандомизированный проекционный метод [12] соответственно (1) переносится на оценку осредненных распределений. Однако, как показывают расчеты, этот метод может быть практически эффективным лишь в случае достаточной гладкости оцениваемой одномерной функции или ее отношения к некоторой вспомогательной плотности вероятностей (см., например, [13]). Многомерное обобщение при этом весьма затруднительно.

### 3. Оценка моментов нелинейного функционала

**3.1.** В настоящем пункте рассматриваются нелинейные случайные функционалы вида

$$L(\sigma) = \Phi(J(\sigma)), \quad (6)$$

где  $\Phi$  — некоторая нелинейная функция, а  $J(\sigma)$  — линейный функционал, рассмотренный ранее в пунктах 1, 2.

Рандомизированные алгоритмы для оценки моментов  $EL^i(\sigma)$  ( $i = 1, \dots, m$ ) можно построить по аналогии с [14] (где рассматривалась функция  $\Phi(J) = \sqrt[n]{J}$ ) на основе степенной аппроксимации

$$\Phi^i(J(\sigma)) \approx \Phi_n^{(i)}(J(\sigma)) = \sum_{s=1}^n a_s^{(i)} (J(\sigma) - \hat{J})^s, \quad (7)$$

где

$$a_s^{(i)} = \frac{1}{s!} \left. \frac{d^s \Phi^i(x)}{dx^s} \right|_{x=\hat{J}},$$

а  $\hat{J}$  — предварительно построенная достаточно точная статистическая оценка величины  $EJ$ . Отметим, что здесь оценка  $\hat{J}$  рассматривается как детерминированная; это не нарушает сходимости по  $n$  в (7) и позволяет обычным способом оценивать дисперсию статистической оценки величины  $E\Phi_n^{(i)}$ . Из (7) получаем

$$EL^i(\sigma) \approx \sum_{s=1}^n a_s^{(i)} E(J(\sigma) - \hat{J})^s.$$

Рандомизированные оценки  $\zeta_n^{(s)}$  моментов  $E(J(\sigma) - \hat{J})^s$  строятся соответственно (1) с использованием базовой серии условно независимых траекторий  $\{\Omega_k\}$  ( $k = 1, \dots, n$ ), причем  $\xi_k(\Omega_k; \sigma)$  в (1) заменяется на  $\hat{\xi}(\Omega_k; \sigma) = \xi_k(\Omega_k; \sigma) - \hat{J}$ . При этом целесообразно использовать все различные последовательности порядка  $s$ , полученные из базовой серии.

Пусть  $Q_s = \{F_1^{(s)}, \dots, F_q^{(s)}\} = \{\{l_1, \dots, l_s\}_j\}$  — множество различных наборов индексов, т. е.  $F_j^{(s)} \subset \{1, \dots, n\}$ . Число наборов  $F_j^{(s)}$  в  $Q_s$  равно числу сочетаний  $q = C_n^s$ . Следовательно, можно использовать следующую несмещенную оценку момента  $E(J(\sigma) - \hat{J})^s$ :

$$\zeta_n^{(s)} = \frac{1}{C_n^s} \sum_{j=1}^{C_n^s} \prod_{k \in F_j^{(s)}} \hat{\xi}(\Omega_k, \sigma). \quad (8)$$

Таким образом получается оценка

$$EL^i(\sigma) \approx E \sum_{s=1}^n a_s^{(i)} \zeta_n^{(s)}, \quad (9)$$

которая реализуется на основе двойной рандомизации, как указано в п. 1, строится реализация параметров  $\sigma$ , затем моделируется серия траекторий  $\{\Omega_k\}$  ( $k = 1, \dots, n$ ) и вычисляется элементарное выборочное значение статистической оценки величины (9). Осреднение таких значений, а также их квадратов дает статистическую оценку момента  $EL^i(\sigma)$  и ее среднеквадратической погрешности.



**3.2.** Несмотря на зависимость слагаемых в (8), использование этого выражения, как показали расчеты при выполнении работы [14], может существенно уменьшить статистическую погрешность резульативной оценки сравнительно с использованием одного набора  $\Omega_1, \dots, \Omega_s$ . Это можно объяснить следующим образом. Нетрудно заметить, что если  $J(\sigma) = E_{\Omega} \xi(\Omega; \sigma) \equiv J$ , то при  $\hat{J} = J$  слагаемые в сумме из (8) попарно условно некоррелированы. Поэтому в условиях применимости теории малых возмущений (предполагавшихся в [14]), т. е. когда  $J(\sigma) \approx J \forall \sigma$ , имеем

$$D(\zeta_n^{(s)} | \sigma) \approx \frac{1}{C_n^s} D\left(\prod_{k \in F_1^{(s)}} \hat{\xi}(\Omega_k, \sigma)\right).$$

Остается заметить, что в равенстве

$$D(\zeta_n^{(s)}) = DE(\zeta_n^{(s)} | \sigma) + ED(\zeta_n^{(s)} | \sigma)$$

в условиях применимости теории малых возмущений второе слагаемое обычно преобладает.

