УДК 539.3

ПОВЕРХНОСТНЫЕ ВОЛНЫ И УСТОЙЧИВОСТЬ ТАНГЕНЦИАЛЬНОГО РАЗРЫВА СКОРОСТИ НА ГРАНИЦЕ ТВЕРДОГО ТЕЛА И ЖИДКОСТИ

И. В. Симонов

(*Москва*)

Строятся решения типа волн Рэлея на границе упругого полупространства и подвижного слоя идеальной жидкости.

Предельные случаи: нулевая скорость потока, тангенциальный разрыв скорости в жидкости — изучены в [1—3]. В [4] дана оценка порядка величины критической скорости потока. Рост масштабов скоростей, используемых в инженерной и экспериментальной практике (например, [5]), вызвал интерес к более углубленному анализу явления.

1. В декартовой системе координат (x, z) область $0 < z < h$ и область $z < 0$ заняты идеальной сжимаемой жидкостью и упругой средой соответственно. Исходное (невозмущенное) состояние данной механической системы характеризуется нулевыми значениями всех компонент скоростей и напряжений, за исключением x-компоненты скорости при $0 < z < h$, постоянной и равной U, и давления $P_0 = \mathrm{const} > 0$ при $0 \leqslant z < -\infty$. Другими словами, имеется постоянный поток жидкости над упругим полупространством, нагруженный внешним давлением P_0.

Плоское возмущенное состояние будем описывать тремя функциями — потенциалами скоростей: продольным φ и поперечным ψ в упругом теле и ζ в жидкости. Они должны удовлетворять волновым уравнениям

$$\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = c_1^2\Delta\varphi, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial t^2} = c_2^2\Delta\psi, \quad z < 0, \tag{1.1}$$

$$\left(\frac{D}{Dt}\right)^2 \zeta = c_3^2\Delta\zeta, \quad 0 < z < h \quad \left(\frac{D}{Dt} = \frac{\partial}{\partial t} + U\frac{\partial}{\partial x}\right),$$

где c_1, c_2 и c_3 — константы, имеющие физический смысл скоростей распространения волн.

Сформулируем граничные условия задачи. Компоненты возмущений скоростей (u, v в упругой среде и u', v' в жидкости) следующим образом связаны с потенциалами:

$$u = \partial\varphi/\partial x + \partial\psi/\partial z, \quad v = \partial\varphi/\partial z - \partial\psi/\partial x,$$

$$u' = \partial\zeta/\partial x, \quad v' = \partial\zeta/\partial z.$$

Следуя [3], уравнение возмущенной границы раздела зададим в форме $z = \eta(x, t)$. Тогда при $z = 0$

$$v = \partial\varphi/\partial z - \partial\psi/\partial x = \partial\eta/\partial t, \quad v' = \partial\zeta/\partial z = D\eta/Dt. \tag{1.2}$$

Остальные ограничения накладываются на возмущения напряжений

$$p = 0 \text{ при } z = h, \quad p = -\sigma, \quad \tau = 0 \text{ при } z = 0, \tag{1.3}$$

где p — возмущение давления в слое жидкости; $\sigma = \sigma_z$, $\tau = \tau_{xz}$ — возмущенные компоненты тензора напряжений в упругой среде.

Интересующие нас напряжения можно выразить через потенциалы, исходя из следующих соотношений, справедливых для плоской задачи:

$$\frac{\partial\sigma}{\partial t} = \rho\left\{c_1^2\Delta\varphi - 2c_2^2\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial x\partial z}\right)\right\}, \tag{1.4}$$

$$\frac{\partial\tau}{\partial t} = \rho c_2^2\left\{2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x\partial z} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2}\right\}, \quad \frac{Dp}{Dt} = \rho' c_3^2\Delta\zeta,$$

где ρ, ρ' — плотности твердого тела и жидкости соответственно.

Будем искать решение задачи (1.1)—(1.4) в виде плоской монохроматической поверхностной волны, распространяющейся вдоль оси x, так что зависимость каждой искомой функции от x, t определяется множителем $\exp[ik(x-ct)]$. Для потенциалов запишем выражения

(1.5) $$(\varphi, \psi, \zeta) = (\varphi_1, \psi_1, \zeta_1)\exp[ik(x-ct)].$$

Требование «поверхностности» волны означает, что

(1.6) $$\varphi_1(z) \to 0, \quad \psi_1(z) \to 0 \text{ при } z \to -\infty.$$

Подставляя последовательно выражения (1.5) в уравнения (1.1), будем получать уравнения типа

$$\frac{d^2\varphi_1}{dz^2} - k^2r^2\varphi_1 = 0, \ldots,$$

решениями которых с учетом условий (1.6) являются функции

(1.7) $$\varphi_1(z) = A\exp(krz), \quad \psi_1 = B\exp(ksz),$$
$$\zeta_1(z) = C\exp(kqz) + D\exp(-kqz),$$

где $r = \left(1 - c^2/c_1^2\right)^{1/2}$; $s = \left(1 - c^2/c_2^2\right)^{1/2}$; $q = \left(1 - (c-U)^2/c_3^2\right)^{1/2}$

с выбором ветвей $\mathrm{Re}\, r > 0$, $\mathrm{Re}\, s > 0$, $\mathrm{Re}\, q > 0$.

