УДК 517.988.68

Новые оценки точности методов локализации линий разрыва зашумленной функции

А.Л. Агеев, Т.В. Антонова

Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского Уральского отделения Российской академии наук, ул. С. Ковалевской, 16, Екатеринбург, 620990

E-mails: ageev@imm.uran.ru (Агеев А.Л.), tvantonova@imm.uran.ru (Антонова Т.В.)

Английская версия этой статьи печатается в журнале “Numerical Analysis and Applications” № 4, Vol. 13, 2020.

Агеев А.Л., Антонова Т.В. Новые оценки точности методов локализации линий разрыва зашумленной функции // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние. — Новосибирск, 2020. — Т. 23, № 4. — С. 351–364.

Рассматривается некорректно поставленная задача локализации (определения положения) линий разрыва функции двух переменных при условии, что вне линий разрыва функция гладкая, а в каждой точке на линии имеет разрыв первого рода. Для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ от возмущенной функции и возмущенная функция приближает точную функцию в пространстве $L_2(\mathbb{R}^2)$. Уровень возмущения δ считается известным. Ранее авторами были исследованы (получены оценки точности) глобальные дискретные регуляризирующие алгоритмы аппроксимации множества линий разрыва зашумленной функции. При этом на линии разрыва накладывались достаточно жесткие условия гладкости. Основным результатом работы является усовершенствование методов проведения оценок точности локализации, что позволяет заменить требование гладкости на более слабое условие липшицевости. Также сформулированы более общие, по сравнению с предшествующими работами, условия разделимости. В частности, устанавливается, что предложенные алгоритмы позволяют получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритмов локализации.

DOI: 10.15372/SJNM20200401

Ключевые слова: *некорректная задача, метод регуляризации, линии разрыва, глобальная локализация, дискретизация, порог разделимости.*

Ageev A.L., Antonova T.V. New accuracy estimates for methods for localizing discontinuity lines of a noisy function // Siberian J. Num. Math. / Sib. Branch of Russ. Acad. of Sci. — Novosibirsk, 2020. — Vol. 23, № 4. — P. 351–364.

We consider the ill-posed problem of localizing (finding the position) the discontinuity lines of a function of two variables, provided that the function of two variables is smooth outside of the discontinuity lines, and at each point on the line has a discontinuity of the first kind. There is a uniform grid with the step τ. It is assumed that we know the averages on the square $\tau \times \tau$ of the perturbed function at each node of the grid. The perturbed function approximates the exact one in space $L_2(\mathbb{R}^2)$. The perturbation level δ is known. Earlier, the authors investigated (obtained accuracy estimates) the global discrete regularizing algorithms for approximating a set of discontinuity lines of a noisy function. However, stringent smoothness conditions were superimposed on the discontinuity line. The main result of this paper is the improvement of localizing the accuracy estimation methods, which allows replacing the smoothness requirement with a weaker Lipschitz condition. Also, the conditions of separability are formulated in a more general form, as compared to previous studies. In particular, it is established that the proposed algorithm make it possible to obtain the localization accuracy of the order $O(\delta)$. Also, estimates of other important parameters characterizing the localization algorithm are given.

Key words: *ill-posed problems, regularization method, discontinuity lines, global localization, discretization, separability threshold.*

Введение

При обработке изображений границы объектов часто являются линиями, на которых функция двух переменных (изображение) терпит разрыв первого рода (линии разрыва). Вне линий разрыва функция гладкая. Искусственные объекты, как правило, ограничиваются конечным (и небольшим) числом гладких линий. В то время как линии, ограничивающие естественные объекты, могут иметь нерегулярный характер.

Рассматривается случай, когда вместо точной функции f известна информация о функции f^δ и $\|f^\delta - f\|_{L_2} \le \delta,\ L_2 := L_2(\mathbb{R}^2)$, для равномерной сетки с шагом τ предполагается, что в каждом узле известны средние значения на квадрате со стороной τ функции f^δ. Уровень возмущения δ считается известным. Легко видеть, что линии разрыва функции f^δ могут не аппроксимировать линии разрыва точной функции f. В этой ситуации задача аппроксимации линий разрыва является некорректно поставленной [1–3] и для ее решения необходимо строить регуляризирующие алгоритмы.

Различные алгоритмы, позволяющие локализовать линии разрыва зашумленной функции двух переменных, их численную реализацию и ссылки на литературу можно найти, например, в [4, 5] (см. также [6, гл. 10]). Насколько известно авторам, первые строгие теоретические результаты по этой тематике (локальные оценки точности аппроксимации) были получены в [7, 8] (см. также работу [9], где изучались вопросы дискретизации упомянутых алгоритмов). Глобальный теоретический анализ алгоритмов усреднения для локализации кусочно-линейных линий разрыва, по-видимому, впервые проведен в работе [10]. В настоящей статье разрабатывается подход к изучению алгоритмов локализации при новых законах выбора параметров регуляризации, когда вместо гладкости на линии разрыва накладывается менее жесткое условие липшицевости. Это позволяет провести оценки точности локализации для функций, для которых техника оценок работы [10] неприменима. Также сформулированы более общие, по сравнению с предыдущими работами, условия разделимости.

Поскольку любую непрерывную линию разрыва можно приблизить ломанной, то проиллюстрируем основные проблемы на примере одной замкнутой ломанной $\Gamma = \bigcup_{k=1}^{l} \Gamma_k$, где звенья Γ_k являются отрезками. Методика проведения оценок в [10] не позволяет получать оценки в малой $\varkappa \sim O(\delta)$ окрестности точек, где гладкость линии разрыва нарушается. В нашем примере это концы отрезков Γ_k. Обозначим через $\Gamma_k^\varkappa$ часть звена Γ_k без окрестностей концов. Если при заданном δ длина звена Γ_k больше, чем выбрасываемые окрестности концов, то $\Gamma_k^\varkappa \ne \varnothing$ и множество $\bigcup_{k=1}^{l} \Gamma_k^\varkappa$ аппроксимируется рассматриваемыми методами усреднения с гарантированной точностью. Таким образом, возникает ограничение снизу на длину звеньев Γ_k. В случае, когда при заданном δ длина звена Γ_k не достаточно большая, то может оказаться, что $\Gamma_k^\varkappa = \varnothing$, и методика проведения оценок в [10] к данной ситуации не применима.

С другой стороны, простейший анализ задачи показывает, что при фиксированном δ существует ломанная типа “пилы”, которую никакой метод не позволяет локализовать с удовлетворительной точностью, т. е. введение дополнительных условий на линии разрыва является необходимостью. Оказывается, можно заменить условие гладкости на условия липшицевости и однозначности (по одной из переменных), и тем самым существенно ослабить ограничение снизу на длину звеньев Γ_k ломанной (расширить класс функций, для которых методы получения оценок применимы). Заметим, что это достигается при другом выборе параметров регуляризации.

