ПРИБЛИЖЕННЫЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ВЗРЫВЕ В НЕКОТОРЫХ ИДЕАЛЬНЫХ СЖИМАЕМЫХ СРЕДАХ

В. П. Карликов, В. П. Коробейников, Е. В. Рязанов
(*Москва*)

При экспериментальном и теоретическом решении задач о взрыве в некоторых идеальных средах, таких как вода и водонасыщенные грунты, было установлено, что характер движения жидкости в некоторой области, примыкающей к газовому пузырю, близок к движению, которое следует из решения задачи о взрыве в несжимаемой жидкости [1-3]. В работе Н. Н. Кочиной и Н. С. Мельниковой [2] приведены условия, выделяющие среды, обладающие указанным свойством. В этих случаях сжимаемость существенно влияет на движение жидкости лишь в относительно узкой зоне, примыкающей к ударной волне. В этой узкой области наблюдаются значительные градиенты плотности ρ, давления p и скорости v. Указанные обстоятельства допускают возможность приближенного решения задачи о взрыве в некоторых идеальных слабо сжимаемых средах.

Пусть в момент времени $t = 0$ в сжимаемой покоящейся среде постоянной плотности ρ_1 происходит внезапное расширение сферического объема газа радиуса r_0, сжатого до весьма высокого давления и температуры и обладающего энергией E_0, т. е. происходит взрыв (идеализированная постановка задачи о взрыве заряда конечного объема). В случае точечного взрыва [4] считаем, что $r_0 = 0$ и в точке выделяется конечная энергия E_0. Возникает ударная волна радиуса $r_2 = r_2(t)$, распространяющаяся по жидкости и разделяющая области движущейся и покоящейся жидкости.

Как известно [1,3-7], в окрестности центра взрыва имеется газовый пузырь (сферическая каверна) радиуса r_*, который изменяется с течением времени.

Требуется определить параметры движения среды. Движение жидкости в области за фронтом ударной волны описывается системой уравнений газовой динамики для одномерных движений со сферической симметрией:

$$\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial r} + \frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial r} = 0, \qquad \frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho\frac{\partial v}{\partial r} + v\frac{\partial \rho}{\partial r} + \frac{2\rho v}{r} = 0 \tag{1}$$

$$\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon\right) + \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left[vr^2\left(\frac{\rho v^2}{2} + \rho\varepsilon + p\right)\right] = 0$$

Здесь ε — внутренняя энергия среды.

На ударной волне имеем условия

$$\rho_2(c - v_2)\left(\frac{v_2^2}{2} + \varepsilon_2\right) - p_2v_2 = \rho_1c\varepsilon_1, \qquad \rho_2(c - v_2) = \rho_1c, \qquad p_2 - \rho_2v_2(c - v_2) = p_1 \tag{2}$$

Здесь c — скорость ударной волны; индексом 2 обозначены величины за фронтом ударной волны, а индексом 1 — перед фронтом.

На границе каверны (при $r = r_*$) решение должно удовлетворять условиям:

$$p(r_*, t) = p_*(t), \qquad v(r_*, t) = \frac{dr_*}{dt} = v_*(t) = u \tag{3}$$

Будем считать, что давление в пузыре есть функция только времени и равно p_*. Для решения задачи нужно также указать начальные параметры течения.

Рассмотрим приближенный метод решения задачи. Будем считать, что область течения можно разбить сферической поверхностью радиуса $x(t)$ на две части: в области *1*, примыкающей к газовому пузырю, $r_* \leqslant r \leqslant x$, жидкость будем считать несжимаемой, а в области *2*, примыкающей к ударной волне, $x < r \leqslant r_2$, — сжимаемой. В этом случае в области *1* система (1) имеет точное решение [1,4,8,9].

$$v_{(1)} = \left(\frac{r_*}{r}\right)^2 u, \qquad \rho_{(1)} = \text{const} \tag{4}$$

$$\frac{p_{(1)}}{\rho_{(1)}} = \frac{p_*}{\rho_{(1)}} + \frac{1}{2}\left[1 - \left(\frac{r_*}{r}\right)^4\right]u^2 - \left(1 - \frac{r_*}{r}\right)(2u^2 + r_*\dot{u})$$

Здесь индексом (1) обозначены величины в области *1*, точка означает производную по времени.