В связи со сказанным выше для реализации оценки (9) целесообразно моделировать  $(n+1)$  траекторий, т. е. использовать оценку величины  $\Phi_{n+1}^{(i)}$  без последнего слагаемого, для которого объем суммы в (8) равен единице.

**3.3.** При выполнении работы [14] Г.З. Лотова построила экономичный алгоритм для последовательного вычисления величин  $\zeta_n^{(1)}, \dots, \zeta_n^{(s)}$ , связанный с последовательностью частичных сумм:

$$\begin{aligned} S_k^{(1)} &= \sum_{j=k}^n \hat{\xi}(\Omega_j, \sigma), & S_k^{(2)} &= \sum_{j=k}^{n-1} \hat{\xi}(\Omega_j, \sigma) S_{j+1}^{(1)}, \\ S_k^{(s)} &= \sum_{j=i}^{n+1-s} \hat{\xi}(\Omega_j, \sigma) S_{j+1}^{(s-1)}, & k &= 1, \dots, (n+1-s). \end{aligned}$$

В [14] методом математической индукции показано, что

$$S_1^{(s)} = \sum_{j=1}^{C_n^s} \prod_{k \in F_j^{(s)}} \hat{\xi}(\Omega_k, \sigma), \quad \zeta_n^{(s)} = S_1^{(s)} / C_n^s.$$

Заметим, что для вычисления  $S_k^{(n)}$  используются траектории  $\Omega_k, \dots, \Omega_n$ .

Логически более простой алгоритм состоит в последовательном построении произведений из (8) следующим образом: после моделирования траектории  $\Omega_i$  последовательность произведений порядка  $s+1$  дополняется произведениями порядка  $s$ , домноженными на  $\hat{\xi}(\Omega_i, \sigma)$  ( $s = 1, \dots, i-1$ ). В финале, после моделирования базовой серии  $\{\Omega_k\}$ , все полученные последовательности, в отличие от алгоритма из [14], надо независимо просуммировать, что существенно увеличивает сравнительную трудоемкость простого алгоритма. Число финальных сложений в этом алгоритме, очевидно, равно  $\sum_{s=0}^n C_n^s = 2^n$ , а число умножений определяется соотношением

$$\sum_{s=1}^n (s-1)C_n^s = \sum_{s=0}^n sC_n^s - 2^n + 1 = [(1+x)^n]'_{x=1} - 2^n + 1 = (n-2)2^{n-1} + 1.$$

#### 4. Оценка функции распределения нелинейного функционала

**4.1.** Вероятность  $P(\Phi(J(\sigma)) < x)$  невозможно оценить с помощью рандомизации моделирования. Поэтому здесь целесообразно использовать какую-либо глобальную оценку распределения, учитывая, что практически (особенно в условиях теории малых возмущений) может быть эффективной гауссовская аппроксимация распределения функционала  $J(\sigma)$  с уточнением соответствующим ортогональным разложением. Поэтому целесообразно использовать соотношение

$$P(\Phi(J(\sigma)) < x) = P(J(\sigma) < \Phi^{-1}(x)),$$

а для плотности  $f(y)$  распределения случайной величины  $J(\sigma)$  — приближение

$$f(y) \approx f_M(y) = f_{\text{norm}}(y; a, d^2) \left( \psi_0 + \sum_{i=1}^M c_i \psi_i([y - a]/d) \right), \quad \psi_0 \equiv 1. \quad (10)$$

Здесь  $a$  и  $d^2$  — оценки математического ожидания и дисперсии случайной величины  $J(\sigma)$ ,  $\{\psi_i\}$  — полиномы Эрмита, ортонормированные с весом

$$f_{\text{norm}}(y; a, d^2) = \frac{\exp(-(y - a)^2/(2d^2))}{\sqrt{2\pi d^2}}.$$

При этом  $c_i = E\psi_i([J(\sigma) - a]/d)$ ,  $i = 1, \dots, M$ . Если оценки параметров  $a$ ,  $d$  и оценки  $\tilde{c}_i$  коэффициентов  $c_i$  строятся по одной и той же выборке, то  $\tilde{c}_1 = \tilde{c}_2 = 0$  [10]. Поэтому целесообразно реализовать (10) с предварительно оцененными параметрами; это подтверждается проведенным численным тестированием получаемых на основе (10) оценок вероятности  $P = P(J(\sigma) > 1)$  для рассматриваемой в [14] модельной задачи.