После формулировки требований на линии разрыва и поведения точной функции вне окрестности этих линий (в форме принадлежности точной функции f определенному классу) формулируется задача локализации. Для решения рассматриваемой проблемы на основе процедур усреднения конструируются и исследуются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации линий разрыва точной функции множеством точек равномерной сетки. Следуя модифицированной схеме работы [10], проводится теоретическое изучение построенных алгоритмов на классе корректности. Устанавливается, что предложенные алгоритмы позволяют получить точность локализации порядка $O(\delta)$. Также приводятся оценки других важных параметров, характеризующих работу алгоритмов локализации.

В пункте 1 настоящей работы вводятся условия на линии разрыва и на этой основе конструируется класс точных функций. В п. 2 приводятся вспомогательные оценки. В п. 3 конструируются глобальные дискретные алгоритмы аппроксимации, доказывается основная теорема и приводится пример.

1. Постановка задачи, дискретизация вспомогательных функций

Пусть функция двух переменных $f(x,y) \in L_2(\mathbb{R}^2)$ вне квадрата $\mathfrak{D} = \{(x,y)\colon |x| \leq d, |y| \leq d\}$, $d > 0$, равна нулю и не имеет скачка на границе $\mathfrak{D}$ (последнее условие не принципиально и может быть снято); квадрат $\mathfrak{D}$ делится на области, внутри которых функция f гладкая, а на границе Γ областей функция f имеет разрыв первого рода. Будем считать, что множество линий разрыва Γ состоит из замкнутых контуров[1]; у контуров могут быть общие границы. Введем условия гладкости для функции f вне множества Γ.

Определение 1. Рассмотрим линейное множество $MV(\mathbb{R})$ (см. [11, 12]) функций $g \in L_2(\mathbb{R})$ одной переменной с конечным числом разрывов первого рода: на любом отрезке таком, что соответствующий интервал не содержит точек разрыва, функция g абсолютно непрерывна; функция g ограничена на $\mathbb{R}$; функция g' почти всюду ограничена на $\mathbb{R}$. Определим линейное множество $MV(\mathbb{R}^2)$, состоящее из функций двух переменных $f \in L_2(\mathbb{R}^2)$, для которых выполнены следующие условия: для почти всех y функция $f(\cdot, y)$ принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$, для почти всех x функция $f(x, \cdot)$ принадлежит множеству $MV(\mathbb{R})$.

Нам также понадобятся условия на линии разрыва Γ. Для этого введем понятие $(\varepsilon, V)_x$-липшицевости и $(\varepsilon, V)_y$-липшицевости. Обозначим через $O^\varepsilon(x,y)$ евклидову окрестность точки (x,y) радиуса ε.

Определение 2. Пусть $V > 0$, $\varepsilon > 0$ — фиксированные числа. Линия Γ $(\varepsilon, V)_x$-липшицева в точке $(x,y) \in \Gamma$, если для всех $(\bar{x}, \bar{y}) \in O^\varepsilon(x,y) \cap \Gamma$ линия Γ задана непрерывной однозначной функцией $\bar{x} = \bar{x}(\bar{y})$ и справедливо неравенство $|x - \bar{x}| \leq V|y - \bar{y}|$. Линия Γ $(\varepsilon, V)_y$-липшицева в точке (x,y), если для всех $(\bar{x}, \bar{y}) \in O^\varepsilon(x,y) \cap \Gamma$ линия Γ задана непрерывной однозначной функцией $\bar{y} = \bar{y}(\bar{x})$ и справедливо неравенство $|y - \bar{y}| \leq V|x - \bar{x}|$. Множество всех точек $(x,y) \in \Gamma$, в которых линия разрыва Γ является $(\varepsilon, V)_x$-липшицевой, обозначим через Γ^ε_{Vx}; множество всех точек $(x,y) \in \Gamma$, в которых линия разрыва Γ является $(\varepsilon, V)_y$-липшицевой, обозначим через Γ^ε_{Vy}; также положим $\Gamma^\varepsilon_V = \Gamma^\varepsilon_{Vx} \cup \Gamma^\varepsilon_{Vy}$.

[1] Замкнутость контуров в доказательствах не используется. Она необходима для существования функции f, удовлетворяющей всем условиям.

Замечание 1. В точке $(x, y) \in \Gamma^{\varepsilon}_{V}$ линия Γ может быть одновременно $(\varepsilon, V)_x$-липшицевой и $(\varepsilon, V)_y$-липшицевой.

Пусть длина $|\Gamma|$ линий разрыва Γ конечна. Зафиксируем $\bar{\varepsilon} > 0$ и введем множества $\bar{\Gamma}_{Vx} = \bigcup_{0<\varepsilon\le\bar{\varepsilon}} \Gamma^{\varepsilon}_{Vx}$, $\bar{\Gamma}_{Vy} = \bigcup_{0<\varepsilon\le\bar{\varepsilon}} \Gamma^{\varepsilon}_{Vy}$ и $\bar{\Gamma}_V = \bar{\Gamma}_{Vx} \cup \bar{\Gamma}_{Vy}$. Формально введем понятия скачка функции f на линии Γ по x и по y: $\Delta_x(x, y) = f(x+0, y) - f(x-0, y)$ и $\Delta_y(x, y) = f(x, y+0) - f(x, y-0)$.

Естественно возникает вопрос о корректности определения $\Delta_x(x, y)$, $\Delta_y(x, y)$ (в частности, существования пределов $f(x+0, y), f(x-0, y), f(x, y+0), f(x, y-0)$). Легко привести примеры, что в общем случае такие определения некорректны. Поэтому, во-первых, введем понятие скачка только в точках $(x, y) \in \bar{\Gamma}_V$, что позволяет исключить случай, когда точка (x, y) является граничной для трех или более областей гладкости. Более того, договоримся не определять скачок $\Delta_y(x, y)$, если точка $(x, y) \notin \bar{\Gamma}_{Vy}$ (соответственно, если точка $(x, y) \notin \bar{\Gamma}_{Vx}$, то не будем определять скачок $\Delta_x(x, y)$). Во-вторых, потребуем, чтобы на линии Γ это определение было корректно (см. определение ниже). Полного описания линий Γ такого рода в работе не приводится, но далее приведены примеры, когда линии Γ являются ломаными с конечным числом звеньев, для которых следующее ниже определение выполнено.

Определение 3. Линия Γ называется $(\bar{\varepsilon}, V, R)$-регулярной, если существуют такие положительные числа $\bar{\varepsilon}$, V, R, что выполнены условия
(1) если $(x, y) \in \bar{\Gamma}_{Vx}$, то существует $\Delta_x(x, y) \ne 0$;
(2) если $(x, y) \in \bar{\Gamma}_{Vy}$, то существует $\Delta_y(x, y) \ne 0$;
(3) если $(x, y) \in \bar{\Gamma}_{Vx} \cap \bar{\Gamma}_{Vy}$, то $|\Delta_x(x, y)| = |\Delta_y(x, y)|$;
(4) для всех ε: $0 < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$ множества $\Gamma^{\varepsilon}_{V} \ne \varnothing$ и справедливо неравенство $|\Gamma \setminus \Gamma^{\varepsilon}_{V}| \le R\varepsilon$.

