

УДК 517.968

ОБ ОДНОЙ ОСОБЕННОСТИ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ЯДРОМ КОШИ НА ЗАМКНУТОМ КОНТУРЕ В ЗАДАЧАХ ГИДРОДИНАМИКИ

Д. Н. Горелов

Омский филиал Института математики им. С. Л. Соболева СО РАН,
644043 Омск, Россия
E-mail: gorelov@ofim.oscsbras.ru

Теоретически исследованы сингулярные интегральные уравнения первого и второго рода с ядром Коши на предельно узком замкнутом контуре. Установлено, что на предельном контуре исходные уравнения вырождаются. Данная особенность интегральных уравнений с ядром Коши не позволяет корректно решать краевые задачи обтекания тонких аэродинамических профилей, поэтому для решения таких задач предложена система уравнений, составленная из интегральных уравнений первого и второго рода. Результаты исследования протестированы с помощью точного решения задачи обтекания пластины.

Ключевые слова: сингулярные интегральные уравнения, интеграл Коши, формулы Сохоцкого — Племельи.

DOI: 10.15372/PMTF20180408

Плоские краевые задачи гидродинамики, связанные с обтеканием тел, можно свести к решению сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши. Краевые задачи для разомкнутого контура сводятся только к интегральным уравнениям первого рода, а для замкнутых контуров — к уравнениям первого и второго рода. Методы численного решения этих уравнений хорошо изучены [1–5].

Численно решено большое количество задач обтекания аэродинамических профилей, в том числе тестовых задач обтекания профилей Жуковского стационарным потоком [3, 5]. В ходе численных экспериментов установлено, что при уменьшении толщины профиля точность расчетов существенно снижается, а в случае тонких аэродинамических профилей погрешность расчета может быть очень большой. Настоящая работа посвящена теоретическому исследованию этого численного феномена, которое включает вывод интегральных уравнений на предельно узком замкнутом контуре и решение тестовой задачи обтекания пластины.

1. Прежде всего сведем краевую задачу к интегральным уравнениям. При этом ограничимся рассмотрением стационарного потенциального течения идеальной несжимаемой жидкости вокруг замкнутого контура L в плоскости комплексной переменной $z = x + iy$. Границами области течения являются контур обтекаемого тела L и бесконечно удаленная точка $|z| = \infty$. Обозначим через D^+ , D^- области вне замкнутого контура L и внутри него (рис. 1).

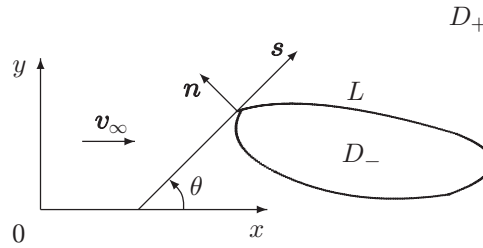


Рис. 1. Схема обтекания замкнутого контура

Введем комплексную скорость $\bar{v}(z) = v_x(x, y) - iv_y(x, y)$, для которой поставим следующую краевую задачу. Пусть в области течения D^+ $\bar{v}(z)$ является аналитической функцией, удовлетворяющей граничным условиям

$$v_n(x, y) = -\operatorname{Im} [e^{i\theta(s)} \bar{v}(z)] = 0, \quad z \in L; \tag{1}$$

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \bar{v}(z) = \bar{v}_\infty. \tag{2}$$

Здесь v_n — нормальная компонента вектора скорости жидкости в точках контура L ; $\theta(s)$ — угол наклона касательной в рассматриваемой точке z контура L ; s — дуговая координата точки z .

Для решения краевой задачи (1), (2) комплексную скорость $\bar{v}(z)$ представим в виде

$$\bar{v}(z) = \bar{v}_\infty + \bar{V}(z), \quad z \in D^+, \tag{3}$$

где $\bar{V}(z)$ — комплексная скорость, индуцируемая контуром L .