Использование оценки (10) затрудняется ее возможной медленной сходимостью по  $M$  при недостаточной гладкости плотности  $f(y)$ . Эвристическим критерием выбора  $M$  может служить совпадение, в пределах требуемой точности, оценок искомой вероятности для значений  $M$  и  $M + 1$ .

Целесообразно также определять порядок аппроксимации в (10) на основе достаточно точных численно-аналитических оценок значений  $J$  для какой-либо упрощенной модели задачи. В работе [14] с этой целью использовалось диффузионное приближение для гомогенизированных реализаций среды. Как показали расчеты, во избежание потери арифметической точности и для оценки дисперсий  $D\tilde{c}_i$  необходимо осреднять соответствующие выборочные значения (и их квадраты), а не использовать для этого оценки моментов  $EJ^s(\sigma)$  ( $i = 1, \dots, M$ ). В случае статистического моделирования процесса требуемый результат получается на этой основе путем рандомизированной оценки значений  $c_i$ ,  $i = 1, \dots, M$ , с использованием  $M$  условно-независимых траекторий.

**4.2.** В работе [14] исследуются флуктуации коэффициента  $k(\sigma)$  размножения частиц в среде со случайной плотностью  $\sigma(r)$ ,  $r \in R^3$ . Коэффициент  $k$  является ведущим собственным числом соответствующего положительного интегрального оператора:  $kf = Kf$  (см., например, [15]). Стандартные алгоритмы метода Монте-Карло для оценки величины  $k$  фактически реализуют метод Кэллога (см., например, [15, 16]), т. е. предельное соотношение:

$$k = \lim_{m \rightarrow \infty} \frac{(K^{m+1} f_0, h)}{(K^m f_0, h)}. \quad (11)$$

Как указано в [14], такие алгоритмы не эффективны для рандомизированной оценки величин  $E k(\sigma)$ ,  $D k(\sigma)$  и  $P(k(\sigma) > 1)$ . В связи с этим в [14] было сформулировано предельное соотношение:

$$k = \lim_{m \rightarrow \infty} k_m, \quad k_m = \sqrt[m]{(K^m f_0, h)}. \quad (12)$$

В [14] дано обоснование предела (12) по аналогии с обоснованием предела (11), представленным в [15]. Значение  $m$  в приближенной формуле  $k \approx k_m$  подбирается на основе предварительных расчетов, возможно, с помощью какой-либо полуаналитической оценки [14]. В (12) оператор  $K$  зависит от  $\sigma$  и можно полагать  $(K^m f_0, h) = J(\sigma)$ , так как для оценки моментов  $E(K^m f_0, h)^s$  можно использовать рандомизированные алгоритмы метода Монте-Карло (см. п. 1). Таким образом, соотношение (12) приводится к виду (6), т. е. изложенное в настоящем пункте представляет собой обобщение и некоторое пояснение результатов работы [14].

Дополнительно заметим, что в [17] рассмотрены разработанные авторами различные аспекты построения и исследования алгоритмов для оценки вероятностных моментов решения уравнения переноса излучения, проходящего через случайную среду. Представлены построенные для этого реалистические вычислительные модели экспоненциально коррелированных неотрицательных однородных изотропных случайных полей плотности среды  $\sigma(r)$ , реализации которых практически близки к непрерывным, а одномерные распределения — к гауссовским. Реалистичность предложенных моделей подтверждена визуализацией вычисленного на этой основе поля освещенности для проходящего через среду излучения.