Замечание 2. Вместо $R\varepsilon$ в определении 3 можно рассматривать любую зависимость от ε, стремящуюся к нулю при $\varepsilon \to 0$.

Введем класс $\mathfrak{M}$, на функциях которого будут проводиться оценки точности работы алгоритма локализации.

Определение 4. Класс $\mathfrak{M}$ состоит из функций $f \in MV(\mathbb{R}^2)$; линия разрыва Γ функции f является $(\bar{\varepsilon}, V, R)$-регулярной и дополнительно выполнены следующие условия:

(i) задано положительное число r такое, что для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x, y)| \le r$; для $(x, y) \notin \Gamma$ почти всюду выполнены неравенства $|f'_x(x, y)| \le r$, $|f'_y(x, y)| \le r$; для $(x, y) \in \bar{\Gamma}_{Vx}$ существуют и ограничены величины $|f'_x(x \pm 0, y)| \le r$; для $(x, y) \in \bar{\Gamma}_{Vy}$ существуют и ограничены величины $|f'_y(x, y \pm 0)| \le r$;

(ii) задано положительное число $\Delta^{\min}$ такое, что

$$\min_{(x,y)\in\bar{\Gamma}_{Vx}} |\Delta_x(x, y)| \ge \Delta^{\min}, \qquad \min_{(x,y)\in\bar{\Gamma}_{Vy}} |\Delta_y(x, y)| \ge \Delta^{\min}.$$

Класс корректности $\mathfrak{M}$ зависит от параметров r, $\Delta^{\min}$, $\bar{\varepsilon}$, V, R. Для краткости будем опускать эти параметры в обозначении класса, если это не вызывает недоразумений. Без ограничения общности также можно считать, что $r = 1$, что мы и будем делать в дальнейшем.

Приведем два примера функций с регулярными линиями разрыва, являющимися ломанными, с указанием класса $\mathfrak{M}$, которому эти функции принадлежат. Сначала введем общие условия. Пусть линия Γ состоит из конечного числа l отрезков $\Gamma_k = [(x_k, y_k);$

$(x_{k+1}, y_{k+1})]$; отрезки Γ_k образуют замкнутый контур. Отрезки, имеющие общие концы, назовем смежными (удобно занумеровать отрезки так, чтобы отрезки Γ_k и Γ_{k+1}, а также Γ_l и Γ_1 были смежными). Будем считать, что внутри ломанной значение функции f равно единице (включая саму ломанную), а вне — нулю.

Легко видеть, что, если отрезок Γ_k не параллелен осям координат, то для любой точки (x, y) из внутренности отрезка Γ_k существуют $f(x+0, y)$, $f(x-0, y)$, $f(x, y+0)$, $f(x, y-0)$ (т. е. величины $\Delta_x(x, y)$ и $\Delta_y(x, y)$ корректно определены). Также легко показать, что $|\Delta_x(x, y)| = |\Delta_y(x, y)| = 1$.

Рассмотрим ситуацию, когда отрезок Γ_k параллелен, например, оси Oy. Ясно, что значения $f(x+0, y)$,$f(x-0, y)$ корректно определены для любой точки (x, y) из внутренности отрезка Γ_k и одно из этих значений — единица, а другое — ноль, т. е. $|\Delta_x(x, y)| = 1$. Величину $\Delta_y(x, y)$ определять не требуется, так как $(\varepsilon, V)_y$-липшицевости на этой линии заведомо не будет. Аналогичная ситуация будет для линий параллельных оси Ox.

Легко показать, что для границ звеньев $(x_k, y_k) \in \bar{\Gamma}_{Vx}$ существует скачок $\Delta_x(x_k, y_k)$. Также очевидно, что $|\Delta_x(x_k, y_k)| = 1$. Если точка (x_k, y_k) к тому же принадлежит $\bar{\Gamma}_{Vy}$, то существует и по модулю равна единице величина $\Delta_y(x_k, y_k)$.

Приведем примеры конкретных регулярных линий Γ с указанием параметров класса $\mathfrak{M}$.

Пример 1. Пусть Γ является правильным l-звенным многоугольником, зафиксируем $V > 1$ и положим $\bar{\varepsilon}$ равно половине длины стороны ломаной. Ясно, что при достаточно большом l имеем $R = 0$, $\Delta^{\min} = 1$ и функция $f \in \mathfrak{M}$. При фиксированном δ именно для такого рода ломанной при достаточно большом l методы [10] неприменимы, в то время как методика настоящей работы позволяет провести оценки.

Пример 2. Рассмотрим в качестве Γ равносторонний треугольник с основанием, расположенным на оси Ox. Положим $V = 1$ и $\bar{\varepsilon}$ равно половине радиуса вписанной в треугольник окружности. Тогда, чтобы получить Γ_V^{ε}, нужно из треугольника Γ убрать часть линий, лежащих в окрестности вершин радиуса $2\varepsilon/\sqrt{3}$ (поскольку в ε-окрестности этих точек нет однозначной зависимости $y = y(x)$ или $x = x(y)$). Ясно, что $R = 4\sqrt{3}$, $\Delta^{\min} = 1$ и функция $f \in \mathfrak{M}$.

Введем в квадрате $\mathfrak{D}$ равномерную сетку $T = \{(x^n, y^m)\}$ с шагом τ $(\tau \ll d)$, т. е. $x^n = -d + (n - 1/2)\tau$, $y^m = -d + (m - 1/2)\tau$, где $n = 1, 2, \ldots, M$, $m = 1, 2, \ldots, M$, $M = 2d/\tau$. (Без ограничения общности будем считать, что M — целое число, поскольку всегда можно подходящим образом увеличить d.)

Постановка задачи. Пусть $f \in \mathfrak{M}$, функция $f^\delta \in L_2(\mathbb{R}^2)$ такова, что $\|f - f^\delta\|_{L_2} \leq \delta$. По уровню погрешности δ и значениям $f^\delta_{n,m}$ в точках равномерной сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ с заданным шагом τ, которые связаны с функцией f^δ следующим образом:

$$f^\delta_{n,m} = \frac{1}{\tau^2} \int\limits_{y^m-\tau/2}^{y^m+\tau/2} \int\limits_{x^n-\tau/2}^{x^n+\tau/2} f^\delta(\xi, \eta) d\xi d\eta,$$

требуется аппроксимировать множество Γ подмножеством точек сетки T с оценкой точности приближения.

Замечание 3. Постановка задачи не вполне описана, так как необходимо определить понятие “аппроксимировать”. Это понятие вводится в формулировке теоремы. При этом оценивается не только близость точек сетки, найденных алгоритмом, к множеству линий разрыва, но и их количество.

Для построения регулярных методов локализации с целью подавления шума используется идея усреднения возмущенных значений $f^\delta_{n,m}$. Сначала введем и исследуем вспомогательные функции (две непрерывные функции и их дискретные аналоги).

