

**ИНТЕГРАЛЬНОЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЕ
ДРОБНО-ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ ПРИЛОЖЕНИЕ
К ДИНАМИЧЕСКИМ ЗАДАЧАМ ЛИНЕЙНОЙ ВЯЗКО-УПРУГОСТИ**

С. И. Мешков

(Москва)

Дано интегральное представление дробно-экспоненциальных функций, и для соответствующих релаксационных и ретардационных спектров получены функции распределения, обладающие особенностью абелевского типа. Сформулирован принцип, определяющий те динамические задачи, для которых можно использовать слабосингулярные функции в качестве ядер интегральных операторов. Рассмотрена одномерная звуковая волна, распространяющаяся в полуграниченной вязко-упругой среде.

Обобщенные экспоненты дробного порядка, предложенные Ю. Н. Работновым [1,2] в качестве ядер интегральных соотношений Больцмана — Вольтерра, нашли широкое применение в теории линейной вязко-упругости. С одной стороны, это объясняется большой математической гибкостью \mathcal{E} -операторов при применении принципа Вольтерра к решению упруго-наследственных задач, а другой — тем, что почти все слабосингулярные ядра, обладающие особенностью абелевского типа, так или иначе связаны с \mathcal{E} -функциями. Например, простейшее слабосингулярное ядро Абеля имеет своей резольвентой \mathcal{E} -функцию. Выражение, представляющее собой произведение экспоненты на ядро Абеля, является частным случаем произведения двух \mathcal{E} -функций с разными параметрами дробности, а резольвента такого ядра оказывается произведением экспоненты на \mathcal{E} -функцию [3,4]. \mathcal{E} -функции определяются довольно медленно сходящимися рядами, а поэтому для практических расчетов часто пользуются их различными асимптотическими представлениями [2, 5-8]. Дальнейшее развитие теории \mathcal{E} -функций может быть связано с их интегральным представлением, которое позволяет уточнить физический смысл параметров, а в некоторых случаях упростить вычислительные операции.

1. Наиболее общее определение \mathcal{E} -функций дано в работе [1], и в дальнейшем здесь используется эта идея, а вычисления проводятся в пространстве Лапласа и вводятся другие обозначения.

Исходными являются следующие соотношения между напряжением σ и деформацией ε :

$$\begin{aligned} \sigma &= E_{\infty} \left[\varepsilon(t) - \nu_{\varepsilon} \int_0^{\infty} R(t') \varepsilon(t-t') dt' \right], & \nu_{\varepsilon} &= (E_{\infty} - E_0) E_{\infty}^{-1} \\ \varepsilon &= J_{\infty} \left[\sigma(t) + \nu_{\sigma} \int_0^{\infty} K(t') \sigma(t-t') dt' \right], & \nu_{\sigma} &= (J_0 - J_{\infty}) J_{\infty}^{-1} \end{aligned} \quad (1.1)$$

Здесь $E_{\infty} = J_{\infty}^{-1}$, $E_0 = J_0^{-1}$ — соответственно нерелаксированное и релаксированное значения упругого модуля и податливости; $R(t)$ и $K(t)$ ядра релаксации и последействия, которые можно выразить через функции распределения $A_1(\tau, \tau_{\varepsilon})$ и $B_1(\tau, \tau_{\sigma})$ соответственно времен релаксаций τ_{ε} и ретардаций τ_{σ}

$$R(t) = \int_0^{\infty} \tau^{-1} A_1(\tau, \tau_{\varepsilon}) e^{-t/\tau} d\tau, \quad K(t) = \int_0^{\infty} \tau^{-1} B_1(\tau, \tau_{\sigma}) e^{-t/\tau} d\tau \quad (1.2)$$

Формула, связывающая трансформанты Лапласа $R_*(p)$ и $K_*(p)$ ядер релаксации и последействия, имеет вид

$$E_{\infty} - E_0 = E_{\infty} R_*^{-1}(p) - E_0 K_*^{-1}(p) \quad (1.3)$$

Простейшей наследственной функцией, обладающей интегрируемой особенностью, является ядро Абеля, которое характеризует неустановившийся процесс. Поэтому реальный смысл имеет его использование в качестве ядра последствия для описания неустановившейся ползучести [9]. Однако формально можно принять обе возможности

$$K(t) = t^{\gamma-1} / \Gamma(\gamma) \tau_{\sigma}^{\gamma}, \quad R(t) = t^{\gamma-1} / \Gamma(\gamma) \tau_{\epsilon}^{\gamma}, \quad E_0 \tau_{\sigma}^{\gamma} = E_{\infty} \tau_{\epsilon}^{\gamma} \quad (1.4)$$