Как правило, контур L моделируется с помощью бесконечно тонкого вихревого слоя с интенсивностью $\gamma(s)$. Тогда функция $\bar{V}(z)$ определяется сингулярным интегралом с ядром Коши:

$$\bar{V}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\sigma)}{z - \zeta(\sigma)} d\sigma, \quad \zeta \in L, \quad z \in D^+. \tag{4}$$

Интегрирование по контуру L проводится по часовой стрелке.

Выражения (3), (4) удовлетворяют условию (2) в бесконечно удаленной точке.

Представляя комплексную скорость $\bar{v}(z)$ в виде выражений (3), (4), краевую задачу (1), (2) можно свести к сингулярному интегральному уравнению первого рода относительно неизвестной функции $\gamma(s)$:

$$\operatorname{Im} \left[e^{i\theta(s)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\sigma)}{z - \zeta(\sigma)} d\sigma + \bar{v}_\infty \right) \right] = 0, \quad z \in L. \tag{5}$$

Для этого достаточно подставить выражения (3), (4) в граничные условия (2).

Заметим, что для корректности моделирования замкнутого контура L с помощью вихревого слоя следует поместить в области D^- внутри контура виртуальную жидкость, которая в общем случае движется пассивно вместе с контуром. В случае рассматриваемого неподвижного контура виртуальная жидкость покоится, поэтому в области D^- должно выполняться условие

$$\bar{v}(z) = 0, \quad z \in D^-. \tag{6}$$

Условие (6) позволяет вывести интегральное уравнение второго рода на замкнутом контуре L . Для вывода этого уравнения обозначим предельные значения аналитической

функции $\bar{v}(z)$ при приближении к контуру L из внешней (физической) области D^+ и внутренней (виртуальной) области D^- через \bar{v}^+ и \bar{v}^- соответственно. Эти предельные значения на гладких участках контура L связаны с интенсивностью вихревого слоя γ формулами Сохоцкого — Племели [6]

$$\bar{v}^+(z) = \bar{v}_0(z) - \frac{\gamma(s)}{2} e^{-i\theta(s)}, \quad \bar{v}^-(z) = \bar{v}_0(z) + \frac{\gamma(s)}{2} e^{-i\theta(s)}, \quad \bar{v}_0(z) = \frac{\bar{v}^+(z) + \bar{v}^-(z)}{2}. \quad (7)$$

Из соотношений (7) следует, что с контуром L связаны три комплексные скорости: скорость $\bar{v}_0(z)$ в точках контура L и предельные скорости $\bar{v}^+(z)$, $\bar{v}^-(z)$ при приближении к L из областей D^+ , D^- .

По определению $\bar{v}_0(z) = \bar{v}(z)$ в точках контура L , поэтому

$$\bar{v}^-(z) = e^{i\theta(s)} [\bar{v}_s^-(x, y) - i\bar{v}_n^-(x, y)] = \bar{v}(z) + \frac{\gamma(s)}{2} e^{-i\theta(s)}, \quad z \in L. \quad (8)$$

Условие (6) в точках контура L запишем в виде

$$\bar{v}_s^-(x, y) = 0, \quad \bar{v}_n^-(x, y) = \bar{v}_n^+(x, y) = 0, \quad (x, y) \in L. \quad (9)$$

С учетом (8) из условия (9) получаем сингулярные интегральные уравнения первого (5) и второго рода

$$\frac{\gamma(s)}{2} + \operatorname{Re} \left[e^{i\theta(s)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\sigma)}{z - \zeta(\sigma)} d\sigma + \bar{v}_\infty \right) \right] = 0, \quad z \in L. \quad (10)$$

2. Для выяснения причин снижения точности решения краевой задачи (1), (2) с помощью метода интегральных уравнений исследуем интегральные уравнения (5), (10) на предельно узком контуре. Вывод таких уравнений проведем с использованием формул Сохоцкого — Племели (7).