Для проведения усреднения по каждой переменной определим два класса непрерывных усредняющих функций одной переменной. В качестве одного класса выберем множество ΦF, состоящее из финитных функций $\phi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

(a) ϕ дважды непрерывно дифференцируема; обозначим $C_1 = \max_t |\phi''(t)|$;

(b) существуют $0 < b < 1$, $0 < a \le 1$ такие, что $a \le \phi(t) \le 1$ для $t \in [-b, b]$;

(c) $\phi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$.

Второй класс усредняющих функций Ψ также состоит из финитных функций $\psi(t)$, $t \in \mathbb{R}$, удовлетворяющих условиям

(a') ψ непрерывно дифференцируема; обозначим $C_2 = \max_t |\psi'(t)|$;

(b') $\int_{-1}^{1} \psi(t)dt = 1$;

(c') $\psi(t) = 0$ для $t \notin [-1, 1]$; $\psi(t) \ge 0$ для $t \in [-1, 1]$.

Ясно, что для $\phi \in \Phi F$ имеем $|\phi'(t)| \le C_1$ и $\phi \in W^1_1(\mathbb{R})$ (здесь $W^1_1(\mathbb{R})$ — соболевское пространство функций), а для $\psi \in \Psi$ имеем $\psi(t) \le C_2$. Через $\|\cdot\|_{L_1}$ будем обозначать $\|\cdot\|_{L_1(\mathbb{R})}$. Положим

$$\phi_{\lambda_1}(t) = \phi\left(\frac{t}{\lambda_1}\right), \qquad \psi_{\lambda_2}(t) = \frac{1}{\lambda_2}\psi\left(\frac{t}{\lambda_2}\right), \qquad \lambda_1, \lambda_2 > 0.$$

Для упрощения записи вместо $(\phi_{\lambda_1}(t))'_t\,|_{t=u}$ будем писать $\phi'_{\lambda_1}(u)$.

Дискретные значения усредняющей функции для функции двух переменных будем вычислять по формуле $\Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2} = \phi'_{\lambda_1}(i\tau)\psi_{\lambda_2}(j\tau)\tau^2$, где $-n_1 \le i \le n_1$, $-n_2 \le j \le n_2$. Параметры n_1, n_2 будут определены ниже как функции уровня погрешности δ и шага сетки τ. При этом параметры должны быть определены таким образом, что τ меньше λ_1 и λ_2. Вспомогательные дискретные функции G^δ_x, G^δ_y вычисляются в точках (x^n, y^m) сетки T по формулам:

$$G^\delta_x(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{x,\lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{j=-n_2}^{n_2} \sum_{i=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ij}_{\lambda_1\lambda_2}\, f^\delta_{n+i,m+j},$$

$$G^\delta_y(x^n, y^m) = G^{\delta, n_1 n_2}_{y,\lambda_1\lambda_2}(x^n, y^m) = \sum_{i=-n_2}^{n_2} \sum_{j=-n_1}^{n_1} \Lambda^{ji}_{\lambda_1\lambda_2}\, f^\delta_{n+i,m+j}.$$

Введем вспомогательные функции непрерывного аргумента при отсутствии возмущений.

$$F_x(x, y) = F_{x,\lambda_1\lambda_2}(x, y) = \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi, \eta)\phi'_{\lambda_1}(x - \xi)\psi_{\lambda_2}(y - \eta)d\xi d\eta, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}, \tag{1.1}$$

$$F_y(x, y) = F_{y,\lambda_1\lambda_2}(x, y) = \int\limits_{x-\lambda_2}^{x+\lambda_2} \int\limits_{y-\lambda_1}^{y+\lambda_1} f(\xi, \eta)\phi'_{\lambda_1}(y - \eta)\psi_{\lambda_2}(x - \xi)d\eta d\xi, \quad (x, y) \in \mathfrak{D}. \tag{1.2}$$

Поясним смысл этих функций и используемые обозначения. Функция $F_x(x, y)$ есть усреднение точной функции f по переменной y с помощью $\psi_{\lambda_2}(y)$ и по переменной x с помощью $\phi'_{\lambda_1}(x)$. Дискретизация этой функции, когда вместо точной функции используется приближенная функция f^δ, обозначается через $G_x^\delta(x^n, y^m)$. Функции $F_y(x,y)$ и $G_y^\delta(x^n, y^m)$ получаются, если переменные x и y поменять местами.

Лемма 1. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и натуральные числа n_1, n_2. Тогда в условиях рассматриваемой задачи при*

$$\lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \qquad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau$$

для $(x^n, y^m) \in T$ справедливы следующие оценки:

$$\left|G_x^\delta(x^n, y^m) - F_x(x^n, y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right),$$
$$\left|G_y^\delta(x^n, y^m) - F_y(x^n, y^m)\right| \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right), \qquad A_0 = 4C_1C_2.$$

Доказательство. В работе [9, лемма 1] доказана первая оценка при фиксированном y^m. Вторая оценка получается аналогично. □

2. Оценки для вспомогательных функций

Пусть U_1, U_2 — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Положим

$$\rho(U_1; U_2) = \inf\{\sqrt{(x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2}\colon\ (x_1,y_1) \in U_1,\ (x_2,y_2) \in U_2\}.$$

В следующей лемме приведены оценки сверху для функций F_x, F_y, определенных формулами (1.1), (1.2), вне малой окрестности множества Γ.

Лемма 2. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для $(x,y) \in \mathfrak{D}$ для любых положительных λ_1, λ_2 при выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma) \ge \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ имеют место оценки:*

$$|F_x(x,y)| \le A_1\lambda_1, \qquad |F_y(x,y)| \le A_1\lambda_1, \qquad A_1 = \|\phi\|_{L_1}.$$

Доказательство. Поскольку при выполнении условия $\rho((x,y);\Gamma) \ge \sqrt{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}$ в области интегрирования функция f не имеет линий разрыва, то доказательство леммы аналогично доказательству леммы 2 [9]. □

Получим оценки снизу для функций F_x, F_y, определенных формулами (1.1), (1.2), в точках сетки T, близких Γ_V^ε. Именно для получения этих оценок используется условие $(\varepsilon, V)_x$-липшицевости и $(\varepsilon, V)_y$-липшицевости в точках кривой Γ_V^ε вместо условия гладкости, которое использовалось в аналоге этой леммы в [10]. Напомним, что величины a, b, C_1 введены в условиях (a), (b) на функцию ϕ, величины $\Delta^{\min}, \bar\varepsilon, V$ входят в определение класса корректности, τ — шаг сетки T. Нам также понадобятся константы $A_1 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_2 = 2C_1\max\{V, 1\}$.

