

УДК 532.5.01

СИНГУЛЯРНЫЕ АППРОКСИМАЦИИ ДЛЯ РАСЧЕТА ДИНАМИКИ ВИХРЕВЫХ НИТЕЙ

В. Л. Окулов^{*,**,***}, Я. Фукумото^{****}

* Институт теплофизики им. С. С. Кутателадзе СО РАН, 630090 Новосибирск, Россия

** Датский технический университет, 2800 Люнгбю, Дания

*** Новосибирский национальный исследовательский государственный университет,
630090 Новосибирск, Россия

**** Институт индустриальной математики Университета Кюсю, 819-0395 Фукуока, Япония
E-mails: vaok@dtu.dk, yasuhide@imi.kyushu-u.ac.jp

Проведена оценка точности численных расчетов динамики вихревых нитей с помощью метода усечения на примере движения винтовых вихрей. В случае винтовых вихрей с равномерным распределением завихренности в ядре типа ядра Рэнкина существует еще два аналитических подхода к решению задачи, с помощью которых определено допустимое минимальное расстояние между вихревыми нитями или их элементами для обеспечения точности вычислений при использовании метода усечения. Установлена ошибка, возникающая в расчетах с использованием метода усечения в случае сближения витков винтового вихря.

Ключевые слова: вихревая динамика, винтовой вихрь, вихревые нити, десингуляризация, регуляризация численных решений.

DOI: 10.15372/PMTF20210319

Введение. В динамике концентрированных вихрей (вихревых нитей) размер ядра обычно полагается много меньше любых других линейных масштабов (радиуса кривизны нити, расстояния между соседними нитями или их участками при ее деформации и т. д.) [1]. Вследствие существенной нелинейности и малых масштабов взаимодействующих вихревых структур прямой расчет динамики деформированных вихревых нитей является сложной задачей. В случае тонких вихревых нитей обычно применяются приближенные методы, основанные на использовании закона Био — Савара для бесконечно тонких вихревых нитей. Их применение для вычисления скорости движения нити невозможно в силу сингулярной расходимости на оси вихря. Избежать расходимости можно с помощью различных методов десингуляризации. Среди этих методов наиболее важным является метод усечения [1–4], который заключается в том, чтобы в формуле Био — Савара при интегрировании по контуру нити исключить участок нити длиной δ по обе стороны от рассматриваемой точки (рис. 1, *a*). Метод усечения применим в случае малости вихре-

Исследование моделирования винтового вихря с помощью метода Дайсона выполнено при финансовой поддержке JSPS KAKENHI (грант № JP19K03672) и Российского фонда фундаментальных исследований (код проекта 21-58-50003); аппроксимация и анализ данных с помощью метода усечения с приближением вихревого кольца для устранения сингулярности проведены В. Л. Окуловым в рамках государственного задания Института теплофизики СО РАН.

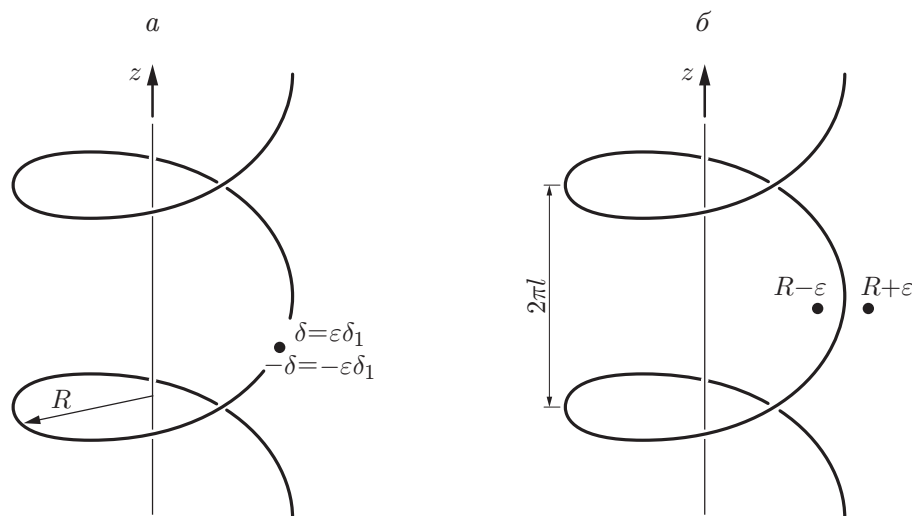


Рис. 1. Схемы десингуляризации для определения движения вихревых нитей с помощью метода усечения (а) и с помощью осредненных скоростей в окрестности нити (б)

вого ядра нити радиусом ϵ по сравнению с радиусом ее кривизны ρ ($\epsilon \ll \rho$) и с расстоянием до соседних вихрей или собственных вихревых элементов L ($\epsilon \ll L$).