Эти модели имеют вид

$$\sigma_n(r) = \sum_{i=1}^n \sigma_i^{(n)}(r),$$

где  $\{\sigma_i^{(n)}\}$  — независимые реализации некоторого “элементарного мозаичного” неотрицательного случайного поля с экспоненциальной корреляционной функцией и одномерным “бета”-распределением. Ограниченность поля  $\sigma_i^{(n)}$  позволяет моделировать длину  $l$  свободного пробега кванта излучения в нем методом “максимального сечения” (иначе — “дельта рассеяния”) [18]. При этом длина свободного пробега в соответствующем реалистическом поле  $\sigma(r)$  получается по формуле  $l = \min_i l_i$ . Такой способ моделирования длины свободного пробега (включая метод “дельта-рассеяния”), как указано в [19], вытекает непосредственно из инвариантности свойства пуассоновости случайных точечных потоков относительно операций объединения и случайного “бернуллиевского” прореживания. Отметим, что соответствующие алгоритмы для представленных выше реалистических моделей  $\sigma(r)$  разработаны в [6]. Эти модели и алгоритмы оказались полезными, в частности, для решения практически важной задачи осреднения уравнения переноса излучения через случайную среду [2].

Автор благодарен своим ученикам, в особенности к.ф.-м.н. Г.З. Лотовой и к.ф.-м.н. А.Ю. Амбосу, за активное участие в разработке и реализацию рандомизированных алгоритмов метода Монте-Карло.

## Литература

1. **Михайлов Г.А.** Оптимизация весовых методов Монте-Карло. — М.: Наука, 1987; Перевод: Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 1992.
2. **Амбос А.Ю., Михайлов Г.А.** Эффективное осреднение стохастических радиационных моделей на основе статистического моделирования // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 5. — С. 896–908; Перевод: Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Effective averaging of stochastic radiative models based on Monte Carlo simulation // Comput. Maths. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, iss. 5. — P. 881–893.
3. **Михайлов Г.А.** Эффективные алгоритмы метода Монте-Карло для вычисления корреляционных характеристик условных математических ожиданий // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 1977. — Т. 17, № 1. — С. 246–249.
4. **Михайлов Г.А., Войгишек А.В.** Численное статистическое моделирование. Методы Монте-Карло. — М.: Изд. центр “Академия”, 2006. — (Учебное пособие).
5. **Марчук Г.И., Михайлов Г.А., Назаралиев М.А., Дарбинян Р.А., Каргин Б.А., Елепов В.С.** Методы Монте-Карло в атмосферной оптике / Под общей ред. Г.И. Марчука — Новосибирск: Наука, 1976; Перевод: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinjan R.A., Kargin B.A., and Elepov B.S. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1980.
6. **Амбос А.Ю.** Вычислительные модели мозаичных однородных изотропных случайных полей и задачи переноса излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 19–32; Перевод: Ambos A.Yu. Numerical Models of Mosaic Homogeneous Isotropic Random Fields and Problems of Radiative Transfer // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 1. — P. 12–23.
7. **Parsen E.** On estimation of a probability density function and mode // Ann. Math. Statist. — 1962. — № 35. — P. 1065–1076.
8. **Боровков А.А.** Математическая статистика. — Новосибирск: Изд-во ИМ СО РАН, 1997.
9. **Mikhailov G.A., Prigarin S.M., and Rozhenko S.A.** Comparative analysis of vector algorithms for statistical modelling of radiative transfer process // Russ. J. Num. Anal. Math. Model. — 2018. — Vol. 33, № 4. — P. 220–229.
10. **Lotova G.Z.** Monte Carlo algorithms for calculation of diffusive characteristics of an electron avalanche in gases // Russ. J. Num. Anal. Math. Model. — 2011. — Vol. 31, № 6. — P. 369–377.
11. **Епаничников В.А.** Непараметрическая оценка многомерной плотности вероятности // Теория вероятности и ее применения. — 1969. — Т. 14, вып. 1. — С. 156–161; Перевод: Epanchnikov V.A. Non-parametric estimation of a multivariate probability density // Theory Probab. Appl. — 1969. — Vol. 14, № 1. — P. 153–158.
12. **Ченцов Н.Н.** Статистические решающие правила и оптимальные выводы. — М.: Наука, 1972.
13. **Михайлов Г.А., Трачева Н.В., Ухинов С.А.** Рандомизированный проекционный метод для оценки угловых распределений поляризованного излучения на основе численного статистического моделирования // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2016. — Т. 56, № 9. — С. 1560–1570; Перевод: Mikhailov G.A., Tracheva N.V., Ukhinov S.A. Randomized projection method for estimating angular distributions of polarized radiation based on numerical statistical modeling // Comput. Maths. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, № 9. — P. 1540–1550.
14. **Михайлов Г.А., Лотова Г.З.** Методы Монте-Карло для оценки вероятностных распределений параметров критичности процесса переноса частиц в случайно возмущенной среде // Журн. вычисл. матем. и мат. физики. — 2018. — Т. 58, № 11. — С. 1900–1910; Перевод: Mikhailov G.A., Lotova G.Z. Monte Carlo methods for estimating the probability distributions of criticality parameters of particle transport in a randomly pertubated medium // Comput. Maths. and Math. Phys. — 2018. — Vol. 58, № 11. — P. 1828–1837.