Постоянные A, B, C, D, а также скорость распространения поверхностной волны c определяются из граничных условий. Заменим дифференцирование по t в (1.2), (1.4) умножением на множители $-ikc$ или $ik(U-c)$. Исключая η из условий (1.2), получим кинематическое условие непротекания в форме

(1.8) $$(c-U)(\partial\varphi/\partial z - \partial\psi/\partial x) = c\,\partial\zeta/\partial z.$$

Условия (1.3) также можно переписать в терминах φ, ψ, ζ, исключая σ, τ, p при помощи (1.4). Подстановка (1.5), (1.7) в эти условия и (1.8) приводит к системе

(1.9) $$(c-U)[C\exp(khq) + D\exp(-khq)] = 0,$$
$$2irA + (1+s^2)B = 0,$$
$$\rho c_2^2[(1+s^2)A - 2isB] = \rho' c(U-c)(C+D),$$
$$(c-U)(rA - iB) = cq(C-D).$$

Нетривиальные решения этой системы однородных линейных уравнений относительно A, B, C, D существуют лишь при некоторых значениях c. Последние являются корнями дисперсионного уравнения, которое получается приравниванием нулю определителя системы (1.9).

Выделим особо случай $U = c$. При этом $p \equiv 0$, а вид дисперсионного уравнения совпадает с уравнением Рэлея в случае свободной поверхности упругого тела

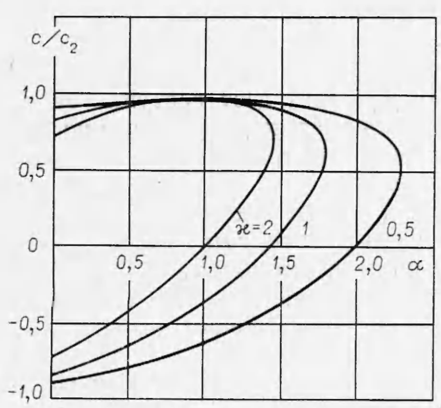
$$(1+s^2)^2 = 4rs.$$

Оно имеет единственный положительный корень $c^2 = c_R^2$. Таким образом, если скорость потока равна c_R, то жидкость не оказывает влияния на поверхностную волну в упругой среде, распространяющуюся вниз по потоку.

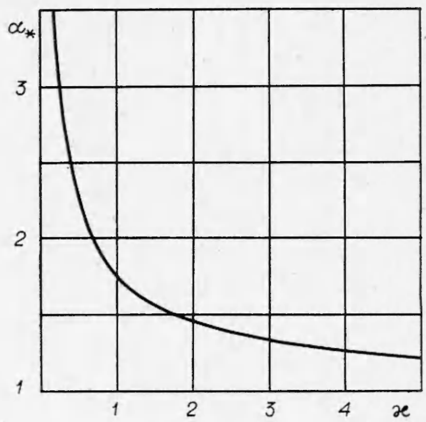
В общем случае получим трансцендентное уравнение для определения c в форме

(1.10) $$\rho' rc^2(c-U)^2\,\mathrm{th}(khq) = \rho c_2^4 q\,[4rs - (1+s^2)^2].$$

2. Рассмотрим некоторые частные случаи. Заметим, что учет сжимаемости материалов оказывает малое влияние на характеристики поверх-



Фиг. 1



Фиг. 2

ностных волн. Например, для волны Рэлея вдоль свободной поверхности упругого тела имеем [6]

$$c_R = \xi c_2,\ 0{,}92 < \xi(\nu) < 0{,}955 \text{ при } 0{,}25 < \nu < 0{,}5$$

(ν — коэффициент Пуассона).

Поэтому основные качественные и количественные закономерности поведения главных корней (1.10)* можно проследить, анализируя предельный случай $c_1 \to \infty$, $c_3 \to \infty$. При этом (1.10) упрощается к виду

$$\varkappa c^2 (c - U)^2 = c_2^4 [4s - (1 + s^2)^2], \tag{2.1}$$

где $\varkappa = (\rho'/\rho)\, \mathrm{th}\,(kh)$ — приведенная плотность.

При $c_2 \to 0$ асимптотическое выражение (2.1) имеет вид

$$\varkappa(c - U)^2 + c^2 = 0.$$

Среди корней этого уравнения

$$c = U\sqrt{\varkappa}(\sqrt{\varkappa} \pm i)/(1 + \varkappa)$$

имеется корень, дающий растущее во времени решение. Это — известный результат неустойчивости касательного разрыва скорости в жидкости [3].