Для проведения вычислений указанная выше абстрактная оценка “много меньше” недостаточна, нужно более точно знать момент, когда получаемое приближение начинает отклоняться от реального движения вихревой нити или, в крайнем случае, от других решений задачи, вычисленных с помощью альтернативных методов. Получение достоверных экспериментальных данных существенно затруднено, что обусловлено влиянием контактных измерительных методик на движение вихревой нити или необходимостью применять многочисленные осреднения для полевых методов при определении структуры вихря [5]. Однако возможность использования альтернативных методов расчета для данного сопоставления вполне реальна. Влияние расстояния L на корректность применения метода усечения можно, в частности, исследовать на примере винтовых вихревых нитей (см. рис. 1) при уменьшении расстояния между элементами витка (шага винтового вихря) $L \equiv h = 2\pi l$.

Помимо метода усечения существует еще два метода определения самоиндуцированного движения винтовых вихрей. Эти методы основаны на десингуляризации решения по осредненным значениям скорости на конечном расстоянии от нити (см. рис. 1, б). Для расчета скоростей в окрестности винтовой нити могут использоваться численное интегрирование по формуле Био — Савара [6] или суммирование рядов Каптейна [7], более точный результат позволяет получить аппроксимация рядов Каптейна с явным выделением полюса и логарифма [8] при контролируемой ошибке отброшенных членов [9]. Однако существует различие между самоиндуцированной скоростью винтового вихря с конечным ядром и аппроксимацией этого решения средней скоростью, индуцируемой сингулярной винтовой нитью на конечных расстояниях от нее, равных радиусу ядра. Для устранения этого различия используются метод коррекции с помощью соприкасающегося эквивалентного вихревого кольца и метод Дайсона. Метод коррекции с помощью эквивалентного вихревого кольца предложен в [6], величина коррекции найдена численно в работе [10] и аналитически определена в [11]. Альтернативный способ с использованием метода Дайсона предложен в [12] и обоснован в [13]. Следует отметить, что все три решения (методом усечения, методом эквивалентного вихревого кольца и методом Дайсона) не сопоставлялись между собой.

Целью настоящей работы является исследование возможности использования этих методов при сопоставимых размерах вихревого ядра и расстояниях между нитями или между соседними элементами витка.

Десингуляризация уравнений движения винтовых вихрей. Для корректного сравнения различных способов десингуляризации при расчете скорости Ω самоиндуцированного движения винтовых вихрей с помощью сингулярных решений для бесконечно тонких нитей приведем соотношения, использованные в данной работе. Будем рассматривать вихрь винтовой формы в безграничном пространстве (см. рис. 1) с одним ограничением: размер ядра 2ε не должен превышать шаг винта h . Завихренность, описываемая циркуляцией Γ , имеет только аксиальную компоненту с постоянным распределением вдоль вихревого ядра.

Метод усечения в формулировке, предложенной С. Кроу [3], описан во многих работах. В настоящей работе будем использовать формулировку, изложенную в [1]. Формулу для расчета самоиндуцированной скорости в цилиндрических координатах (r, θ, z) и обозначениях, унифицированных для исследуемых методов, запишем в виде

$$\Omega_C = -\frac{\Gamma\gamma^2}{2\pi\rho} \left(\int_{\varepsilon\delta_C\gamma/\rho}^{N\gamma} \frac{\theta \sin \theta - 1 + \cos \theta}{[\theta^2 + 2\gamma^2(1 - \cos \theta)]^{3/2}} d\theta + \right. \\ \left. + \gamma^2 \int_{\varepsilon\delta_C\gamma/\rho}^{N\gamma} \frac{1 - \cos \theta}{[\theta^2 + 2\gamma^2(1 - \cos \theta)]^{3/2}} d\theta \right). \quad (1)$$