Лемма 3. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для любых положительных λ_1, λ_2 при $\tau \le b\lambda_1/(V+1)$ для всех $\varepsilon\colon \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+\sqrt{2}\tau < \varepsilon \le \bar\varepsilon$, в любых точках $(x,y) \in \mathfrak{D}$ таких, что $\rho((x,y);\Gamma_V^\varepsilon) \le \tau$, имеет место хотя бы одна из оценок:*

либо
$$|F_x(x,y)| \geq a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1},$$

либо
$$|F_y(x,y)| \geq a\Delta^{\min} - A_1\lambda_1 - A_2\frac{\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Доказательство. Поскольку $(x,y)\colon \rho((x,y);\Gamma_V^\varepsilon) \leq \tau$, то существует точка $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Gamma_V^\varepsilon\colon \rho((\tilde{x},\tilde{y});(x,y)) \leq \tau$, т.е. в точке $(\tilde{x},\tilde{y})$ линия Γ является $(\varepsilon,V)_x$-липшицевой или $(\varepsilon,V)_y$-липшицевой (см. определение 2).

Для определенности пусть $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Gamma_{Vx}^\varepsilon$. Из условия $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+\sqrt{2}\tau < \varepsilon \leq \bar{\varepsilon}$ следует, что для всех $(\bar{x},\bar{y}) \in \Gamma$ в области интегрирования в (1.1) линия Γ задана непрерывной однозначной функцией $\bar{x} = \bar{x}(\bar{y})$ и справедливо неравенство $|\tilde{x}-\bar{x}| \leq V|\tilde{y}-\bar{y}|$. Таким образом, будем доказывать первую оценку (если $(\tilde{x},\tilde{y}) \in \Gamma_{Vy}^\varepsilon$, то доказывается вторая оценка, а вместо скачка $\Delta_x(x,y)$ используется $\Delta_y(x,y)$). Следовательно [8, лемма 1], имеет место следующее разложение:

$$\begin{aligned}F_x(x,y) &= \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f(\xi,\eta)\phi'_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\right)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta \\ &= \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\bar{x}(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta + \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\right)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta. \quad (2.1)\end{aligned}$$

Второе слагаемое в правой части (2.1) можно оценить следующим образом:

$$\left|\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\left(\int\limits_{x-\lambda_1}^{x+\lambda_1} f'_\xi(\xi,\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\xi)d\xi\right)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\right| \leq A_1\lambda_1.$$

Используя формулу Лагранжа для функции ϕ_{λ_1}, первое слагаемое в правой части (2.1) можно представить в виде

$$\begin{aligned}\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)\phi_{\lambda_1}(x-\bar{x}(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta &= \phi_{\lambda_1}(x-\bar{x}(y))\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta + \\ &\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)\phi'_{\lambda_1}(\theta)(\bar{x}(y)-\bar{x}(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta, \quad (2.2)\end{aligned}$$

где θ лежит между точками $x-\bar{x}(y)$, $x-\bar{x}(\eta)$. Из того, что $f \in MV(\mathbb{R}^2)$ и функция $\bar{x}(\eta)$ непрерывна следует, что функция $\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)$ непрерывна в пределах интегрирования. Следовательно, она сохраняет знак для всех η. Так как $|x-\bar{x}(y)| \leq |x-\tilde{x}|+|\tilde{x}-\bar{x}(y)| \leq \tau + V|\tilde{y}-y| \leq \tau(V+1) \leq b\lambda_1$, то в силу условия (b) на функцию ϕ и условий (b'), (c') на функцию ψ для первого слагаемого в правой части (2.2) имеем оценку снизу

$$\left|\phi_{\lambda_1}(x-\bar{x}(y))\int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2}\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta\right| \geq a\Delta^{\min}.$$

Рассмотрим второе слагаемое в правой части (2.2). Учитывая условие (i) на функцию f, имеем $|\Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)| \leq 2$. Так как $|\bar{x}(y)-\bar{x}(\eta)| \leq V|y-\eta| \leq V\lambda_2$, $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$, то для второго слагаемого в правой части (2.2) имеем

$$\left| \int\limits_{y-\lambda_2}^{y+\lambda_2} \Delta_x(\bar{x}(\eta),\eta)\phi'_{\lambda_1}(\theta)\cdot(\bar{x}(y)-\bar{x}(\eta))\psi_{\lambda_2}(y-\eta)d\eta \right| \le \frac{2C_1V\lambda_2}{\lambda_1}.$$

Таким образом, получаем требуемую оценку. Лемма 3 доказана. □

Напомним, что величины a, b, C_1 введены в условиях (a), (b) на функцию ϕ, величина C_2 — в условии (a') на функцию ψ, величины $\Delta^{\min}, \bar{\varepsilon}, V$ входят в определение класса корректности; $A_0 = 4C_1C_2$, $A_1 = \|\phi\|_{L_1}$, $A_2 = 2C_1\max\{V,1\}$. Введем константы

$$P = \frac{a\Delta^{\min}}{2}, \qquad D_1 = \frac{4A_0}{P}\left(\frac{12A_2}{P}\right)^{1/2}, \qquad D_2 = \frac{D_1P}{12A_2} = \frac{4A_0}{P}\left(\frac{P}{12A_2}\right)^{1/2},$$

$$B_0 = \min\left\{\frac{bD_1}{V+1},\ D_2,\ \frac{P}{6A_0}\left(\frac{1}{D_1}+\frac{1}{D_2}\right)^{-1}\right\}, \qquad \delta_0 = \frac{P}{8A_1D_1}.$$

Обозначим $\lceil z \rceil = [z]+1$, где $[z]$ — целая часть числа z. Положим

$$n_1 = n_1(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \qquad n_2 = n_2(\tau,\delta) = \left\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil. \tag{2.3}$$

Напомним, что (см. формулировку леммы 1)

$$\lambda_1 = \frac{2n_1+1}{2}\tau, \qquad \lambda_2 = \frac{2n_2+1}{2}\tau. \tag{2.4}$$

Ниже нам понадобятся очевидные оценки, которые сформулируем в виде отдельного утверждения.

Утверждение. *Пусть шаг τ заданной равномерной сетки T удовлетворяет условию $\tau \le \tau_0(\delta) = B_0\delta$, тогда при связи параметров* (2.3), (2.4) *имеем $\tau \le \min\{\lambda_1, \lambda_2, D_1\delta/24\}$ и для λ_1, λ_2 выполнены следующие оценки сверху и снизу*:

$$D_1\delta \le \lambda_1 \le D_1\delta + \tau \le D_1\delta(1+1/24) < 2D_1\delta,$$

$$D_2\delta \le \lambda_2 \le D_2\delta + \tau \le 2D_2\delta \le D_1\delta/12 < \lambda_1.$$

Это утверждение следует из того, что $\Delta^{\min} \le 2$, $C_1 \ge 1$, $A_2 = 2C_1\max\{V,1\}$. Тогда $D_2 \le D_1/24$.

