К ВОПРОСУ ОБ УРАВНЕНИИ ДЛЯ ПОКАЗАТЕЛЯ АДИАБАТЫ ВЛАЖНОГО ПАРА

М. П. Вукалович, И. И. Новиков

(Москва)

В курсе Технической термодинамики [1] приведена следующая формула для показателя адиабаты влажного и насыщенного пара:

$$k=\left[1-\frac{v'}{v}\right]^{-1}\left[1-\frac{T}{fT_k}\left(2-\frac{c_s'T}{xr}\right)+\frac{T^2}{f^2T_k}\frac{df}{dT}-\frac{T^2}{(v''-v')\,fT_k}\frac{dv'}{dT}\right]^{-1} \tag{1}$$

Здесь величина f, как указывается в работе [1], представляет собой функцию температуры, связанную с давлением насыщенного пара соотношением

$$f=\frac{T^2}{fK_k}\frac{dp}{dT}=\frac{rT}{pT_k\,(v''-v')}$$

а C_s' — теплоемкость жидкой фазы вдоль линии насыщения, r — теплота парообразования с использованием уравнения Клайперона—Клаузиуса. Эта формула была выведена еще в 1948 г. одним из авторов предлагаемой статьи [2], исходя из основных термодинамических соотношений для двухфазной области. Недавно формула (1) была сопоставлена с результатами прямого эксперимента [3] и получила достаточно хорошее подтверждение.

В 1954 г. Н. И. Белоконем была опубликована [4] формула для k, имеющая следующий вид:

$$\frac{1}{k}=1-\eta_c-T\frac{d\eta_c}{dT}+\frac{N(t)}{v'/(v''-v')+x} \tag{2}$$

где

$$N(t)=\frac{T}{r}\left(\eta_c\frac{di'}{dT}-p\frac{dv'}{dT}\right)-\left(1-T\frac{d\eta_c}{dT}\right)\frac{v'}{v''-v'} \tag{3}$$

$$\eta_c=\frac{p\,(v''-v')}{r} \tag{4}$$

Наконец, в 1961 г. В. В. Сычевым было предложено [5] пользоваться для вычисления следующим уравнением:

$$k=-\frac{v'(1-x)+v''x}{p\left[\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s^{\prime *}(1-x)+\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s^{\prime\prime *}x\right]} \tag{5}$$

где

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s^{\prime *}=-\frac{c_v'^*}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2,\qquad \left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s^{\prime\prime *}=-\frac{c_v''^*}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 \tag{6}$$

$$\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s^{\prime *}-\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s^{\prime\prime *}=-(v''-v')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2} \tag{7}$$

Здесь звездочка означает величины в двухфазной области.

Как Н. И. Белоконь, так и В. В. Сычев не сделали в своих работах подробного сопоставления найденных ими уравнений с опубликованным значительно раньше уравнением (1), вследствие чего создалась известная неясность в вопросе о том, являются ли все три уравнения для k эквивалентными, а если нет, то какое из них наиболее правильно. Этой неясности способствовало и то обстоятельство, что отдельные авторы, например В. В. Сычев, некоторые из уравнений отнесли к числу общих (а именно уравнение (5)—(7) и (2)—(4)), а другие (уравнение (1))— к числу необщих и ограниченных; к тому же В. В. Сычев назвал свое уравнение «новым уравнением».

Сопоставление всех трех уравнений не подтверждает такого деления. Все три уравнения, как будет показано ниже, отличаются только формой написания: и уравнение И. И. Белоконя и уравнение В. В. Сычева получаются из уравнения (1) при помощи элементарных преобразований. Таким образом, говорить об «ограниченности» или «необщности» уравнения (1) нет никаких оснований: все три уравнения (1), (2)—(4), (5)—(7) будут эквивалентными и различать их можно только по дате опубликования.