Здесь длина усечения $\delta = \varepsilon\delta_C$ полагается пропорциональной радиусу вихря ε ; радиус кривизны винта $\rho = R(1 + \gamma^2)/\gamma^2$ представлен с помощью величины, обратной безразмерному шагу винта $\tau \equiv 1/\gamma = h/(2\pi R)$; $N\gamma$ — верхний предел интегрирования. В соответствии с методом усечения неизвестные величины δ_C и N находятся путем сопоставления результатов расчета по формуле (1) с известным решением для простейшего случая — соприкасающегося вихревого кольца с постоянной завихренностью в ядре [3]:

$$\ln 2\delta_C = 1/4, \quad \delta_C = 0,642, \quad \delta = 0,642\varepsilon, \quad (2)$$

а значение $N = 55$ в верхнем пределе интегрирования (1) обеспечивает необходимую точность вычислений (до четвертой значащей цифры).

Второй способ десингуляризации основан на представлении независимо найденного С. Кавадой и Дж. Хардином решения для непрерывной винтовой нити в виде рядов Каптейна [12]. Для этого решения прервать вихревую нить невозможно, поэтому десингуляризация проводилась не путем вырезания участка нити, как в случае использования метода усечения, а путем вычисления скоростей в некоторой окрестности этой нити (см. рис. 1, б). В работе [8] суммы рядов Каптейна представлены в виде двух сингулярных слагаемых, которые совместно с главным членом регулярного остатка могут дать погрешность, величина которой составляет менее 2 % [9]. В настоящей работе для угловой скорости использована формула, в которую входят безразмерные шаг винта τ и радиус его ядра $\sigma = \varepsilon/R$:

$$\Omega_O = -\frac{\Gamma}{4\pi R^2} \frac{\tau}{(1 + \tau^2)^{3/2}} \left[\ln \frac{1}{2\delta_R\sigma} - \frac{3}{2} \ln \frac{\tau}{1 + \tau^2} + 2 + \tau^2 - \frac{\sqrt{1 + \tau^2}(1 + 3\tau^2)}{\tau} \right] + \\ + \frac{\tau^2}{(1 + \tau^2)^4} \left[\left(\tau^4 - 3\tau^2 + \frac{3}{8} \right) \zeta(3) - \frac{27}{8} + 2\tau^4 + \frac{1}{\tau^2} \right] + \\ + 4 \frac{\sqrt{1 + \tau^2}}{\tau^2} I_1 \left(\frac{1}{\tau} \right) K_1' \left(\frac{1}{\tau} \right) + o(1). \quad (3)$$

Здесь I_1 и K_1 — модифицированные функции Бесселя; штрих означает их производную; $\zeta = 1,20206$. В формулу (3) включена поправка $\ln(2\delta_R)$ на конечное вихревое ядро. В случае винтового вихря с равномерным распределением завихренности эта поправка, как и решение (2), была определена путем сравнения с решением для соприкасающегося вихревого кольца:

$$\ln(2\delta_R) = 1/4, \quad \delta_R = 0,642.$$

Впервые такая величина коррекции решения найдена численно в [7], а в [10] получена аналитически.

Третий метод, предложенный Ф. Дайсоном в работе [12] для расчета колец Сатурна [13], использовался для расчета динамики винтовых вихрей. В этом методе переход от вихревой трубки к сингулярным вихревым нитям осуществляется путем интегрирования объемного интеграла по сечению ядра с помощью операторов сдвига. В результате задача о влиянии конечного ядра в объемном интеграле сводится к разложению на линейные интегралы и представляется в виде мультипольных разложений [14]. Главный член разложения состоит из цепочки монопольных особенностей, интенсивность которых равна циркуляции Γ винтового вихря, и соответствует винтовой вихревой нити. В окрестности нити индуцируется та же скорость, что и при использовании второго метода, соответственно осредненные скорости движения совпадают: $\Omega_O^* = \Omega_O|_{\ln \delta_R=0}$. При этом поправка на влияние конечного ядра равна нулю ($\ln(2\delta_R) = 0$). Следующий вклад в решение дает скорость v_θ :

$$\Omega_D = \Omega_O^* + \frac{1}{2R} [v_\theta(R - \varepsilon) + v_\theta(R + \varepsilon)]. \quad (4)$$