В точках сетки $T = \{(x^n, y^m)\}$ определим функцию

$$H^\delta(x^n,y^m) = \max\{|G_x^\delta(x^n,y^m)|, |G_y^\delta(x^n,y^m)|\}. \tag{2.5}$$

Лемма 4. *Пусть зафиксированы усредняющие функции $\phi \in \Phi F$ и $\psi \in \Psi$. Тогда в условиях рассматриваемой задачи для всех $\delta \le \delta_0$, $\tau \le \tau_0(\delta)$ при связи параметров* (2.3), (2.4) *и для всех ε: $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+\sqrt{2}\tau < \varepsilon \le \bar{\varepsilon}$, для значения функции H^δ в точке $(x^n,y^m) \in T$ имеют место оценки*:

(1) *если $\rho((x^n,y^m);\Gamma) > \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$, то $H^\delta(x^n,y^m) < P$,*

(2) *если $\rho((x^n,y^m);\Gamma_V^\varepsilon) \le \tau$, то $H^\delta(x^n,y^m) > P$.*

Доказательство. Покажем справедливость (1). Для точек сетки (x^n,y^m) таких, что $\rho((x^n,y^m);\Gamma) > \sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$, используя оценки лемм 1 и 2, получаем

$$H^\delta(x^n, y^m) \le \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} + A_0\tau\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) + A_1\lambda_1.$$

При данном выборе параметров, используя оценки снизу для λ_1, λ_2 из утверждения, имеем неравенство $A_0\delta/(\lambda_1\lambda_2)^{1/2} \le P/4$; используя дополнительно условие на τ, получаем $A_0\tau(1/\lambda_1 + 1/\lambda_2) \le P/6$; учитывая, что $\delta \le \delta_0$, имеем $A_1\lambda_1 \le P/4$. Следовательно,

$$H^\delta(x^n, y^m) \le \frac{2}{3}P < P.$$

Перейдем к доказательству (2). Для точек (x^n, y^m): $\rho((x^n, y^m); \Gamma_V^\varepsilon) \le \tau$, используя оценки лемм 1 и 3, получаем

$$H^\delta(x^n, y^m) \ge a\Delta^{\min} - \frac{A_0\delta}{(\lambda_1\lambda_2)^{1/2}} - A_0\tau\left(\frac{1}{\lambda_1} + \frac{1}{\lambda_2}\right) - A_1\lambda_1 - \frac{A_2\lambda_2}{\lambda_1}.$$

При данном выборе параметров $\lambda_2 \le 2D_2\delta$ и $A_2\lambda_2/\lambda_1 \le P/6$. Следовательно, учитывая оценки из доказательства п. (1) настоящей леммы, имеем

$$H_x^\delta(x^n, y^m) \ge a\Delta^{\min} - \frac{5}{6}P = \frac{7}{6}P > P.$$

Лемма 4 доказана. □

3. Исследование алгоритма локализации линий разрыва

Изложенный ниже метод локализации определяет множество T^δ точек сетки, аппроксимирующих множество Γ. Обозначим через $N = N(T^\delta)$ количество точек множества T^δ. Договоримся, если $T^\delta = \varnothing$, считать $\rho((x^n, y^m); T^\delta) = \infty$ для любой точки (x^n, y^m) сетки T. Напомним, что функция H^δ определена в (2.5); величины D_1, D_2 введены перед утверждением; константы $\Delta^{\min}$ и R введены в определении 4.

Приведенный ниже алгоритм локализации в своей работе использует параметры регуляризации n_1, n_2 как функции уровня δ погрешности данных:

$$n_1(\tau, \delta) = \left\lceil \frac{D_1\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad n_2(\tau, \delta) = \left\lceil \frac{D_2\delta}{\tau} - \frac{1}{2} \right\rceil, \quad \lambda_1 = \frac{2n_1{+}1}{2}\tau, \quad \lambda_2 = \frac{2n_2{+}1}{2}\tau \tag{3.1}$$

и величину порога $P = a\Delta^{\min}/2$.

Алгоритм $\Pi D(\delta, f^\delta_{n,m})$

Подготовка к циклу. Положим $N = 0$; $T^\delta = \varnothing$.

Цикл перебора точек (x^n, y^m) *сетки* T. Если в процессе перебора не осталось не рассмотренных точек сетки T, то конец цикла.

Пусть (x^n, y^m) — текущая точка. Если $H^\delta(x^n, y^m) > P$ и $\rho((x^n, y^m); T^\delta) > 3\sqrt{2}\lambda_1$, то $N := N + 1$; $T^\delta := T^\delta \cup (x^n, y^m)$ и продолжаем цикл;

иначе — продолжаем цикл.

Заметим, что выше сформулирован целый класс алгоритмов. Чтобы получить конкретный метод, нужно зафиксировать усредняющие функции $\phi \in \Phi F$, $\psi \in \Psi$ и правило перебора точек. Далее будем считать, что конкретное правило перебора и усредняющие функции выбраны и зафиксированы.

Пусть U_1, U_2 — множества точек из $\mathbb{R}^2$. Введем меру близости множества U_1 к множеству U_2:

$$\mu(U_1;U_2)=\sup_{(x_1,y_1)\in U_1}\ \inf_{(x_2,y_2)\in U_2}\sqrt{(x_1-x_2)^2+(y_1-y_2)^2}.$$

Положим

$$D=\sqrt{2}D_1,\quad \bar{\delta}_0=\min\{\delta_0,\ \bar{\varepsilon}/(5D),\ |\Gamma|/(6DR)\},\quad \varepsilon=5D\delta. \tag{3.2}$$

Теорема. *В условиях рассматриваемой задачи для всех* $\delta\le\bar{\delta}_0$, $\tau\le\tau_0(\delta)$ *при связи параметров* (3.1) *алгоритм* $\Pi D(\delta,f^{\delta}_{n,m})$ *построит множество точек* T^{δ} *такое, что*:

(1) $\mu(T^{\delta};\Gamma)\le 2D\delta$;

(2) $\mu(\Gamma^{\varepsilon}_{V};T^{\delta})\le 4D\delta$; $\mu(\Gamma;T^{\delta})\le(4+5R)D\delta$;

(3) *для всех различных точек* $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in T^{\delta}$ *справедливо неравенство*

$$\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2))>3D\delta;$$

(4) *множество* $T^{\delta}\neq\varnothing$ *и справедливы оценки*

$$\frac{1}{7D}\frac{|\Gamma|}{\delta}-\frac{5R}{7}\le N(T^{\delta})\le\frac{1}{D}\frac{|\Gamma|}{\delta}.$$

Доказательство. Ясно, что при выборе $\varepsilon=5D\delta$ выполнены условия в леммах за счет выбора $\bar{\delta}_0$ в (3.2) и выполнения неравенства $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}+\sqrt{2}\tau\le 2D\delta<\varepsilon$.

Докажем оценку (1). Из оценки в пункте (1) леммы 4 следует, что $\mu(T^{\delta};\Gamma)\le\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$. Используя оценки из утверждения перед леммой 4, получаем требуемое неравенство.