15. **Владимиров В.С.** О применении метода Монте-Карло для отыскания наименьшего характеристического числа и соответствующей собственной функции линейного интегрального уравнения // Теория вероятностей и ее применение. — 1956. — Т. 1, № 1. — С. 113–130.
16. **Ермаков С.М., Михайлов Г.А.** Статистическое моделирование. — М.: Наука, 1982.
17. **Амбос А.Ю., Михайлов Г.А.** Оценка методом Монте-Карло функциональных характеристик поля интенсивности, проходящего через случайную среду излучения // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2018. — Т. 21, № 4. — С. 349–365; Перевод: Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Monte Carlo Estimation of Functional Characteristics of Field Intensity of Radiation Passing through a Random Medium // Numerical Analysis and Applications. — 2018. — Vol. 11, № 4. — P. 279–292.
18. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., and Longworth S.** Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems. — 1965. — P. 557–557.
19. **Аверина Т.А., Михайлов Г.А.** Алгоритмы точного и приближенного статистического моделирования пуассоновских ансамблей // Журн. выч. матем. и мат. физики. — 2010. — Т. 50, № 6. — С. 1005–1016; Перевод: Averina T.A., Mikhailov G.A. Algorithms for exact and approximate statistical simulation of Poisson ensembles // Comput. Maths. and Math. Phys. — 2010. — Vol. 50, iss. 6. — P. 951–962.
20. **Беляев Ю.К.** Вероятность и математическая статистика. Энциклопедия. — М.: Научн. изд-во БРЭ, 1999.

*Поступила в редакцию 21 июня 2018 г.*

*Принята к публикации 21 января 2019 г.*

## Литература в транслитерации

1. **Mikhaylov G.A.** Optimizatsiya vesovykh metodov Monte-Karlo. — М.: Nauka, 1987; Pervod: Mikhailov G.A. Optimization of Weighted Monte Carlo Methods. — Springer-Verlag, 1992.
2. **Ambos A.Yu., Mikhaylov G.A.** Effektivnoe osrednenie stohasticheskikh radiatsionnykh modeley na osnove statisticheskogo modelirovaniya // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 2016. — Т. 56, № 5. — С. 896–908; Перевод: Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Effective averaging of stochastic radiative models based on Monte Carlo simulation // Comput. Maths. and Math. Phys. — 2016. — Vol. 56, iss. 5. — P. 881–893.
3. **Mikhaylov G.A.** Effektivnye algoritmy metoda Monte-Karlo dlya vychisleniya korrelyatsionnykh harakteristik usloynykh matematicheskikh ozhidaniy // Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki. — 1977. — Т. 17, № 1. — С. 246–249.
4. **Mikhaylov G.A., Voytishchik A.V.** Chislennoe statisticheskoe modelirovanie. Metody Monte-Karlo. — М.: Izd. tsentr “Akademiya”, 2006. — (Uchebnoe posobie).
5. **Marchuk G.I., Mikhaylov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinjan R.A., Kargin B.A., Elepov V.S.** Metody Monte-Karlo v atmosfernoй optike / Pod obschey red. G.I. Marchuka — Novosibirsk: Nauka, 1976; Pervod: Marchuk G.I., Mikhailov G.A., Nazaraliev M.A., Darbinjan R.A., Kargin B.A., and Elepov V.S. The Monte Carlo Methods in Atmospheric Optics. — Berlin-Heidelberg: Springer, 1980.
6. **Ambos A.Yu.** Vychislitel'nye modeli mozaichnykh odnorodnykh izotropnykh sluchaynykh poley i zadachi perenosа izlucheniya // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / РАН. Sib. otd-ние. — Novosibirsk, 2016. — Т. 19, № 1. — С. 19–32; Перевод: Ambos A.Yu. Numerical Models of Mosaic Homogeneous Isotropic Random Fields and Problems of Radiative Transfer // Numerical Analysis and Applications. — 2016. — Vol. 9, № 1. — P. 12–23.