Эта скорость зависит от распределения завихренности в ядре и индуцируется цепочкой диполей интенсивности d . В [12] для равномерного распределения завихренности в ядре радиусом ε получено выражение

$$d = -3\Gamma\sigma^2/(16\pi\rho) \quad (5)$$

и установлено, что для описания скорости v_θ с моментом d по формуле (5) достаточно учесть две сингулярные компоненты:

$$v_\theta \simeq -\frac{2d}{Rr} \frac{(l^2 + R^2)^{3/4}}{(l^2 + r^2)^{1/4}} \operatorname{Re} \left[\frac{e^{\mp\xi + i\chi}}{(e^{\mp\xi} - e^{i\chi})^2} \pm \frac{l}{24} \left(\frac{3r^2 - 2l^2}{(l^2 + r^2)^{3/2}} + \frac{9R^2 + 2l^2}{(l^2 + R^2)^{3/2}} \right) \frac{e^{i\chi}}{e^{\mp\xi} - e^{i\chi}} \right],$$

где

$$e^\xi = \frac{r}{R} e^{\sqrt{1+(r/l)^2}} \frac{1 + \sqrt{1+(R/l)^2}}{1 + \sqrt{1+(r/l)^2}} e^{-\sqrt{1+(R/l)^2}};$$

знак “+” соответствует условию $r < R$, знак “−” — $r \geq R$.

Представляет интерес проверка метода Дайсона, сокращенного до монопольной и дипольной сингулярностей в (4) вместо использования точного полного мультипольного разложения для описания вихря с конечным размером ядра и постоянной завихренностью. Проверка проведена в [14] путем сравнения с расчетными данными работы [10], в которой вычислены интегралы при десингуляризации закона Био — Савара с точностью до восьмой значащей цифры для нескольких значений шага винтового вихря.

Сравнение методов расчета винтовых вихрей. Результаты расчета угловой скорости вращения самоиндуцированного движения винтовых нитей при $\Gamma = 4\pi$ с использованием различных методов представлены в таблице. Определены скорости для различных значений расстояния между соседними витками нити, отнесенного к диаметру вихревого ядра, начиная со значительного, равного 100 диаметрам, и заканчивая предельным случа-

Значения угловой скорости винтового вихря, полученные с помощью различных методов при различных расстояниях между элементами витка

$h/(2\varepsilon)$	Ω_C	Ω_O	Ω_D
100	-0,038	-0,038	-0,038
50	-0,125	-0,125	-0,125
30	-0,290	-0,292	-0,293
20	-0,560	-0,561	-0,563
10	-1,705	-1,700	-1,708
8	-2,727	-2,724	-2,738
5	-5,313	-5,314	-5,346
4	-9,624	-9,629	-9,703
3	-16,590	-16,599	-16,754
1	-95,228	-95,168	-96,565

ем, когда витки находятся на расстоянии $h/(2\varepsilon) = 2\varepsilon$, совпадающем с размером вихревого ядра. Несмотря на то что последний случай противоречит предположениям, на которых основаны все три модели ($\varepsilon \ll L$), расчет проводился до этого максимального критического значения, для того чтобы установить, когда результаты, полученные различными методами, начинают различаться. Следует отметить, что методы (1) и (3) десингуляризации дают одинаковые результаты практически до четвертой значащей цифры. Это минимальное различие обусловлено тем, что при численном интегрировании закона Био — Савара погрешности малы вплоть до некоторого значения $N\gamma$ в формуле (1), а также тем, что в (3) используются только главные члены разложения рядов Каптейна. Оба способа десингуляризации (с помощью усечения сингулярного участка либо расчета на расстоянии от нити) эквивалентны. По-видимому, это обусловлено выбором одинаковых вихревых колец для определения параметров десингуляризации в обоих подходах, обеспечивших равенство соответствующих величин: $\delta_C = \delta_R = 0,642$. Существенным недостатком этого отождествления с фиксированным вихревым кольцом является фактическая “заморозка” сечений вихревых ядер, приравненных к сечению ядра кольца в обоих методах. Эти модели не учитывают деформацию вихревого ядра при сближении соседних витков винтовой спирали.