Докажем оценку (2). Согласно алгоритму ΠD все Γ^{ε}_{V} можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^{δ} радиусом $3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau$. Если это не так, то согласно п. (2) леммы 4, обязательно найдется точка сетки T, не принадлежащая множеству T^{δ}, в которой функция H^{δ} больше порога P. Этого не может быть, поскольку в ходе работы алгоритма ΠD перебираются все точки сетки T. Следовательно, $\mu(\Gamma^{\varepsilon}_{V};T^{\delta})\le 3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau$ и $\mu(\Gamma;T^{\delta})\le 3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau+R\varepsilon$. Поскольку $\varepsilon=5D\delta$, то, учитывая условия на параметры, получаем требуемые оценки.

Докажем оценку (3). Пусть $(x_1,y_1),(x_2,y_2)\in T^{\delta}$. По построению множества T^{δ} алгоритмом ΠD справедливо неравенство $\rho((x_1,y_1);(x_2,y_2))>3\sqrt{2}\lambda_1\ge 3D\delta$.

Докажем оценку (4). Согласно оценке в п. (1) леммы 4 круг с центром в точке из множества T^{δ} радиусом $\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}$ обязательно содержит точку из Γ. Пусть $(x^n,y^m)\in T^{\delta}$, тогда существует $(x,y)\in\Gamma$ такая, что $\rho((x^n,y^m);(x,y))\le\sqrt{\lambda_1^2+\lambda_2^2}\le\sqrt{2}\lambda_1$. Аналогично для $(x^{\bar{n}},y^{\bar{m}})\in T^{\delta}$ существует $(\bar{x},\bar{y})\in\Gamma$ такая, что $\rho((x^{\bar{n}},y^{\bar{m}});(\bar{x},\bar{y}))\le\sqrt{2}\lambda_1$. Ясно, что $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y}))\ge\rho((x^{\bar{n}},y^{\bar{m}});(x^n,y^m))-2\sqrt{2}\lambda_1$. Используя оценку для первого слагаемого из доказательства п. (3) настоящей теоремы, имеем $\rho((x,y);(\bar{x},\bar{y}))\ge\sqrt{2}\lambda_1$. Следовательно, справедлива оценка сверху

$$N(T^{\delta})\le\frac{|\Gamma|}{\sqrt{2}\lambda_1}\le\frac{|\Gamma|}{D\delta}.$$

Получим оценку снизу. В доказательстве п. (2) показано, что все Γ^{ε}_{V} можно покрыть кругами с центром в точках из множества T^{δ} радиусом $3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau$. Поскольку $\varepsilon-(3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau)\ge D\delta>0$, то количество таких кругов на Γ^{ε}_{V} должно быть не меньше

$$\frac{|\Gamma^{\varepsilon}_{V}|}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau)}\ge\frac{|\Gamma|-R\varepsilon}{2(3\sqrt{2}\lambda_1+\sqrt{2}\tau)}.$$

Следовательно, при выбранных параметрах

$$N(T^\delta) \ge \frac{|\Gamma_V^\varepsilon|}{2(3\sqrt{2}\lambda_1 + \sqrt{2}\tau)} \ge \frac{1}{7D}\frac{|\Gamma|}{\delta}\left(1 - \frac{R\varepsilon}{|\Gamma|}\right) \ge \frac{1}{7D}\frac{|\Gamma|}{\delta} - \frac{5R}{7}.$$

Требуемая оценка получена и теорема доказана. □

Покажем, что существует функция $f \in \mathfrak{M}$, где $\mathfrak{M}$ — класс корректности настоящей работы, но эта функция не входит в класс корректности из [10]. Приведем условия на функции, рассматриваемые в [10] в обозначениях настоящей работы: линии разрыва Γ состоят из конечного числа l отрезков Γ_k; отрезки Γ_k образуют замкнутые контуры; у контуров могут быть общие границы. Отрезки, имеющие общие концы, назовем смежными. Пусть отрезки Γ_k, Γ_j смежные, через $\vartheta_{k,j}$ обозначим наименьший угол между этими отрезками. Введем

$$\Theta_{k,j} = \begin{cases} (\sin\vartheta_{k,j})^{-1}, & 0 < \vartheta_{k,j} < \pi/2, \\ 1, & \pi/2 \le \vartheta_{k,j} < \pi. \end{cases}$$

Для точек (x, y), принадлежащих внутренности отрезка Γ_k, $k = 1, 2, \ldots, l$, определим функции $\Delta_x(x, y) = f(x + 0, y) - f(x - 0, y)$, $\Delta_y(x, y) = f(x, y + 0) - f(x, y - 0)$. Ясно, что, если отрезок Γ_k параллелен одной из осей координат, то соответствующий скачок не определен; если отрезок Γ_k не параллелен осям, то оба скачка определены и $|\Delta_x(x, y)| = |\Delta_y(x, y)|$. Обозначим множество точек линии Γ, в которых определена функция Δ_x через $\bar\Gamma_x$, а множество точек, в которых определена функция Δ_y через $\bar\Gamma_y$.

Определение 5. Класс $\mathfrak{M}B$ состоит из функций $f \in MV(\mathbb{R}^2)$, дополнительно удовлетворяющих следующим условиям:

(i) для всех $(x, y) \in \mathfrak{D}$ имеем $|f(x, y)| \le r$; для $(x, y) \notin \Gamma$ почти всюду выполнены неравенства $|f'_x(x, y)| \le r$, $|f'_y(x, y)| \le r$; для $(x, y) \in \bar\Gamma_x$ $|f'_x(x \pm 0, y)| \le r$, для $(x, y) \in \bar\Gamma_y$ $|f'_y(x, y \pm 0)| \le r$;

(ii) заданы положительные числа L, $\Delta^{\min}$, Θ и S: $0 < l \le L$,

$$\min_{(x,y)\in\bar\Gamma_x} |\Delta_x(x, y)| \ge \Delta^{\min}, \qquad \min_{(x,y)\in\bar\Gamma_y} |\Delta_y(x, y)| \ge \Delta^{\min}, \qquad \max \Theta_{k,j} \ge \Theta, \qquad \min_k |\Gamma_k| \ge S.$$

На классе $\mathfrak{M}B$ исследуются методы локализации работы [10]. Далее будем считать, что константы r и $\Delta^{\min}$ в определениях 4 и 5 одинаковые. Для произвольного $\varkappa > 0$ введем $\Gamma_k^\varkappa$ — часть отрезка Γ_k без окрестностей концов радиуса $\Theta\varepsilon$. Ясно, что $\Gamma_k^\varkappa \ne \varnothing$ при достаточно малом ε. Заметим, что множество $\Gamma^\varkappa = \cup_{k=1}^{l} \Gamma_k^\varkappa$ в [10] играет ту же роль, что и множество Γ_V^ε в настоящей работе. Напомним, что $A_0 = 4C_1C_2$, $A_2 = 2C_1$,

$$D_1 = \frac{4A_0}{P}\left(\frac{12A_2}{P}\right)^{1/2}, \qquad D = \sqrt{2}D_1.$$

Положим

$$\tilde\delta_0 = \min\left\{\frac{P}{8A_1D_1}, \frac{S}{10\Theta D}\right\}, \qquad h(\delta) = 5D\delta.$$

Лемма 5. *Пусть функция $f \in \mathfrak{M}B$ и при $\delta \le \tilde\delta_0$ выполнено условие разделимости $\min_{k\ne j} \rho(\Gamma_k^\varkappa; \Gamma_j^\varkappa) \ge h(\delta)$, $\varkappa = \Theta h(\delta)$, тогда $f \in \mathfrak{M}$ с параметрами $\bar\varepsilon = h(\tilde\delta_0)$, $V = 1$, $R = 2L\Theta$.*

Приведем пример, демонстрирующий, что класс корректности $\mathfrak{M}$ настоящей работы включает функции с ломанными линиями разрыва, которые не входят в класс корректности $\mathfrak{M}B$ [10], т. е. существуют функции, для которых методика настоящей работы применима, а методика работы [10] — нет.