Рассмотрим замкнутый узкий контур L , составленный из контуров L_1 , L_2 (рис. 2). Обозначим через z_1 , z_2 и σ_1 , σ_2 комплексные и дуговые координаты точек на контурах L_1 , L_2 . Обход контура L совершается по часовой стрелке.

Комплексные скорости, индуцируемые контурами L_1 , L_2 , обозначим через $\bar{V}_1(z)$, $\bar{V}_2(z)$, полагая

$$\bar{V}_k(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_k} \frac{\gamma_k(\sigma_k)}{z - \zeta_k(\sigma_k)} d\sigma_k, \quad \zeta_k \in L_k, \quad k = 1, 2. \quad (11)$$

В случае если контур L является предельно узким, можно полагать, что значения аналитических функций $\bar{V}_1(z)$, $\bar{V}_2(z)$ в точках соседних контуров определяются формулами Сохоцкого — Племели (7). Выберем на контурах L_k точки z_k ($k = 1, 2$) таким образом,

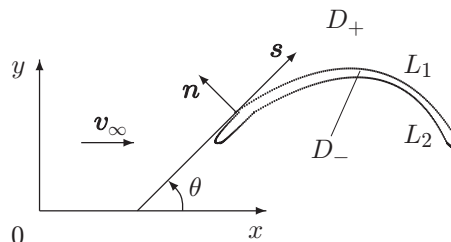


Рис. 2. Схема обтекания узкого замкнутого контура

что $z_2 \rightarrow z_1$, $\theta_2 \rightarrow \theta_1 + \pi$. Тогда с учетом формул Сохоцкого — Племели выражения (11) можно представить в виде

$$z = z_1: \quad \bar{V}_1(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1, \quad (12)$$

$$\bar{V}_2(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_l^{2l} \frac{\gamma_2(\sigma_2)}{z_2 - \zeta_2(\sigma_2)} d\sigma_2 + \frac{\gamma_2(s_2)}{2} e^{-i\theta_2(s_2)};$$

$$z = z_2: \quad \bar{V}_1(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 + \frac{\gamma_1(s_1)}{2} e^{-i\theta_1(s_1)}, \quad (13)$$

$$\bar{V}_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_l^{2l} \frac{\gamma_2(\sigma_2)}{z_2 - \zeta_2(\sigma_2)} d\sigma_2,$$

где s_1, s_2 — дуговые координаты точек z_1, z_2 . При $z_2 \rightarrow z_1$, $\theta_2 \rightarrow \theta_1 + \pi$ дуговые координаты равны $\sigma_2 = 2l - \sigma_1$, $s_2 = 2l - s_1$ (l — длина контуров L_k). В результате имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_l^{2l} \frac{\gamma_2(\sigma_2)}{z_2 - \zeta_2(\sigma_2)} d\sigma_2 &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1, \\ \frac{\gamma_2(s_2)}{2} e^{-i\theta_2(s_2)} &= -\frac{\gamma_2(2l - s_1)}{2} e^{-i\theta_1(s_1)}. \end{aligned} \quad (14)$$

Из (12)–(14) следует

$$\bar{V}_1(z_1) + \bar{V}_2(z_1) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l [\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)] \frac{d\sigma_1}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} - \frac{\gamma_2(2l - s_1)}{2} e^{-i\theta_1(s_1)}, \quad (15)$$

$$\bar{V}_1(z_2) + \bar{V}_2(z_2) = \frac{1}{2\pi i} \int_0^l [\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)] \frac{d\sigma_1}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} + \frac{\gamma_1(s_1)}{2} e^{-i\theta_1(s_1)}.$$