7. **Parsen E.** On estimation of a probability density function and mode // *Ann. Math. Statist.* — 1962. — № 35. — P. 1065–1076.
8. **Borovkov A.A.** *Matematicheskaya statistika.* — Novosibirsk: Izd-vo IM SO RAN, 1997.
9. **Mikhailov G.A., Prigarin S.M., and Rozhenko S.A.** Comparative analysis of vector algorithms for statistical modelling of radiative transfer process // *Russ. J. Num. Anal. Math. Model.* — 2018. — Vol. 33, № 4. — P. 220–229.
10. **Lotova G.Z.** Monte Carlo algorithms for calculation of diffusive characteristics of an electron avalanche in gases // *Russ. J. Num. Anal. Math. Model.* — 2011. — Vol. 31, № 6. — P. 369–377.
11. **Epanichnikov V.A.** *Neparametricheskaya otsenka mnogomernoy plotnosti veroyatnosti* // *Teoriya veroyatnosti i ee primeneniya.* — 1969. — Т. 14, vyp. 1. — S. 156–161; Перевод: Epanechnikov V.A. Non-parametric estimation of a multivariate probability density // *Theory Probab. Appl.* — 1969. — Vol. 14, № 1. — P. 153–158.
12. **Chentsov N.N.** *Statisticheskie reshayushchie pravila i optimal'nye vyvody.* — М.: Nauka, 1972.
13. **Mikhaylov G.A., Tracheva N.V., Uhinov S.A.** Randomizirovanny proektsionnyy metod dlya otsenki uglovyh raspredeleniy polarizovannogo izlucheniya na osnove chislennogo statisticheskogo modelirovaniya // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 2016 — Т. 56, № 9. — S. 1560–1570; Перевод: Mikhailov G.A., Tracheva N.V., Ukhinov S.A. Randomized projection method for estimating angular distributions of polarized radiation based on numerical statistical modeling // *Comput. Maths. and Math. Phys.* — 2016. — Vol. 56, № 9. — P. 1540–1550.
14. **Mikhaylov G.A., Lotova G.Z.** Metody Monte-Karlo dlya otsenki veroyatnostnyh raspredeleniy parametrov kritichnosti protsessa perenosa chastits v sluchayno vozmushchennoy srede // *Zhurn. vychisl. matem. i mat. fiziki.* — 2018. — Т. 58, № 11. — S. 1900–1910; Перевод: Mikhailov G.A., Lotova G.Z. Monte Carlo methods for estimating the probability distributions of criticality parameters of particle transport in a randomly pertubated medium // *Computational Mathematics and Mathematical Physics.* — 2018. — Vol. 58, № 11. — P. 1828–1837.
15. **Vladimirov V.S.** O primeneni metoda Monte-Karlo dlya otyskaniya naimen'shego harakteristicheskogo chisla i sootvetstvuyushchey sobstvennoy funktsii lineynogo integral'nogo uravneniya // *Teoriya veroyatnostey i ee primeneniye.* — 1956. — Т. 1, № 1. — S. 113–130.
16. **Ermakov S.M., Mikhaylov G.A.** *Statisticheskoe modelirovanie.* — М.: Nauka, 1982.
17. **Ambos A.Yu., Mikhaylov G.A.** Otsenka metodom Monte-Karlo funktsional'nyh harakteristik polya intensivnosti, prohodyashchego cherez sluchaynyuyu sredyu izlucheniya // *Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie.* — Novosibirsk, 2018. — Т. 21, № 4. — S. 349–365; Перевод: Ambos A.Yu., Mikhailov G.A. Monte Carlo Estimation of Functional Characteristics of Field Intensity of Radiation Passing through a Random Medium // *Numerical Analysis and Applications.* — 2018. — Vol. 11, № 4. — P. 279–292.
18. **Woodcock E., Murphy T., Hemmings P., and Longworth S.** Techniques used in the GEM code for Monte Carlo neutronics calculations in reactors and other systems of complex geometry // *Proc. Conf. Applications of Computing Methods to Reactor Problems.* — 1965. — P. 557–557.
19. **Averina T.A., Mikhaylov G.A.** Algoritmy tochnogo i priblizhennogo statisticheskogo modelirovaniya puassonovskih ansambley // *Zhurn. vych. matem. i mat. fiziki.* — 2010. — Т. 50, № 6. — S. 1005–1016; Перевод: Averina T.A., Mikhailov G.A. Algorithms for exact and approximate statistical simulation of Poisson ensembles // *Comput. Maths. and Math. Phys.* — 2010. — Vol. 50, iss. 6. — P. 951–962.
20. **Belyaev Yu.K.** *Veroyatnost' i matematicheskaya statistika. Entsiklopediya.* — М.: Nauchn. izd-vo BPE, 1999.