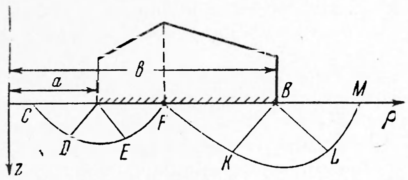
О ВДАВЛИВАНИИ КОЛЬЦЕВОГО ШТАМПА В ПЛАСТИЧЕСКОЕ ПОЛУПРОСТРАНСТВО

В. А. Жалнин, Д. Д. Ивлев, В. С. Мищенко

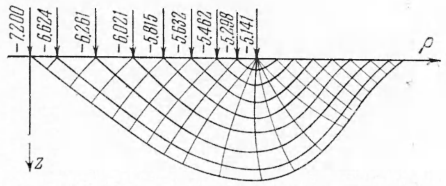
(Воронеж)

Задача о вдавливании кругового штампа в пластическое полупространство рассматривалась А. Ю. Ишлинским [1], Р. Т. Шилдом [2]. Осесимметричные задачи статики сыпучей среды рассматривались в [3].

Ниже рассматривается задача о вдавливании кольцевого штампа в пластическое полупространство. Результаты, полученные численными методами на цифровой машине «Урал-1» ВЦ ВГУ, представлены в виде графиков, позволяющих определить предельную нагрузку для кольцевого штампа произвольных размеров.



Фиг. 1



Фиг. 2

1. Представим, что в полупространство из идеального жестко-пластического материала вдавливается кольцевой штамп, контур которого в плане ограничен двумя концентрическими окружностями радиусов a и b $(a < b)$.

Рассматриваемая задача является осесимметричной. Направим ось z в глубь полупространства, ось ρ — перпендикулярно к ней (фиг. 1).

Уравнения равновесия будут иметь вид

$$\frac{\partial\sigma_\rho}{\partial\rho} + \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial z} + \frac{\sigma_\rho - \sigma_\theta}{\rho} = 0, \qquad \frac{\partial\tau_{\rho z}}{\partial\rho} + \frac{\partial\sigma_z}{\partial z} + \frac{\tau_{\rho z}}{\rho} = 0 \tag{1}$$

Будем считать, что имеет место условие пластичности Треска. Тогда, используя условие соответствия напряженного состояния ребру призмы Треска (условие полной пластичности), получим

$$(\sigma_\rho - \sigma_z)^2 + 4\tau_{\rho z}^2 = 4k^2, \qquad \sigma_\theta = \frac{1}{2}(\sigma_\rho + \sigma_z) \pm k \tag{2}$$

Здесь k — предел текучести.

В дальнейшем все величины, имеющие размерность напряжения, будем считать безразмерными, отнесенными к пределу текучести k.

Условию (2) удовлетворим, полагая

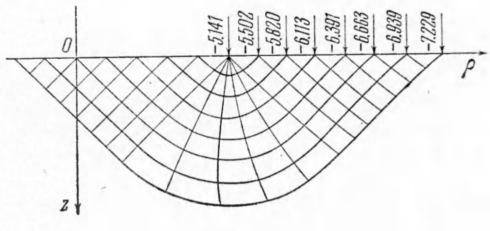
$$\sigma_\rho = -p - k\sin 2\varphi, \qquad \sigma_z = -p + k\sin 2\varphi, \qquad \tau_{\rho z} = k\cos 2\varphi, \qquad \sigma_\theta = -p \pm k \tag{3}$$

Подставляя выражения (3) в уравнения (1), получим

$$\begin{gathered}\frac{\partial p}{\partial\rho} + 2k\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} + 2k\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z} + \frac{k}{\rho}(\sin 2\varphi \pm 1) = 0\\ \frac{\partial p}{\partial z} + 2k\sin 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\rho} - 2k\cos 2\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial z} - \frac{k}{\rho}\cos 2\varphi = 0\end{gathered} \tag{4}$$

Уравнения (4) принадлежат к гиперболическому типу, их характеристики имеют вид

$$\frac{dz}{d\rho} = \operatorname{tg}\varphi \quad (\alpha\text{-линии}), \qquad \frac{dz}{d\rho} = -\operatorname{ctg}\varphi \quad (\beta\text{-линии}) \tag{5}$$



Фиг. 3

Соотношения на характеристиках (5) могут быть записаны в виде

$$dp + 2kd\varphi = -\frac{k}{\rho}(dz \pm d\rho) \quad (\text{вдоль } \alpha\text{-линий}) \tag{6}$$

$$dp - 2kd\varphi = \frac{k}{\rho}(dz \mp d\rho) \quad (\text{вдоль } \beta\text{-линий})$$

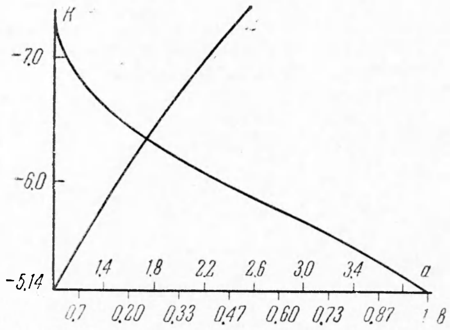
Следует отметить, что выбор знака в соотношениях (3), (6) определяется конкретными условиями задачи.