Выражения (11)–(15) позволяют получить интегральные уравнения на предельно узком замкнутом контуре L , составленном из контуров L_1, L_2 . По определению имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\sigma)}{z_1 - \zeta(\sigma)} d\sigma &= \bar{V}_1(z_1) + \bar{V}_2(z_1) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^l [\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)] \frac{d\sigma_1}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} - \frac{\gamma_2(2l - s_1)}{2} e^{-i\theta_1(s_1)}, \quad z_1 \in L_1, \end{aligned} \quad (16)$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\gamma(\sigma)}{z_2 - \zeta(\sigma)} d\sigma &= \bar{V}_1(z_2) + \bar{V}_2(z_2) = \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_0^l [\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)] \frac{d\sigma_1}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} + \frac{\gamma_1(s_1)}{2} e^{-i\theta_1(s_1)}, \quad z_2 \in L_2. \end{aligned}$$

Подставляя (16) в (9), (10) и учитывая, что $z_2 \rightarrow z_1$, $\theta_2 \rightarrow \theta_1 + \pi$, получаем

$$z_1 \in L_1: \quad \text{Im} \left[e^{i\theta(s_1)} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] = 0; \quad (17)$$

$$\text{Re} \left[e^{i\theta(s_1)} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] + \frac{\gamma_1(s_1) - \gamma_2(2l - s_1)}{2} = 0; \quad (18)$$

$$z_2 \in L_2: \quad \text{Im} \left[e^{i(\pi+\theta(s_1))} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] = 0; \quad (19)$$

$$\text{Re} \left[e^{i(\pi+\theta(s_1))} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] - \frac{\gamma_1(s_1) - \gamma_2(2l - s_1)}{2} = 0. \quad (20)$$

Выражения (17)–(20) определяют интегральные уравнения (9), (10) для предельно узкого замкнутого контура L , записанные для сторон этого контура L_1 , L_2 . Эти уравнения принимают один и тот же вид на сторонах L_1 , L_2 . Такое вырождение исходных уравнений (9), (10) объясняется особенностью поведения интегралов Коши на замкнутом контуре. При сближении точек z_1 , z_2 , находящихся на разных сторонах замкнутого контура, возникает параметрическая особенность. В этом случае предельные значения интеграла Коши определяются формулами Сохоцкого — Племели. Такая особенность уравнений (17)–(20) позволяет объяснить некорректность расчета аэродинамических характеристик тонких профилей с помощью метода дискретных вихрей [3].

Следует отметить еще одну особенность уравнений (17)–(20): интегральные уравнения первого рода (17), (19) определяют суммарную интенсивность вихревого слоя

$$\gamma(\sigma_1) = \gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)$$

на средней линии тонкого профиля.

3. Тестирование уравнений (17)–(20) проведем на задаче стационарного обтекания пластины (для данной задачи известно точное решение, полученное с использованием метода конформных отображений). Будем моделировать пластину с помощью замкнутого контура (рис. 3):

$$L_1: y = +0, \quad 0 < x < l, \quad \theta_1 = 0, \quad L_2: y = -0, \quad 0 < x < l, \quad \theta_2 = \pi. \quad (21)$$

Интегральные уравнения первого рода (17), (19) на контурах (21) переходят в одно уравнение, которое при $\bar{v}_\infty = V_\infty(\cos \alpha - i \sin \alpha)$ принимает вид

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^l [\gamma_1(\xi) + \gamma_2(2l - \xi)] \frac{d\xi}{x - \xi} = -V_\infty \sin \alpha, \quad 0 < x < l. \quad (22)$$

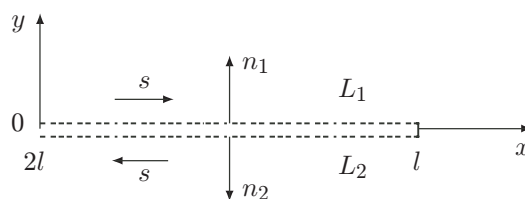


Рис. 3. Схема пластины, моделируемой с помощью замкнутого контура

Интегральное уравнение (22) имеет точное решение [7]. Для функций, ограниченных в точке $x = l$, решением является выражение

$$\gamma_1(x) + \gamma_2(2l - x) = -2V_\infty \sin \alpha \sqrt{(l-x)/x}, \quad 0 < x < l. \quad (23)$$