В третьей модели (4), основанной на применении метода Дайсона, ядро описывается с помощью добавления дипольной сингулярности, что позволяет учитывать деформацию вихревого ядра за счет деформирования диполя при сжатии витков винтового вихря. По-видимому, этим обусловлено появление значительных различий при уменьшении винтового шага, начиная с $h/(2\varepsilon) = 5$, в решении методом Дайсона по сравнению с решениями с помощью первых двух моделей. Заметим, что при исследовании предельного случая $h/(2\varepsilon) = 1$ только одного дипольного слагаемого в полном мультипольном разложении на оси вихревой структуры для точного описания распределения завихренности в его ядре недостаточно, т. е. может потребоваться учет квадрупольной и других сингулярностей более высокого порядка. Однако отклонение от решения с недеформированным ядром должно описываться главным дипольным слагаемым, включенным в решение (4). Сравнивая данные, приведенные в таблице, можно сделать вывод, что существенная деформация начинается на участке $5 \leq h/(2\varepsilon) \leq 8$. Рис. 2 подтверждает этот вывод.

Заключение. Проведено сравнение трех методов решения задачи о винтовых вихрях с конечным размером ядра и подтверждена их эффективность вплоть до сближения вихревых ядер на расстояние, равное $8 \div 5$ калибрам их сечения. Этот результат коррелирует с результатом численного расчета с использованием метода усечения в работе [15], в которой установлено, что для шага винта $h/(2\pi) = 0,25R$ различия появляются при $\varepsilon = 0,25R$ (6,28 калибра).

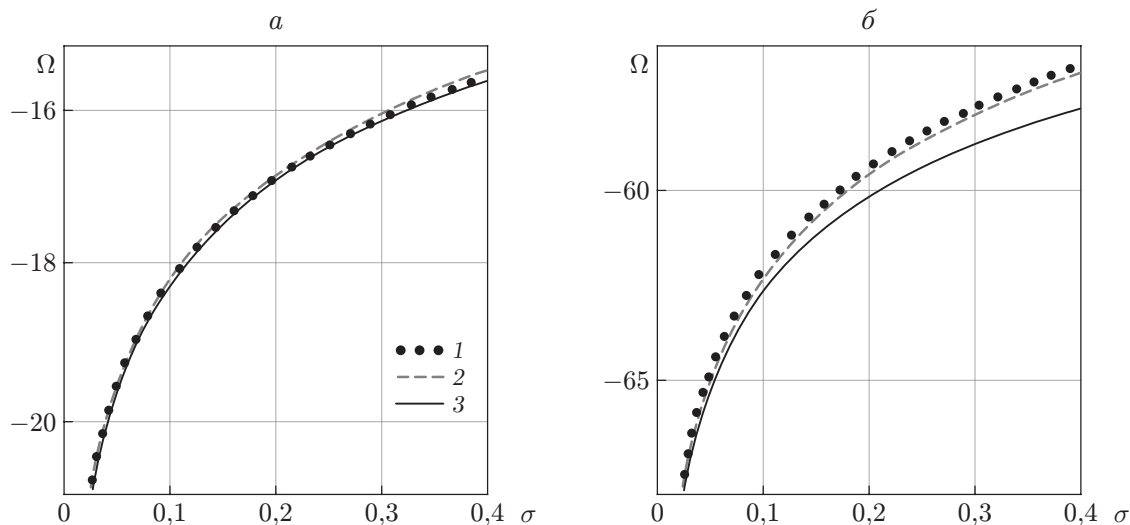


Рис. 2. Зависимости скорости движения вихревой нити от размера $\sigma = \varepsilon R$ ее вихревого ядра, полученные при различных значениях h с использованием различных методов:

a — $h = 1,6$, b — $h = 0,8$; 1 — метод усечения (Ω_C), 2 — приближение через вихревое кольцо (Ω_O), 3 — метод Дайсона (Ω_D)

При меньших относительных расстояниях между вихревыми нитями или их витками определенное преимущество имеет метод Дайсона, использование которого дает возможность дополнительно уточнить решение при включении новых сингулярных слагаемых в мультипольное разложение решения. Результаты, полученные с использованием метода Дайсона, более точные при определении равносечно вращающихся пар винтовых вихрей, интенсивно исследуемых в последнее время при моделировании роторных вихревых следов [16–18].