При вдавливании кольцевого штампа пластическая зона материала возникает как с внешней, так и внутренней стороны штампа.

Так как в данном случае задача сводится к определению решения уравнений гиперболического типа, то построение решения происходит независимо от внутренней (AC) и внешней (BM) частей свободной поверхности пластического материала (фиг. 1).

Задача сводится к построению численным методом предельной нагрузки от обеих частей свободной поверхности (AC, BM) и в определении точки F, соответствующей минимуму предельной нагрузки.

Решение от свободной поверхности BM по существу совпадает с решением А. Ю. Ишлинского [1] и Шилда [2]. В этом случае на BM (фиг. 1) при выдавливании пластического материала происходит его удлинение вдоль оси θ, поэтому $\sigma_\theta > 0$ и в соотношениях (3), (6) следует взять верхний знак. Вдоль оси ρ на BM имеет место сжатие, поэтому $\sigma_\rho < 0$.



Фиг. 4

На фиг. 2 представлена сетка линий скольжения, соответствующая вдавливанию кругового штампа (сетка $BMLKF$ на фиг. 1).

Единственным характерным размером в данном случае будет величина внешнего радиуса b. Все величины, имеющие размерность длины, могут быть отнесены к радиусу b, поэтому показанная на фиг. 2 сетка линий скольжения имеет место для кругового штампа любого радиуса.

В случае построения решения от внутренней части свободной поверхности AC (фиг. 1) вдоль осей θ и ρ будет иметь место сжатие пластического материала, поэтому на AC всегда $\sigma_\theta < 0$, $\sigma_\rho < 0$ и, следовательно, в соотношениях (3), (6) необходимо взять нижний знак.

На фиг. 3 представлена сетка линий скольжения, соответствующая вдавливанию штампа с круговым вырезом (сетка $ACDEF$ на фиг. 1).

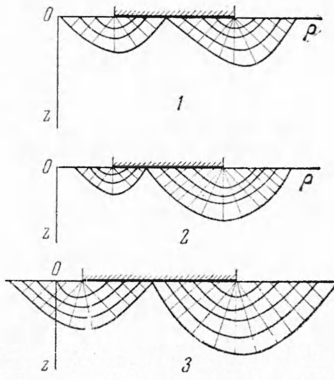
Единственным характерным размером в этом случае будет величина внутреннего радиуса a. Все величины, имеющие размерность длины, могут быть отнесены в этом случае к радиусу a, поэтому показанная на фиг. 3 сетка линий скольжения имеет место для штампа с круговым вырезом любого радиуса.

На фиг. 4 приведены графики, показывающие распределение предельного давления штампа в долях k (шкала k) в зависимости от радиусов a и b (шкала a и b).

Подчеркнем, что решение как от внутренней, так и внешней части свободной поверхности строится независимо одно от другого, поэтому величины a и b играют роль независимых параметров.

Отметим, что убывающая кривая на фиг. 4 соответствует вдавливанию кругового штампа (фиг. 2), возрастающая — штампу с круговым вырезом (фиг. 3). Значения давления растут в обоих случаях от значения — 5.141, соответствующего решению Прандтля.

Для построения конкретного решения при фиксированных размерах a и b следует воспользоваться графиками фиг. 4. Точка F будет определена пересечением кривых давлений, идущих от частей свободной поверхности AC и BM (фиг. 1).



Фиг. 5

Следует иметь в виду, что в зависимости от отношения a / b возможны три случая расположения пластической зоны (фиг. 5).

Первый случай (фиг. 5) имеет место при $a / b = 0.56$. При $a / b > 0.56$ имеет место второй случай (фиг. 5), при $a / b < 0.56$ имеет место третий случай (фиг. 5).

Легко видеть, что построение соответствующего поля скоростей перемещений может быть проведено обычными приемами.

Авторы признательны А. В. Мартынову за содействие в выполнении работы.

Поступила 20 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Ишлинский А. Ю. Осесимметричная задача пластичности и проба Бринелля, ПММ, 1944, т. VIII, вып. 3.
2. Шилд Р. Т. О пластическом течении металла в условиях осевой симметрии. Сб. переводов, Механика, ИИЛ, 1957, № 1.
3. Березанцев В. Г. Осесимметричная задача теории предельного равновесия сыпучей среды. М., Гостехиздат, 1952.