В свою очередь, интегральные уравнения второго рода (18), (20) переходят в уравнение

$$\gamma_1(x) - \gamma_2(2l - x) = -2V_\infty \cos \alpha, \quad 0 < x < l. \quad (24)$$

Из формул (23), (24) получаем точные решения одной и той же краевой задачи обтекания пластины с помощью интегральных уравнений первого и второго рода. Эти решения оказываются различными и не позволяют определять распределение скорости жидкости по контуру пластины. Однако если выражения (23), (24) рассматривать в качестве системы линейных алгебраических уравнений, то решением этой системы являются функции

$$\begin{aligned} \gamma_1(x) &= -V_\infty [\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{(l-x)/x}], \\ \gamma_2(2l-x) &= V_\infty [\cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{(l-x)/x}], \quad 0 < x < l. \end{aligned} \quad (25)$$

Сравним решения (25) с точным решением соответствующей задачи с помощью метода конформных отображений. Для вектора скорости жидкости в точках пластины это решение имеет вид [8]

$$\begin{aligned} v_x(x, +0) &= V_\infty [\cos \alpha + \sin \alpha \sqrt{(l-x)/x}], & v_y(x, +0) &= 0, \\ v_x(x, -0) &= V_\infty [\cos \alpha - \sin \alpha \sqrt{(l-x)/x}], & v_y(x, -0) &= 0, \quad 0 < x < l. \end{aligned} \quad (26)$$

Компоненты вектора скорости жидкости и интенсивности вихревого слоя в точках пластины связаны соотношениями

$$\gamma_1(x) = -v_x(x, +0), \quad \gamma_2(2l-x) = v_x(x, -0), \quad 0 < x < l. \quad (27)$$

Формулы (26), (27) идентичны формулам (25). Таким образом, линейная комбинация решений интегральных уравнений первого и второго рода позволяет получить точное решение тестовой задачи обтекания пластины, тогда как каждое из этих уравнений не позволяет решить данную задачу.

4. Анализ интегральных уравнений на предельно узком контуре показывает, что их применение для расчета аэродинамических характеристик тонких профилей может привести к грубым ошибкам, тогда как применение комбинированной системы, составленной из исходных уравнений первого и второго рода, позволяет получать корректные результаты. Комбинированная система интегральных уравнений строится путем линейного комбинирования четырех интегральных уравнений первого и второго рода, записанных на разных сторонах замкнутого контура.

Рассмотрим вновь замкнутый контур L , составленный из контуров L_1, L_2 . Исходные уравнения (5), (10) запишем с помощью соответствующих уравнений на контурах L_1, L_2 . Введем обозначения

$$\begin{aligned} I_j^{(1)}(z_k) &= \text{Im} \left[e^{i\theta(s_k)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\gamma_j(\sigma_j)}{z_k - \zeta_j(\sigma_j)} d\sigma_j + \bar{v}_\infty \right) \right], \quad z_k \in L_k, \quad j, k = 1, 2, \\ I^{(1)}(z_k) &= I_1^{(1)}(z_k) + I_2^{(1)}(z_k); \end{aligned} \quad (28)$$

$$I_j^{(2)}(z_k) = \frac{\gamma_j(s_k)}{2} + \operatorname{Re} \left[e^{i\theta(s_k)} \left(\frac{1}{2\pi i} \int_{L_j} \frac{\gamma_j(\sigma_j)}{z_k - \zeta_j(\sigma_j)} d\sigma_j + \bar{v}_\infty \right) \right], \quad z_k \in L_k, \quad j, k = 1, 2, \quad (29)$$

$$I^{(2)}(z_k) = I_1^{(2)}(z_k) + I_2^{(2)}(z_k).$$

Введем также комбинированную систему интегральных уравнений

$$G^{(1)}(z_1, z_2) = I^{(1)}(z_1) - I^{(1)}(z_2) = 0, \quad G^{(2)}(z_1, z_2) = I^{(2)}(z_1) - I^{(2)}(z_2) = 0, \quad (30)$$

в которых функции $I^{(r)}(z_k)$ ($r = 1, 2, k = 1, 2$) определяются формулами (28), (29). Уравнения (30) представляют собой систему двух совместных интегральных уравнений, полученную путем комбинирования двух независимых интегральных уравнений первого и второго рода. Аналогичная система уравнений получена в работе [9].