Замена $b = c_2/c$, $\alpha = U/c_2$ приводит (2.1) к виду

$$\varkappa(\alpha/2)^2(\alpha^{-1} - b)^2 + (b^2 - 1/2)^2 = b^3(b^2 - 1)^{1/2}. \tag{2.2}$$

Возводя обе части (2.2) в квадрат, получим алгебраическое уравнение шестой степени относительно b. Множество корней последнего следует сократить согласно (2.2) и требованию $\mathrm{Re}\, s > 0$.

Проведены вычисления корней с использованием ЭВМ. Расчеты показали, что существует интервал $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_*(\varkappa)$, на котором имеется только два действительных корня (2.2). При $U = 0$ им соответствуют две волны Рэлея, распространяющиеся с равными по модулю, но противоположными по знаку скоростями. При $U \neq 0$ такая симметрия нарушается. Начиная со значения $\alpha = \sqrt{2/\varkappa}$, обе скорости становятся положительными, а при $\alpha = \alpha_*(\varkappa)$ (кривая из расчетов) скорости обеих волн совпадают (фиг. 1). Таким образом, волна с направлением вверх по потоку сильно искажается: поток «гонит» ее в противоположную сторону. На волну же, бегущую вниз по течению, поток оказывает сравнительно слабое влияние.

* Обертоны, даваемые (1.10) вследствие конечности h и сжимаемости жидкости, представляют меньший физический интерес.

Кривая $\alpha = \alpha_*(\varkappa)$ (фиг. 2) отграничивает в фазовой плоскости переменных α, $\varkappa$ область существования устойчивых решений (рэлеевских волн). При $\alpha > \alpha_*(\varkappa)$ вместо прежних двух действительных появляются два комплексно-значных корня (2.2). Один из них дает растущее экспоненциально во времени решение. Показатель экспоненты монотонно увеличивается от нуля при $\alpha = \alpha_*(\varkappa)$ до значения, соответствующего случаю $c_2 = 0$, при $\alpha \to 0$.

Замечание. Для реальной (вязкой) жидкости данное рассмотрение будет приемлемым при условии $d \ll \lambda$, где d — толщина пограничного слоя, $\lambda = 2\pi/k$ — длина волны возмущения, и, поскольку $d/\lambda \sim \mathrm{Re}^{-1/2}$ (Re — число Рейнольдса), сводится к требованию $\mathrm{Re}^{1/2} \gg 1$. Это же ограничение является достаточным, чтобы приближенно выполнялось граничное условие для τ.

Автор выражает благодарность Н. В. Зволинскому за обсуждение работы.

Поступила 20 III 1980

ЛИТЕРАТУРА

1. **Бреховских Л. М.** Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
2. **Зволинский Н. В.** Поверхностные волны в упругом полупространстве и покрывающем его слое жидкости.— ДАН СССР, 1947, т. 56, вып. 4.
3. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М., Мир, 1973.
4. **Губанов А.** Волны Рэлея на границе твердого тела и жидкости.— ЖЭТФ, 1945, т. 15, вып. 9.
5. **Михайлов А. Л.** Сдвиговая неустойчивость границы раздела в металлах.— ФГВ, 1979, № 2.
6. **Буллен К. Е.** Введение в теоретическую сейсмологию. М., Мир, 1966.

УДК 532.516

УСТОЙЧИВОСТЬ СТРУЙ ИДЕАЛЬНОЙ ВЕСОМОЙ ЖИДКОСТИ

В. И. Елисеев

(*Днепропетровск*)

Исследованию устойчивости струй идеальной жидкости посвящены работы [1—4], в которых считается, что невозмущенное течение параллельное, а скорость жидкости в струе постоянна. В данной работе в рамках линейной теории рассмотрим устойчивость струй весомых жидкостей с учетом влияния внешней среды, которая считается также идеальной. Весомость жидкости проявляется в том, что границы струи становятся непараллельными, а скорость зависит от продольной координаты. Учет этих особенностей можно провести так же, как, например, в теории устойчивости ламинарных пограничных слоев, считая течение квазипараллельным. В этом случае зависимость толщины струи и скорости в струе от продольной координаты можно считать параметрической. В данной работе будем рассматривать существенно непараллельное течение, поэтому для выявления особенностей устойчивости струйного течения в этом случае предлагается асимптотический метод.

1. Основные уравнения. Основные уравнения имеют вид

$$\frac{\partial^2\Phi_i}{\partial x^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\Phi_i}{\partial r} + \frac{\partial^2\Phi_i}{\partial r^2} = 0, \qquad i = 1, 2, \tag{1.1}$$

$$\frac{\partial\Phi_i}{\partial t} + \frac{p_i}{\rho_i} + \frac{u_i^2 + v_i^2}{2} \mp gx = \mathrm{const}_i,$$