Здесь $\Gamma(\gamma)$ — гамма-функция, γ — параметр сингулярности ($0 < \gamma \leq 1$). Тогда из соотношения (1.3) для соответствующих резольвент в пространстве Лапласа получается

$$R_*(p) = v_{\epsilon}^{-1} [v^{-1}(p\tau)^{\gamma} + 1]^{-1}, \quad K_*(p) = v_{\sigma}^{-1} [v^{-1}(p\tau)^{\gamma} - 1]^{-1} \quad (1.5)$$

Здесь и в дальнейшем принято $\tau = \tau_{\epsilon}$ при $v = v_{\epsilon}$, $\tau = \tau_{\sigma}$ при $v = v_{\sigma}$, где величины τ и v стоят без индексов.

Переход в пространство оригиналов можно осуществить двояким образом: во-первых, формальным разложением правых частей выражений (1.5) в ряд по степеням $v(p\tau)^{-\gamma}$ с последующим почленным переходом к оригиналу, а во-вторых, непосредственным применением формулы обращения Меллина — Фурье. В первом случае получается

$$R(t) = \tau_{\epsilon}^{-\gamma} \mathcal{E}_{\gamma}(-v, t/\tau), \quad K(t) = \tau_{\sigma}^{-\gamma} \mathcal{E}_{\gamma}(v, t/\tau),$$

$$\mathcal{E}_{\gamma}(\pm v, t/\tau) \equiv t^{\gamma-1} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\pm v)^n (t/\tau)^{\gamma n}}{\Gamma[\gamma(n+1)]} \quad (1.6)$$

Здесь \mathcal{E}_{γ} — дробно-экспоненциальная функция Ю. Н. Работнова [1, 2], которая, как видно из (1.6), может определяться обычным или знакпеременным рядом.

В случае непосредственного обращения по формуле Меллина — Фурье \mathcal{E}_{γ} -функция получается в виде интегрального представления

$$R(t) = \tau_{\epsilon}^{-\gamma} \mathcal{E}_{\gamma}(-v, t/\tau) = \frac{v_{\epsilon}^{-1}}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} \frac{\exp(pt) dp}{1 + v^{-1}(p\tau)^{\gamma}} \quad (1.7)$$

Здесь для определенности взята \mathcal{E}_{γ} -функция со знаком минус перед параметром v , ибо этот случай имеет реальный смысл для приложений.

Особые точки подынтегральной функции (1.7) при $\gamma \neq 1$ — это точки разветвления $p = 0$, $p = \infty$ и простые полюсы при тех значениях p , которые обращают в нуль знаменатель $(p\tau)^{\gamma} + v$. Эти значения p таковы

$$p_{1,2} = \tau^{-1} v^{1/\gamma} [\cos(\pi/\gamma) \pm i \sin(\pi/\gamma)] \quad (1.8)$$

К многозначным функциям, имеющим точку разветвления, теорема обращения применима только для первого листа римановой поверхности, т. е. $-\pi \leq \arg p \leq \pi$, и при вычислении контурного интеграла (1.7) вычеты в точках $p_{1,2}$ во внимание не принимаются. Наоборот, при $\gamma = 1$ одна особая точка $p = v\tau^{-1}$ является полюсом первого порядка, и для вычисления интеграла достаточно найти вычет в этой точке. Тогда, выбирая контур интегрирования с разрезом вдоль отрицательной действительной оси и применяя теорему Коши, получаем

$$\tau_{\epsilon}^{-\gamma} \mathcal{E}_{\gamma}(-v_{\epsilon}, t/\tau_{\epsilon}) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi v_{\epsilon}} \int_0^{\infty} \frac{\tau^{-2} \exp(-t/\tau) d\tau}{(\tau/\tau_{\epsilon})^{\gamma} v_{\epsilon} + (\tau/\tau_{\epsilon})^{-\gamma} v_{\epsilon}^{-1} + 2 \cos \pi\gamma} \quad (\gamma \neq 1)$$

$$\mathcal{E}_1(-v, t/\tau) = \exp(-vt/\tau) \quad (\gamma = 1) \quad (1.9)$$

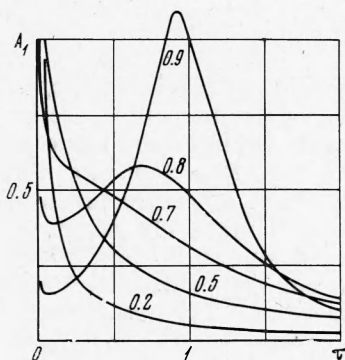
Сравнивая (1.2) и (1.9), можно записать явный вид функции распределения времен релаксаций

$$A_1(\tau, \tau_\epsilon) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi\tau\nu_\epsilon} \left[\left(\frac{\tau}{\tau_\epsilon} \right)^\gamma \nu_\epsilon + \left(\frac{\tau}{\tau_\epsilon} \right)^{-\gamma} \nu_\epsilon^{-1} + 2 \cos \pi\gamma \right]^{-1} \quad (1.10)$$