Пример 3. Зафиксируем $\delta \le \bar{\delta}_0$. Будем строить функцию $f \in \mathfrak{M}$ с линией разрыва Γ такой, что $\tilde{\delta}_0 < \delta$, т. е. $\Gamma_k^{\varkappa} = \varnothing$ и мы не можем гарантировать, что множество T^δ, построенное методом работы [10], не пусто. Линию Γ построим следующим образом. Рассмотрим равносторонний треугольник со стороной a. Поделим стороны треугольника на отрезки длины a/N и каждый отрезок заменим сторонами равнобедренного треугольника с углом при вершине $3\pi/4$. Это линия Γ. Будем считать, что функция f тождественно равна единице внутри области, ограниченной линией Γ, и — нулю вне нее. Поскольку длину наименьшего отрезка ломаной Γ можно сделать как угодно малой, увеличивая число N, ясно, что условия работы [10] не выполнены, т. е. параметры ломаной Γ можно подобрать таким образом, что не будет гарантирована аппроксимация ни одной точки Γ. С другой стороны, можно показать, что для любых, сколь угодно малых величин отрезков, функция $f \in \mathfrak{M}$ при $\bar{\varepsilon} = a/4$, $V = \mathrm{tg}(\pi/8)$ и $|\Gamma \setminus \Gamma_V^{\varepsilon}| \le R\varepsilon$, где $R = 4\sqrt{3}$ (выбрасываются только окрестности трех углов исходного треугольника радиуса $2\varepsilon/\sqrt{3}$).

Литература

1. **Тихонов А.Н., Арсенин В.Я.** Методы решения некорректных задач.— М.: Наука, 1979.
2. **Иванов В.К., Васин В.В., Танана В.П.** Теория линейных некорректных задач и ее приложения.— М.: Наука, 1978.
3. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information.— Utrecht: VSP, 1995.
4. **Малла С.** Вэйвлеты в обработке сигналов.— М.: Мир, 2005.
5. Введение в контурный анализ и его приложения к обработке изображений и сигналов / ред. Я.А. Фурмана.— М.: Физматлит, 2002.
6. **Гонсалес Р., Вудс Р.** Цифровая обработка изображений. (Издание 3-е исправленное и дополненное).— М.: Техносфера, 2012.
7. **Антонова Т.В.** Метод локализации линии разрыва приближенно заданной функции двух переменных // Сиб. журн. вычисл. математики / РАН. Сиб. отд-ние.— Новосибирск, 2012.— Т. 15, № 4.— С. 345–357.
8. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Аппроксимация линий разрыва зашумленной функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики.— 2012.— Т. 15, № 1(49).— С. 3–13.
9. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** Дискретный алгоритм локализации линий разрыва функции двух переменных // Сиб. журн. индустр. математики.— 2017.— Т. 20, № 4(72).— С. 3–12. DOI:10.17377/sibjim.2017.20.401
10. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** К вопросу о глобальной локализации линий разрыва функции двух переменных // Тр. Ин-та матем. и механики.— 2018.— Т. 24, № 2.— С. 12–23.
11. **Агеев А.Л., Антонова Т.В.** О локализации разрывов первого рода для функций ограниченной вариации // Тр. Ин-та матем. и механики УрО РАН.— 2012.— Т. 18, № 1.— С. 56–68.
12. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl.— 2013.— Vol. 21, № 2.— P. 177–191.

Поступила в редакцию 1 июля 2019 г.
После исправления 30 декабря 2019 г.
Принята к печати 16 июля 2020 г.

Литература в транслитерации

1. **Tihonov A.N., Arsenin V.Ya.** Metody resheniya nekorrektnyh zadach. — M.: Nauka, 1979.
2. **Ivanov V.K., Vasin V.V., Tanana V.P.** Teoriya lineinyh nekorrektnyh zadach i ee prilozheniya. — M.: Nauka, 1978.
3. **Vasin V.V., Ageev A.L.** Ill-posed problems with a priori information. — Utrecht: VSP, 1995.
4. **Malla S.** Veivlety v obrabotke signalov. — M.: Mir, 2005.
5. Vvedenie v konturnyi analiz i ego prilozheniya k obrabotke izobrazhenii i signalov / red. YA.A. Furmana. — M.: Fizmatlit, 2002.
6. **Gonsales R., Vuds R.** Tsifrovaya obrabotka izobrazhenii. (Izdanie 3-e ispravlennoe i dopolnennoe). — M.: Tekhnosfera, 2012.
7. **Antonova T.V.** Metod lokalizatsii linii razryva priblizhenno zadannoi funktsii dvuh peremennyh // Sib. zhurn. vychisl. matematiki / RAN. Sib. otd-nie. — Novosibirsk, 2012. — T. 15, № 4. — C. 345–357.
8. **Ageev A.L., Antonova T.V.** Approksimatsiya linii razryva zashumlennoi funktsii dvuh peremennyh // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2012. — T. 15, № 1(49). — S. 3–13.
9. **Ageev A.L., Antonova T.V.** Diskretnyi algoritm lokalizatsii linii razryva funktsii dvuh peremennyh // Sib. zhurn. industr. matematiki. — 2017. — T. 20, № 4(72). — S. 3–12. DOI:10.17377/sibjim.2017.20.401
10. **Ageev A.L., Antonova T.V.** K voprosu o global'noi lokalizatsii linii razryva funktsii dvuh peremennyh // Tr. In-ta matem. i mekhaniki. — 2018. — T. 24, № 2. — S. 12–23.
11. **Ageev A.L., Antonova T.V.** O lokalizatsii razryvov pervogo roda dlya funktsii ogranichennoi variatsii // Tr. In-ta matem. i mekhaniki UrO RAN. — 2012. — T. 18, № 1. — S. 56–68.
12. **Ageev A.L., Antonova T.V.** New methods for the localization of discontinuities of the first kind for functions of bounded variation // J. Inverse Ill-Posed Probl. — 2013. — Vol. 21, № 2. — P. 177–191.