При решении задачи используем интегральные соотношения массы, импульсов и энергии. Из законов сохранения массы и энергии имеем

$$\frac{\rho_1}{3}(r_2^3 - r_0^3) = \int_{r_*}^{r_2} \rho r^2 dr, \qquad \frac{E_0}{4\pi} + \int_{r_0}^{r_2} \varepsilon_1\rho_1 r^2 dr = \int_0^{r_2}\left(\varepsilon + \frac{v^2}{2}\right)\rho r^2 dr \tag{5}$$

Из уравнения импульсов после умножения его на r^3 и интегрирования в пределах от r_* до r_2 можно получить интегральное соотношение

$$r_2^3(p_2+\rho_2 v_2^2)-r_*^3(p_*+\rho_{(1)}u^2)-3\int\limits_{r_*}^{r_2}(p+\rho v^2)\,r^2dr+2\int\limits_{r_*}^{r_2}\rho v^2r^2dr+$$

$$+\frac{d}{dt}\int\limits_{r_*}^{r_2}\rho v r^3dr-\rho_2v_2r_2^3c+\rho_{(1)}u^2r_*^3=0 \qquad (6)$$

Будем искать приближенные значения искомых функций v, ρ и p в виде: в области *1*

$$v=v_{(1)},\qquad \rho=\rho_{(1)},\qquad p=p_{(1)} \qquad (7)$$

в области *2*

$$\begin{aligned} v&=[(r_2^3-r^3)\,v_{(1)}(x)+(r^3-x^3)\,v_2]\,(r_2^3-x^3)^{-1}\\ \rho&=[(r_2^3-r^3)\,\rho_{(1)}+(r^3-x^3)\,\rho_2]\,(r_2^3-x^3)^{-1}\\ p&=[(r_2^3-r^3)\,p_{(1)}(x)+(r^3-x^3)\,p_2]\,(r_2^3-x^3)^{-1}\end{aligned} \qquad (8)$$

Из уравнений (8) следует, что в области *2* функции v, ρ и p находятся методом линейной интерполяции по их значениям при $r=x$ и $r=r_2$, причем за независимую переменную принята r^3. Таким образом, предполагается, что при $r\leqslant x$ используется решение для несжимаемой жидкости, а при $r>x$ искомые функции зависят линейным образом от r^3. Учитывая формулы (2), (4), находим, что в решение (7), (8) входят следующие неизвестные функции времени: r_*, r_2, x, p_*. Для определения этих функций, считая заданной зависимость $\varepsilon(p,\rho)$, используем интегральные соотношения (5), (6). Выполним интегрирование в формулах (5), (6), при этом интегралы в области *2* вычислим по формуле трапеции. В результате интегрирования получим следующую систему уравнений:

$$x^3(\rho_{(1)}-\rho_2)=2\rho_{(1)}r_*^3+(2\rho_1-\rho_2-\rho_{(1)})\,r_2^3-2\rho_1r_0^3 \qquad (9)$$

$$\frac{E_0}{4\pi}=\frac{1}{6}(r_2^3-x^3)\left\{\rho_2\left(\Delta\varepsilon_2+\frac{v_2^2}{2}\right)+\rho_{(1)}\left[\Delta\varepsilon_{(1)}(x)+\frac{u^2}{2}\left(\frac{r_*}{x}\right)^4\right]\right\}+$$

$$+\frac{1}{2}\rho_{(1)}r_*^3\left(1-\frac{r_*}{x}\right)u^2+\rho_{(1)}J+\frac{p_*}{\gamma-1}\,\frac{r_*^3}{3} \qquad (10)$$

$$(p_2+\rho_2v_2^2)\,r_2^3-(p_*+\rho_{(1)}u^2)\,r_*^3-\left[p_*+\frac{1}{2}\rho_{(1)}u^2-\rho_{(1)}(2u^2+r_*\dot u)\right](x^3-r_*^3)-$$

$$-\frac{1}{2}\left\{p_2+\rho_2v_2^2+p_*+\frac{\rho_{(1)}}{2}\left[1+\left(\frac{r_*}{x}\right)^4\right]u^2-\rho_{(1)}\left(1-\frac{r_*}{x}\right)(2u^2+r_*\dot u)\right\}(r_2^3-x^3)-$$

$$-\rho_{(1)}r_*(2u^2+r_*\dot u)(x^2-r_*^2)-\frac{1}{2}\rho_{(1)}u^2r_*^3\left(\frac{r_*}{x}-1\right)+$$

$$+\frac{1}{3}(r_2^3-x^3)\left[\rho_2v_2^2+\rho_{(1)}\left(\frac{r_*}{x}\right)^4u^2\right]-\rho_2v_2r_2^3c+\rho_{(1)}u^2r_*^3+\rho_{(1)}ur_*^2(x\dot x-r_*u)+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\rho_2v_2r_2+\frac{\rho_{(1)}r_*^2u}{x}\right)(r_2^2c-x^2\dot x)+\frac{1}{6}(r_2^3-x^3)\,(\dot\rho_2v_2r_2+\rho_2\dot v_2r_2+\rho_2v_2c+$$

$$+\rho_{(1)}r_*\,\frac{2u^2x+r_*x\dot u-r_*u\dot x}{x^2}\Big)=0 \qquad (11)$$

В системе (9) — (11) введены следующие обозначения:

$$\Delta\varepsilon=\varepsilon-\varepsilon_1,\qquad J=\int\limits_{r_*}^{x}\Delta\varepsilon_{(1)}r^2dr$$