Для бесконечно узкого замкнутого контура система уравнений (30) принимает вид

$$\operatorname{Im} \left[e^{i\theta(s_1)} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] -$$

$$- \operatorname{Im} \left[e^{i(\pi + \theta(s_1))} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] = 0, \quad z_1 \in L_1, \quad (31)$$

$$\operatorname{Re} \left[e^{i\theta(s_1)} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi i} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] - \gamma_2(2l - s_1) -$$

$$- \operatorname{Re} \left[e^{i(\pi + \theta(s_1))} \left(\bar{v}_\infty + \frac{1}{2\pi} \int_0^l \frac{\gamma_1(\sigma_1) + \gamma_2(2l - \sigma_1)}{z_1 - \zeta_1(\sigma_1)} d\sigma_1 \right) \right] + \gamma_1(s_1) = 0, \quad z_1 \in L_1.$$

На контуре пластины система интегральных уравнений (31) переходит в систему совместных уравнений (23), (24).

5. Проведенный анализ сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши на замкнутом контуре позволил получить ряд теоретических и прикладных результатов. Основным теоретическим результатом является строгое доказательство вырождения интегральных уравнений на предельно узком контуре. Для этого построены интегральные уравнения на предельно узком контуре и проведено их тестирование на задаче обтекания пластины, для которой известно точное решение, полученное с помощью метода конформных отображений. Вырождение интегральных уравнений обусловлено поведением интегралов Коши на замкнутом контуре. В этом случае интеграл Коши помимо сингулярной особенности имеет параметрическую особенность, которая возникает при сближении точек, находящихся на разных сторонах замкнутого контура.

Основным прикладным результатом является построение комбинированной системы двух интегральных уравнений, не имеющих параметрической особенности. Для построения такой системы необходимо рассматривать четыре уравнения первого и второго рода, записанные на различных сторонах замкнутого контура.

Полученные результаты позволяют разработать корректные вычислительные технологии для решения широкого класса краевых и начально-краевых задач гидродинамики.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Лифанов И. К.** Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент. М.: Янус-К, 1995.
2. **Белоцерковский С. М.** Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях / С. М. Белоцерковский, И. К. Лифанов. М.: Наука, 1985.
3. **Белоцерковский С. М.** Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел / С. М. Белоцерковский, В. Н. Котовский, М. И. Ништ, Р. М. Федоров. М.: Наука, 1988.
4. **Сарпкайя Т.** Вычислительные методы вихрей. Фримановская лекция (1988) // Соврем. машиностроение. Сер. А. 1989. № 10. С. 1–60.
5. **Горелов Д. Н.** Методы решения плоских краевых задач теории крыла. Новосибирск: Изд-во СО РАН, 2000.
6. **Лаврентьев М. А.** Методы теории функций комплексного переменного / М. А. Лаврентьев, Б. В. Шабат. М.; Л.: Гостехтеоретиздат, 1951.
7. **Гахов Ф. Д.** Краевые задачи. М.: Физматгиз, 1963.
8. **Кочин Н. Е.** Теоретическая гидродинамика: В 2 ч. / Н. Е. Кочин, И. А. Кибель, Н. В. Розе. М.: Физматгиз, 1963. Ч. 1.
9. **Горелов Д. Н.** Об интегральных уравнениях задачи обтекания профиля // Изв. РАН. Механика жидкости и газа. 1992. № 4. С. 173–177.

Поступила в редакцию 7/XII 2017 г.