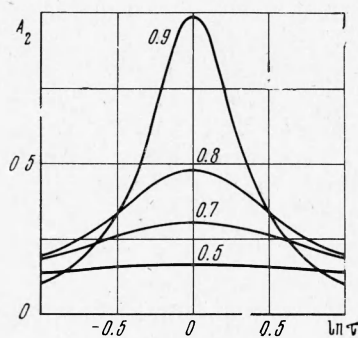
Для малых значений τ справедлива асимптотическая формула

$$A_1(\tau, \tau_\epsilon) = \frac{\sin \pi\gamma}{\pi\tau_\epsilon^\gamma} \tau^{\gamma-1} \quad (1.11)$$

которая представляет собой не что иное, как функцию распределения для ядра Абеля.



Фиг. 1



Фиг. 2

В самом деле, подставляя (1.11) в (1.2) и используя определение гамма-функции через интеграл Эйлера, получаем формулы (1.4). Таким образом, ядру релаксации Ю. Н. Работнова (1.6), обладающему особенностью абелевского типа при $t = 0$, соответствует функция распределения (1.10), которая также обладает особенностью абелевского типа, но уже по отношению ко времени релаксации при $\tau = 0$. Нетрудно убедиться в том, что при $\tau \rightarrow \infty$ функция распределения $A_1(\tau, \tau_\epsilon)$ стремится к нулю, а при условии $\gamma \geq \sin \pi\gamma$, т. е. для $\gamma \geq 0.738$, достигает максимального значения. Это хорошо видно из фиг. 1, где цифрами у кривых помечены значения параметра γ , и принято $\nu_\epsilon = 1$, $\tau_\epsilon = 1$. Следует отметить, что при $\nu_\epsilon = 1$ \mathcal{E}_γ -функции обладают свойством, позволяющим записать ядро релаксации и его резольвенту — ядро последствия — в симметричном виде, а именно

$$R(t) = \tau_\epsilon^{-\gamma} \mathcal{E}_\gamma(-1, t/\tau_\epsilon), \quad K(t) = \tau_\epsilon^{-\gamma} \mathcal{E}_\gamma(-1, t/\tau_\epsilon) \quad (1.12)$$

Важным свойством слабосингулярных функций распределения времен релаксаций является тот факт, что соответствующие им функции распределения логарифмов времен релаксаций особенностью не обладают. В самом деле, производя замену $s = \ln \nu_\epsilon^{1/\gamma} \tau \tau_\epsilon^{-1}$ в формулах (1.2) и (1.10), (1.11), найдем соответственно

$$A_2(s) = [2\pi (\operatorname{ch} \gamma s + \cos \pi\gamma)]^{-1} \sin \pi\gamma, \quad \nu_\epsilon A_2(s) = \pi^{-1} \sin(\pi\gamma) \exp(\gamma s) \quad (1.13)$$

Первая из формул (1.13) была получена при исследовании дисперсии диэлектрической проницаемости [10]. Из фиг. 2, где цифрами у кривых отмечены значения параметра γ , видно, что график функции $A_2(s)$ представляет собой симметричный пик, достигающий при $s = 0$ максимального значения

$$A_2(0) = \frac{1}{2} \pi^{-1} \operatorname{tg} \psi, \quad \psi = \frac{1}{2} \pi\gamma$$

и (m)

2. Рассмотрим поведение упруго-наследственных соотношений (1.1) при гармоническом деформировании (нагружении). Тогда, переписав соотношения (1.1) в пространстве Фурье ($p \rightarrow i\omega$), получим

$$w = \frac{1}{z^*}, \quad w = x_\varepsilon + iy_\varepsilon, \quad z^* = x_\sigma - iy_\sigma \quad (2.1)$$