Для исследования произвольных вихревых нитей сохраняет актуальность метод усечения, позволяющий численно рассчитать с помощью интеграла Био — Савара любую конфигурацию вихревых нитей, наиболее сложные из которых имеют место при расчете движения вихрей в сверхтекучей жидкости (см. работу [19] и библиографию к ней). Однако при сближении вихрей следует применять установленное ограничение в $5 \div 6$ калибров. Более перспективным при решении этих задач может оказаться метод Дайсона, который в настоящее время применяется только для фиксированной формы винтовых нитей — вихревого кольца и винтового вихря.

ЛИТЕРАТУРА

1. **Alekseenko S. V.** Theory of concentrated vortices: An introduction / S. V. Alekseenko, P. A. Kuibin, V. L. Okulov. Berlin: Springer-Verlag, 2007.
2. **Бэтчелор Дж.** Введение в динамику жидкости. М.: Мир, 1973.
3. **Crow S. C.** Stability theory for a pair of trailing vortices // AIAA J. 1970. V. 8. P. 2172–2179.
4. **Saffman P. G.** Vortex dynamics. Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1992.
5. **Okulov V. L., Kabardin I. K., Mikkelsen R. F., et al.** Helical self-similarity of tip vortex cores // J. Fluid Mech. 2019. V. 859. P. 1084–1097.
6. **Moore D. W., Saffman P. G.** The motion of a vortex filament with axial flow // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1972. V. 272. P. 403–429.

7. **Ricca R. L.** The effect of torsion on the motion of a helical vortex filament // J. Fluid Mech. 1994. V. 273. P. 241–259.
8. **Okulov V. L.** On the stability of multiple helical vortices // J. Fluid Mech. 2004. V. 521. P. 319–342. DOI: 10.1017/s0022112004001934.
9. **Okulov V. L., Sørensen J. N.** The self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 2020. V. 883. A-5.
10. **Boersma J., Wood D. H.** On the self-induced motion of a helical vortex // J. Fluid Mech. 1999. V. 384. P. 263–280.
11. **Fukumoto Y., Okulov V. L., Wood D. H.** The contribution of Kawada to the analytical solution for the velocity induced by a helical vortex filament // ASME. Appl. Mech. Rev. 2015. V. 67, N 6. 060801. DOI: 10.1115/1.4031964.
12. **Fukumoto Y., Okulov V. L.** The velocity field induced by a helical vortex tube // Phys. Fluids. 2005. V. 17, N 10. 107101. DOI: 10.1063/1.2061427.
13. **Dyson F. W.** The potential of an anchor ring. 2 // Philos. Trans. Roy. Soc. London. Ser. A. 1893. V. 184. P. 1041–1106.
14. **Окулов В. Л., Фукумото Я.** Аналитическое решение для самоиндуцированного движения винтового вихря с гауссовым ядром // Теплофизика и аэромеханика. 2020. Т. 27, № 4. С. 507–514.
15. **Selçuk C., Delbende I., Rossi M.** Helical vortices: Quasiequilibrium states and their time evolution // Phys. Rev. Fluids. 2017. N 2. 084701.
16. **Okulov V. L.** An acentric rotation of two helical vortices of the same circulations // Regular Chaotic Dynamics. 2016. V. 21, N 3. P. 267–273.
17. **Delbende I., Piton B., Rossi M.** Merging of two helical vortices // Europ. J. Mech. B. Fluids. 2015. V. 49. P. 363–372.
18. **Окулов В. Л.** Вихревая пара соосных винтовых нитей // ПМТФ. 2020. Т. 61, № 3. С. 34–41.
19. **Andryushchenko V. A., Kondaurova L. P., Nemirovskii S. K.** Dynamics of quantized vortices before reconnection // J. Low Temperature Phys. 2016. V. 185. P. 377–383. DOI: 10.1007/s10909-016-1614-9.

*Поступила в редакцию 12/III 2021 г.,
после доработки — 12/III 2021 г.
Принята к публикации 29/III 2021 г.*