Чтобы показать, что уравнения Н. И. Белоконя и В. В. Сычева вытекают из уравнения (1), проделаем с ним следующие алгебраические преобразования: 1) подставим в уравнение значения f и df/dT в следующем виде:

$$f=\frac{T^2}{T_kp}\frac{dp}{dT},\qquad \frac{df}{dT}=\frac{2T}{T_kp}\frac{dp}{dT}-\frac{T^2}{T_kp^2}\left(\frac{dp}{dT}\right)^2+\frac{T^2}{T_kp}\frac{d^2p}{dT^2}$$

и 2) заменим $1-v'/v$, согласно формуле $v=v'(1-x)+v''x$, равной величиной $x\,(v''-v')/v$.

В результате после приведения подобных членов получим

$$k = -\frac{v}{p}\left[-\frac{c_s'(v''-v')}{r}\frac{dT}{dp} + \frac{dv'}{dT}\frac{dT}{dp} - x(v''-v')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2}\right]^{-1} \quad (8)$$

Возьмем теперь уравнение (2) — (4) Н. И. Белоконя и заменим в нем $\frac{di'}{dT}$ через эквивалентную величину

$$T\frac{ds'}{dT} + v'\frac{dp}{dT} = c_s' + v'\frac{dp}{dT}$$

Учитывая далее, что

$$\frac{v'}{v''-v'} + x = \frac{v}{v''-v'}$$

при помощи уравнения Клайперона — Клаузиуса

$$\frac{dp}{dT} = \frac{r}{T(v''-v')}$$

получим

$$\eta_c = \frac{p}{T}\frac{dp}{dT}, \qquad \frac{d\eta_c}{dT} = \frac{1}{T} - \frac{p}{T^2}\frac{dp}{dT} - \frac{p}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2}$$

$$N(t) = \frac{p}{r}\left(c_s'\frac{dT}{dp} + v' - T\frac{dv'}{dT}\right) - \frac{pv'}{T(v''-v')}\left(1 + T\frac{dT}{dp}\frac{d^2p}{dT^2}\right)\frac{dT}{dp}$$

$$\frac{1}{k} = -\frac{p}{v}\left[-\frac{c_s'(v''-v')}{r}\frac{dT}{dp} + \frac{T(v''-v')}{r}\frac{dv'}{dT} - \right.$$
$$\left. - v'\left(\frac{v''-v'}{r} + \frac{1}{T}\frac{dT}{dp}\right) - (v-v')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2}\right]$$

или окончательно

$$\frac{1}{k} = -\frac{p}{v}\left[-\frac{c_s'(v''-v')}{r}\frac{dT}{dp} + \frac{dv'}{dT}\frac{dT}{dp} - x(v''-v')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2}\right]$$

что полностью совпадает с (8). Таким образом, показано, что уравнение Н. И. Белоконя путем несложных алгебраических преобразований приводится к выражению (8), вытекающему из уравнения (1), и, следовательно, оба уравнения (2) — (4) и (1) будут эквивалентными.

Убедимся теперь, что уравнение (5) — (7) В. В. Сычева также идентично уравнению (1), т. е. представляет собой частную форму написания этого уравнения и, следовательно, не является, как это утверждал В. В. Сычев, новым.

Для этого выразим из уравнения

(7) производную $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s''^*$ через $\left(\frac{\partial v}{\partial p}\right)_s'^*$

а последнюю из уравнения (6) через теплоемкость $c_v'^*$ жидкой фазы на линии насыщения со стороны двухфазной области и подставим значения их в уравнение (5), в результате получим

$$k = -\frac{v'(1-x) + v''x}{p\left[-\frac{c_v'^*}{T}\left(\frac{dT}{dp}\right)^2 + x(v''-v')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2}\right]}$$

Величины

$$c_s' = T\frac{ds'}{dT}, \qquad c_v'^* = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v'^*$$