Здесь $w = E / E_\infty$ и $z^* = J / J_\infty$ — соответственно комплексные значения модуля и податливости, а реальные и мнимые части определяются выражениями

$$x_\varepsilon = 1 - \nu_\varepsilon \int_0^\infty R(t) \cos \omega t dt, \quad y_\varepsilon = \nu_\varepsilon \int_0^\infty R(t) \sin \omega t dt \quad (2.2)$$

$$x_\sigma = 1 + \nu_\sigma \int_0^\infty K(t) \cos \omega t dt, \quad y_\sigma = \nu_\sigma \int_0^\infty K(t) \sin \omega t dt \quad (2.3)$$

Таким образом, для упруго-наследственных сред (1.1) переход от податливости к модулю реализуется при помощи функции комплексного переменного вида (2.1). Поскольку введение \mathcal{E}_γ -функций связано с нахождением резольвентных ядер, то здесь уместно поставить вопрос о величинах, являющихся резольвентными инвариантами, т. е. остающихся неизменными в пространстве Фурье при переходе

от плоскости комплексной податливости к плоскости комплексного модуля. В общем случае согласно (2.1) существуют два независимых резольвентных инварианта. Во-первых, это отношение мнимых и действительных частей модуля и податливости, или так называемый тангенс угла механических потерь

$$\operatorname{tg} \varphi = y_j / x_j, \quad j = \varepsilon, \sigma, \quad \varphi \in [0, 1/2\pi] \quad (2.4)$$

Нетрудно установить из (2.1), что вторым независимым инвариантом является выражение

$$(x_\sigma^2 + y_\sigma^2)(x_\varepsilon^2 + y_\varepsilon^2) = 1 \quad (2.5)$$

В частных случаях инвариантов может быть больше.

Используя эти общие соображения, проследим за поведением комплексных плоскостей модуля и податливости при построении \mathcal{E}_γ -функций.

Для ядра последствия Абея (1.4) и соответствующего ядра релаксации Ю. Н. Работнова (1.6) имеем

$$x_\sigma = 1 + \nu (\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi, \quad y_\sigma = \nu (\omega\tau)^{-\gamma} \sin \psi \quad (2.6)$$

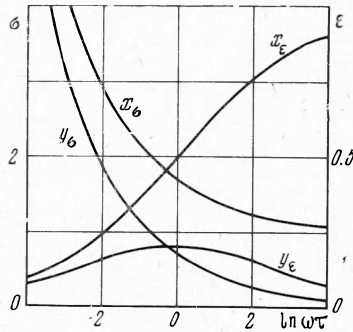
$$x_\varepsilon = \frac{\nu^{-1} (\omega\tau)^\gamma + \cos \psi}{\nu^{-1} (\omega\tau)^\gamma + \nu (\omega\tau)^{-\gamma} + 2 \cos \psi}, \quad y_\varepsilon = \frac{\sin \psi}{\nu^{-1} (\omega\tau)^\gamma + \nu (\omega\tau)^{-\gamma} + 2 \cos \psi} \quad (2.7)$$

Дисперсию величин (2.6) и (2.7) иллюстрирует фиг. 3, где принято следующее значение параметра $\gamma = 1/2$. Максимум величины y_ε достигается при условии $\nu^{-1} (\omega\tau)^\gamma = 1$ и равен $y_\varepsilon^{(m)} = 1/2 \operatorname{tg} 1/2\psi$.

Из (2.6) и (2.7) нетрудно получить уравнения, связывающие x_j и y_j

$$y_\sigma = (x_\sigma - 1) \operatorname{tg} \psi, \quad (x_\varepsilon - 1/2)^2 + (y_\varepsilon + 1/2 \operatorname{ctg} \psi)^2 = 1/4 \operatorname{csc}^2 \psi \quad (2.8)$$

Таким образом, в плоскости комплексной податливости (x_σ, y_σ) имеем уравнение прямой, пересекающей ось абсцисс в точке $x_\sigma = 1$ под углом $2\pi - \psi$, $\psi = 1/2 \pi\gamma$, отсчитываемого в положительном направлении (против часовой стрелки).



Фиг. 3

В плоскости комплексного модуля $(x_\varepsilon, y_\varepsilon)$ получается уравнение окружности с центром в точке

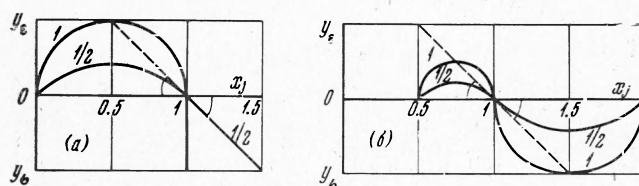
$$x_\varepsilon^c = 1/2, \quad y_\varepsilon^c = -1/2 \operatorname{ctg} \psi$$

и проходящую через начало координат, так как ее радиус равен

$$r = 1/2 \operatorname{csc} \psi \quad (2.9)$$

При $\gamma = 1$, $\psi = 1/2 \pi$ поведение комплексного модуля соответствует реологической модели Максвелла.