Найдем уравнение для определения J. Из первого закона термодинамики, записанного для области *1*, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial t}\Delta\varepsilon_{(1)}+v_{(1)}\frac{\partial}{\partial r}\Delta\varepsilon_{(1)}=0$$

Отсюда интегрированием получаем уравнение

$$\frac{dJ}{dt} = (x^2\dot{x} - r_*{}^2 u)\ \Delta\varepsilon_{(1)}(x) \tag{12}$$

Зависимость p_* от r_* или t будем считать заданной.

Если предположить, что внутри газового пузыря выполняется условие адиабатичности, то для определения p_* имеем формулу

$$p_* = A r_*{}^{-3\gamma}, \qquad A = \mathrm{const} \quad (\gamma \text{ — показатель адиабаты})$$

В случае точечного взрыва можно считать $p_* = 0$.

Система уравнений (9) — (12) при заданных начальных условиях позволяет найти искомые функции $r_*(t)$, $x(t)$, $r_2(t)$, $J(t)$ и решить задачу о взрыве.

Для выяснения эффективности предлагаемого приближенного метода было проведено решение автомодельной задачи о взрыве в среде, внутренняя энергия которой

$$\varepsilon = \frac{p}{2\rho^2}(\rho - \rho_0) + \mathrm{const} \qquad (\rho_0 = \mathrm{const})$$

Точное численное решение этой задачи дано в работе [5]. В этом случае ввиду автомодельности искомые характеристики известны с точностью до постоянных. Задача сводится к решению системы алгебраических уравнений для определения неизвестных постоянных α, c_*, c_x, входящих в формулы

$$r_2 = \left(\frac{\alpha E_0}{\rho_0}\right)^{1/5} t^{2/5}, \qquad r_* = c_* r_2, \qquad x = c_x r_2$$

Для простоты при решении задачи принималось приближенно, что $\rho_{(1)} = \rho_0$, откуда следовало, что $J = 0$.

Задача решалась для трех значений $g_1 = \rho_1/\rho_0 = 1.01,\ 1.0643,\ 1.0667$. Случай, когда $g_1 = 1.0643$, соответствует начальным данным для воды [5] и был рассмотрен студенткой механико-математического факультета Московского университета Ю. К. Голиковой в ее курсовой работе (1962 г.) Были получены значения

$$\alpha = 0.00732, \qquad c_x = 0.835 \qquad c_* = 0.156$$

Сравнение приближенных значений α, c_x, c_* с точными из работы [5] было проведено при $g_1 = 1.0667$. Оказалось, что ошибка в определении постоянных не превышает 20%. При этом было найдено, что $c_x = 0.831$. Это показывает, что несмотря на простоту принятой схемы приближенного решения задачи, результаты являются удовлетворительными.

Решение рассмотренной задачи в неавтомодельном случае (точечный взрыв с учетом противодавления) сводится к численному интегрированию системы (9) — (12).

Рассмотренный метод может быть видоизменен, когда в области *1* плотность не считается постоянной, а, например, зависит от времени. Расчет искомых функций в области *2* можно уточнить введением более точных интерполяционных формул и дополнительных интегральных соотношений.

Поступила 31 I 1963

ЛИТЕРАТУРА

1. Коул Р. Подводные взрывы. М., ИЛ, 1950.
2. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О свойствах решений задачи о точечном взрыве в идеальных средах. ДАН СССР, 1961, т. 138, № 2.
3. Баженова Т. В., Солоухин Р. И. Поле давлений, возникающих в воде при электрическом разряде. АН СССР, Сб. Физическая газодинамика, М., 1959.
4. Седов Л. И. Методы подобия и размерности в механике. 4-е изд., М., Гостехиздат, 1957.
5. Кочина Н. Н., Мельникова Н. С. О сильном точечном взрыве в сжимаемой среде. ПММ, 1958, т. 22, вып. 1.
6. Христофоров Б. Д. Параметры ударной волны и газового пузыря при подводном взрыве зарядов из тэна малого веса. ПМТФ, 1960, № 2.
7. Христофоров Б. Д. Параметры ударной волны и газового пузыря при взрыве зарядов разной плотности из тэна и азида свинца. ПМТФ, 1961, № 4.
8. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика. Ч. 1, М., Гостехиздат, 1948.
9. Коробейников В. П., Мельникова Н. С., Рязанов Е. В. Теория точечного взрыва. М., Физматгиз, 1961.