связаны между собой следующим очевидным соотношением:

$$c_s' = c_v'^* + \left[\left(\frac{\partial u}{\partial v}\right)_T'^* + p\right]\frac{dv'}{dT} = c_v'^* + T\frac{dv'}{dT}\frac{dp}{dT}$$

Подставив в полученное уравнение для k выражение $c_v'^*$ через c_s', найдем

$$k = -\frac{v'(1-x) + v''x}{p\left[-\frac{c_s'(v''-v')}{r}\frac{dT}{dp} + \frac{dv'}{dT}\frac{dT}{dp} + x(v''-v')\left(\frac{dT}{dp}\right)^2\frac{d^2p}{dT^2}\right]}$$

или, заменив в первом члене квадратной скобки dT / dp по формуле Клайперона — Клаузиуса на $T(v'' - v') / r$, а $v'(1 - x) + v''x$ на v, получим выражение (8); откуда следует, что уравнение (5) — (7) эквивалентно уравнению (1).

Итак, показано, что как уравнения (2) — (4) Н.И.Белоконя, так и уравнения (5) — (7) В. В. Сычева для показателя адиабаты влажного и насыщенного паров не отличаются от предложенного значительно ранее аналитического выражения для зависимости k от T уравнения (1) и представляют собой лишь иную форму написания этого уравнения. Заменив в уравнении (1) величину c_s' через равную ей величину

$$\frac{di'}{dT} + v' \frac{dp}{dT}$$

получим уравнение (3) — (5) Н. И. Белоконя, а заменив c_s' через эквивалентную величину

$$c_v'^* + T \frac{dv'}{dT} \frac{dp}{dT}$$

получим уравнение В. В. Сычева.

Поступила
12 V 1961

ЛИТЕРАТУРА

1. Вукалович М. П., Новиков И. И. Техническая термодинамика. Госэнергоиздат, 1955, стр. 172.
2. Новиков И. И. ДАН СССР, 1948, т. 59, № 8, 1425.
3. Авдонин В. И., Новиков И. И. Скорость звука на кривой фазового равновесия пар — жидкость. ПМТФ, 1960, № 1.
4. Белоконь Н. И. Термодинамика. Госэнергоиздат, 1954.
5. Сычев В. В. Новое уравнение для показателя адиабаты влажного пара. Теплоэнергетика. Госэнергоиздат, 1961, № 3, 67.

О ТЕЧЕНИИ ЖИДКОЙ ПЛЕНКИ

Г. А. Беда

(Москва)

Рассматривается установившееся течение жидкой пленки, образующейся в результате вдува жидкости через пористую пластину в турбулентный пограничный слой. Принимается, что течение в жидкой пленке ламинарное и нет испарения на ее внешней границе. Уравнения, описывающие это течение, имеют вид:

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \tag{1}$$

Уравнение движения

$$\rho u \frac{\partial u}{\partial x} + \rho v \frac{\partial u}{\partial y} = \mu \frac{d^2 u}{\partial y^2} \tag{2}$$

Уравнение энергии

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \tag{3}$$

Здесь u, v — составляющие скорости по осям x и y соответственно, μ — динамический коэффициент вязкости, T — температура, a — коэффициент температуропроводимости, ρ — плотность.

Граничными условиями на пористой пластине ($y = 0$) будут

$$u = 0, \qquad v = v_w(x), \qquad T = T_w = \text{const} \tag{4}$$

На внешней поверхности жидкой пленки, т. е. при $y = \delta(x)$, где δ толщина пленки, необходимо потребовать равенство касательных напряжений и тепловых потоков, т. е.

$$\mu \frac{\partial u}{\partial y}\bigg|_{y=\delta} = \tau_\delta, \qquad \lambda \frac{\partial T}{\partial y}\bigg|_{y=\delta} = q_\delta$$

Кроме того, при отсутствии испарения внешняя граница жидкой пленки является линией тока, поэтому

$$v_\delta = u_\delta \frac{d\delta}{dx} \tag{5}$$