Этот факт иллюстрирует фиг. 4, а, где по оси абсцисс отложены действительные величины x_j , а по оси ординат — мнимые y_j . Цифрами у кривых отмечены значения γ . Точка $x_j = 1$ соответствует $\omega = \infty$.



Фиг. 4

Непосредственной подстановкой (2.6) и (2.7) в (2.4) и (2.5) можно убедиться в инвариантности соответствующих величин, причем тангенс угла механических потерь равен

$$\operatorname{tg} \varphi = [\cos \psi + \nu^{-1} (\omega\tau)^\gamma]^{-1} \sin \psi \quad (2.10)$$

Формула (2.10) использовалась для описания фона релаксационного внутреннего трения и его физических характеристик, в частности, для определения истинного значения энергии активации [11].

Следует отметить, что в случае ядер с абелевской особенностью появляется третий инвариант, а именно $\operatorname{tg} \psi$ — тангенс угла, под которым касательная к кривой в комплексной плоскости пересекает действительную ось при $\omega = \infty$, т. е. абсолютное значение угла ψ остается неизменным в точке, соответствующей $\omega = \infty$.

Итак, следует вывод: особенность наследственных ядер абелевского типа относительно времени при $t = 0$ и соответствующих функций распределения по отношению ко времени ретардации (релаксации) при $\tau = 0$ определяет в комплексных плоскостях податливости и модуля угол $\psi = 1/2\pi\gamma$ между касательной к мнимой кривой и действительной осью при частоте $\omega = \infty$. Если $\gamma = 1$, то особенности нет и $\psi = 1/2\pi$, например, модель Максвелла. Поскольку при решении стационарных динамических задач теории линейной вязко-упругости в большинстве случаев входит безразмерный параметр $\omega\tau$, то особенность абелевского типа обнаруживается только через параметр γ , входящий обычно как показатель степени, т. е. $(\omega\tau)^\gamma$. В тех случаях, когда τ и ω входят независимо друг от друга, абелевская особенность проявится непосредственно при $\tau = 0$ или $\omega = \infty$. Этот факт ниже иллюстрируется на примере звуковой волны в упруго-наследственной среде.

Если воспользоваться выражениями ядер релаксаций и последействия через \mathcal{E}_γ -функции в симметричном виде (1.12), то комплексные значения податливости и модуля запишутся в виде

$$x_j = 1 \pm \nu_j \frac{(\omega\tau_j)^{-\gamma} + \cos \psi}{(\omega\tau_j)^\gamma + (\omega\tau_j)^{-\gamma} + 2 \cos \psi}, \quad y_j = \frac{\nu_j \sin \psi}{(\omega\tau_j)^\gamma + (\omega\tau_j)^{-\gamma} + 2 \cos \psi} \quad (2.11)$$

Дисперсия величин (2.11) приведена в работах [12, 13].

Исключая в (2.11) параметр $\omega\tau$, в обоих случаях получаем уравнения окружностей

$$[x_j - (1 \pm 1/2 v_j)]^2 + (y_j + 1/2 v_j \operatorname{ctg} \psi)^2 = 1/4 v_j^2 \operatorname{csc}^2 \psi \quad (2.12)$$

Окружность (2.12) радиуса $r_\sigma = 1/2 v_\sigma \operatorname{csc} \psi$ с центром в точке

$$x_\sigma^c = 1 + 1/2 v_\sigma, \quad y_\sigma^c = -1/2 v_\sigma \operatorname{ctg} \psi$$

пересекает действительную ось x_σ в точках

$$x_\sigma(\infty) = 1, \quad x_\sigma(0) = 1 + v_\sigma = J_0 J_\infty^{-1}$$

Окружность (2.12) радиуса $r_\epsilon = 1/2 v_\epsilon \operatorname{csc} \psi$ с центром

$$x_\epsilon^c = 1 - 1/2 v_\epsilon, \quad y_\epsilon^c = -1/2 v_\epsilon \operatorname{ctg} \psi$$

пересекает действительную ось x_ϵ в точках

$$x_\epsilon(0) = 1 - v_\epsilon = E_0 E_\infty^{-1}, \quad x_\epsilon(\infty) = 1$$

Отсюда следует $\operatorname{tg}(\pi - \psi) = \operatorname{tg}(2\pi - \psi)$, т. е. $|\psi| = \operatorname{invar}$. Это хорошо видно из фиг. 4, б, где принято $E_0 E_\infty^{-1} = \gamma = 1/2$. Нетрудно заметить, что при $E_0 E_\infty^{-1} \rightarrow 0$ фиг. 4, б, переходит в фиг. 4, а.

Подстановка (2.11) в (2.4) и (2.5) проверяет правильность первых двух инвариантов, причем

$$\operatorname{tg} \varphi = [E_\infty (\omega\tau_\epsilon)^\gamma + E_0 (\omega\tau_\epsilon)^{-\gamma} + (E_\infty + E_0) \cos \psi]^{-1} (E_\infty - E_0) \sin \psi \quad (2.13)$$

Формула (2.13) используется для описания пика внутреннего трения при наличии симметричного спектра логарифма времен релаксаций [14].

В силу симметрии выбранных ядер релаксации и последствия модуль угла ψ сохраняется не только при $\omega = \infty$, но также и при $\omega = 0$. Этот факт приводит к появлению дополнительных резольвентно-инвариантных величин. Например, такими величинами являются отношения длин окружностей к дефектам модуля и податливости, отношения площадей кругов, а также соответствующих сегментов в комплексных полуплоскостях, к квадратам дефектов модуля и податливости.

3. В качестве примера, иллюстрирующего применение \mathcal{E}_γ — функций к динамическим задачам наследственной упругости, рассмотрим распространение одномерной плоской поперечной звуковой волны в положительном направлении оси x . В силу соотношений (1.1) уравнение движения можно записать в двух эквивалентных формах

$$\begin{aligned} \ddot{u} &= c_\infty^2 \frac{\partial^2}{\partial x^2} \left[u - v_\epsilon \int_0^\infty R(t') u(t-t', x) dt' \right] \\ \ddot{u} &= c_\infty^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - v_\sigma \int_0^\infty K(t') u(t-t', x) dt' \end{aligned} \quad (3.1)$$

Здесь $u = u(x, t)$ — вектор перемещения в направлении, перпендикулярном оси x , точки над буквой означают производные по времени.

Для стационарного решения

$$u(x, t) = X(x) e^{i\omega t} \quad (3.2)$$

из (3.1) получается уравнение для функции $X(x)$

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \lambda^2 X = 0, \quad \lambda^2 = c_\infty^{-2} \omega^2 w^{-1} = c_\infty^{-2} \omega^2 z^* \quad (3.3)$$

Решение уравнения (3.3) имеет вид

$$X(x) = A e^{i\lambda x} + B e^{-i\lambda x} \quad (3.4)$$

Постоянные A и B находятся из граничных условий. Для случая затухающей волны при $x \geq 0$ нетрудно установить, что $A = 0$, $B = X(0)$. Таким образом, решение (3.2) запишется в виде

$$u(x, t) = X(0) \exp [i(\omega t - kx) - \alpha x] \quad (3.5)$$

$$k = c_\infty^{-1} \omega |z|^{1/2} \cos 1/2 \varphi = c_\infty^{-1} \omega |w|^{-1/2} \cos 1/2 \varphi \quad (3.6)$$

$$\alpha = c_\infty^{-1} \omega |z|^{1/2} \sin 1/2 \varphi = c_\infty^{-1} \omega |w|^{-1/2} \sin 1/2 \varphi \quad (3.7)$$

Здесь k — модуль волнового вектора, α — коэффициент поглощения, φ — угол сдвига фаз между напряжением и деформацией, определяемый по формуле (2.4).

Из (3.6) определяется фазовая скорость c и логарифмический декремент Δ , дающий затухание волны в пространстве

$$c = \omega k^{-1} = c_\infty |z|^{-1/2} \sec 1/2 \varphi = c_\infty |w|^{1/2} \sec 1/2 \varphi \quad (3.8)$$

$$\Delta = \ln [u(x, t) / u(x + 2l\omega^{-1}c, t)] = 2l \operatorname{tg} 1/2 \varphi = 2l\alpha k^{-1} \quad (3.9)$$

Волновые характеристики (3.6) — (3.9) иллюстрируют свойства слабосингулярных наследственных функций в стационарных динамических задачах.

Дисперсия фазовой скорости (3.8) и логарифмического декремента (3.9), равно как и тангенса угла механических потерь (2.4), определяется параметром $\omega\tau$, и согласно исследованиям п. 2 особенность абелевского типа проявится только через коэффициент дробности γ . Иное дело коэффициент поглощения α (3.7) и модуль волнового вектора k (3.6), в которые частота ω входит не только в виде произведения $\omega\tau$, но также и отдельно — в виде множителя. Поэтому для рассматриваемых здесь слабосингулярных наследственных функций при $\omega \rightarrow \infty$ α и k неограниченно возрастают, причем для k это справедливо всегда. В самом деле, выпишем волновые характеристики для наследственных ядер (1.4) и (1.6), подставив (2.6), (2.7) и (2.10) в (3.6) — (3.9). В результате запишем

$$k, \alpha = 2^{-1/2} c_\infty^{-1} \omega \{ [1 + 2\nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi + \nu^2(\omega\tau)^{-2\gamma}]^{1/2} \pm [1 + \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi] \}^{1/2} \quad (3.10)$$

В формуле (3.10) знак плюс — для k , знак минус — для α . При $\gamma = 1$ (модель Максвелла) формула (3.10) значительно упрощается

$$k, \alpha = 2^{-1/2} c_\infty^{-1} \omega \{ [1 + \nu^2(\omega\tau)^{-2}]^{1/2} \pm 1 \}^{1/2} \quad (3.11)$$

Интересна асимптотика величин k и α для больших и малых частот. При $\gamma \neq 1$ имеем

$$\omega \gg 1, \quad k \approx c_\infty^{-1} \omega [1 + 1/2 \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi] \quad (3.12)$$

$$\omega \ll 1, \quad k \approx c_\infty^{-1} (\nu/\tau^\gamma)^{1/2} \omega^{1-1/2\gamma} \cos 1/2 \psi \quad (3.13)$$

Следовательно, величина k при $\omega \rightarrow \infty$ неограниченно возрастает примерно по линейному закону, а при $\omega \rightarrow 0$ тоже стремится к нулю.

Аналогично обстоит дело при $\gamma \neq 1$ и для коэффициента поглощения α , асимптотические формулы которого имеют вид

$$\omega \gg 1 \quad \alpha \approx 1/2 c_\infty^{-1} \nu \tau^{-\gamma} \omega^{1-\gamma} \sin \psi \quad (3.14)$$

$$\omega \ll 1 \quad \alpha \approx c_\infty^{-1} (\nu/\tau^\gamma)^{1/2} \omega^{1-1/2\gamma} \sin 1/2 \psi \quad (3.15)$$

Асимптотика k и α для модели Максвелла ($\gamma = 1$, формула 3.11) определяется следующими выражениями

$$(\omega \gg 1) \quad k \approx c_\infty^{-1} \omega [1 + 1/2 (\nu/2\omega\tau)^2], \quad \alpha \approx 1/2 c_\infty^{-1} \nu \tau^{-1} [1 - 1/2 (\nu/2\omega\tau)^2] \quad (3.16)$$

$$(\omega \ll 1) \quad k \approx \alpha \approx c_\infty^{-1} \omega^{1/2} (\nu/2\tau)^{1/2} \quad (3.17)$$

Таким образом, при $\gamma = 1$ и $\omega \rightarrow \infty$ коэффициент поглощения α в первом приближении не зависит от частоты и определяется константой $(2c_\infty\tau)^{-1} \nu$. Это принципиальное различие в поведении коэффициента поглощения α при $\gamma \neq 1$ и $\gamma = 1$ для высоких частот подтверждает выводы п. 2. Экспериментальные исследования дисперсии коэффициента поглощения [15] в довольно широком диапазоне частот подтверждают формулу (3.10), т. е. с увеличением частоты коэффициент поглощения возрастает, не обнаруживая стремления к константе.

Для скорости распространения волны c и логарифмического декремента Δ в случае ядер (1.4) и (1.6) получаются выражения

$$c = \sqrt{2} c_{\infty} \{ [1 + 2\nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi + \nu^2(\omega\tau)^{-2\gamma}]^{1/2} + [1 + \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi] \}^{-1/2} \quad (3.18)$$

$$\left(\frac{\Delta}{2\pi}\right)^2 = \frac{[1 + 2\nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi + \nu^2(\omega\tau)^{-2\gamma}]^{1/2} - [1 + \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi]}{[1 + 2\nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi + \nu^2(\omega\tau)^{-2\gamma}]^{1/2} + [1 + \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi]} \quad (3.19)$$

При $\gamma = 1$ для c и Δ получаются формулы

$$c = \sqrt{2} c_{\infty} \{ [1 + \nu^2(\omega\tau)^{-2}]^{1/2} + 1 \}^{-1/2}, \quad \Delta = \sqrt{2\pi} c c_{\infty}^{-1} \{ [1 + \nu^2(\omega\tau)^{-2}]^{1/2} - 1 \}^{1/2} \quad (3.20)$$

Асимптотическое поведение c и Δ при больших и малых частотах определяется выражениями

$\gamma \neq 1$

$$(\omega \gg 1) \quad c \approx c_{\infty} [1 - 1/2 \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \cos \psi], \quad \Delta \approx \pi \nu(\omega\tau)^{-\gamma} \sin \psi \quad (3.21)$$

$$(\omega \ll 1) \quad c \approx c_{\infty} \nu^{-1/2} (\omega\tau)^{\gamma/2} \sec 1/2 \psi, \quad \Delta \approx 2\pi [1 - \nu^{-1}(\omega\tau)^{\gamma}] \operatorname{tg} 1/2 \psi \quad (3.22)$$

$\gamma = 1$

$$(\omega \gg 1) \quad c \approx c_{\infty} [1 - 1/8 \nu^2(\omega\tau)^{-2}], \quad \Delta \approx \pi \nu(\omega\tau)^{-1} \quad (3.23)$$

$$(\omega \ll 1) \quad c \approx c_{\infty} (2\omega\tau \nu^{-1})^{1/2}, \quad \Delta \approx [1 - \nu^{-1}(\omega\tau)] 2\pi \quad (3.24)$$

Формулы (3.10) — (3.24) подтверждают выводы, сделанные в п. 2. Исследование волновых характеристик для симметричных \mathcal{E}_{γ} -функций можно найти в работе [16].

В заключение автор благодарит Ю. Н. Работнова за обсуждение результатов.

Поступила 3 III 1969

ЛИТЕРАТУРА

1. Работнов Ю. Н. Равновесие упругой среды с последствием. ПММ, 1948, т. 12, вып. 1.
2. Работнов Ю. Н. Ползучесть элементов конструкций. М., «Наука», 1966, гл. 3.
3. Вульфсон С. З. Температурные напряжения в бетонных массивах с учетом ползучести бетона. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1960, № 1.
4. Колтунов М. А. К вопросу выбора ядер при решении задач с учетом ползучести и релаксации. Механика полимеров, 1966, № 4.
5. Аннин Б. Д. Асимптотическое разложение экспоненциальной функции дробного порядка. ПММ, 1961, т. 25, вып. 4.
6. Розовский М. И. Нелинейные интегрально-операторные уравнения ползучести и задача о кручении цилиндра при больших углах крутки. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1959, № 5.
7. Розовский М. И. О некоторых особенностях упруго-наследственных сред. Изв. АН СССР, ОТН, Механика и машиностроение, 1961, № 2.
8. Синайский Е. С. Об асимптотическом представлении оператора для описания поведения упруго-наследственных сред, воздействующего на степенную функцию. Изв. АН СССР, Механика, 1965, № 1, стр. 128.
9. Duffing G. Elastizität und Reibung beim Riemetrieb. Forschungsgeb. Ingenieurwesens, 1931, Bd. 2, Nr 3, S. 99.
10. Cole K. S., Cole R. H., Dispersion and Absorption. J. Chem. Phys., 1941, vol. 9, p. 341.
11. Schoeck G., Bisogni E., Shyne S. The activation energy of high temperature internal friction. Acta metallurgica, 1964, vol. 12, p. 1466.
12. Мешков С. И. К описанию внутреннего трения в наследственной теории упругости при помощи ядер, обладающих слабой сингулярностью. ПМТФ, 1967, № 4.
13. Мешков С. И., Пачевская Г. Н., Шермергор Т. Д. К описанию внутреннего трения при помощи дробно-экспоненциальных ядер. ПМТФ, 1966, № 3.
14. Шермергор Т. Д. Расчет функции распределения констант релаксаций по дисперсии действительной части комплексной упругости для упруго-вязких тел. Изв. вузов, Физика, 1961, № 1, стр. 77.
15. Физическая акустика под ред. У. Мэсона, т. 3, ч. Б. Динамика решетки, гл. 7, М., «Мир», 1968.
16. Мешков С. И., Россихин Ю. А. О распространении звуковых волн в наследственно упругой среде. ПМТФ, 1968, № 5.