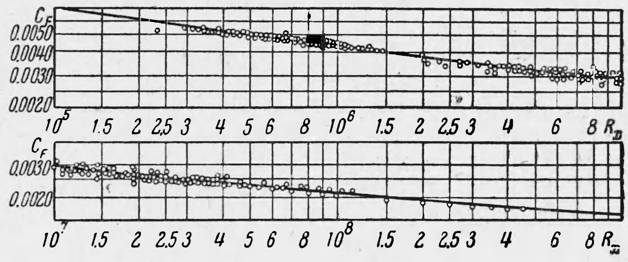
Используя рассмотренные характеристики внешней части пограничного слоя и характеристики логарифмического профиля для внутренней части слоя (непосредственно вблизи пластины), можно получить следующие приближенные формулы для расчета местного C_f и полного C_F коэффициентов трения пластины в зависимости от числа Рейнольдса

$$C_f \approx \frac{0.0905}{(\lg 0.125 R_x)^2} \qquad (14)$$

$$C_F \approx \frac{0.0905}{(\lg 0.0355 R_x)^2}$$



Фиг. 3

Из фиг. 2 и 3 следует, что приведенные формулы (сплошные кривые) хорошо согласуются с результатами экспериментов для значений числа R_x от $0.23 \cdot 10^6$ до $435.0 \times \times 10^6$.

Поступила 24 II 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Nikuradse J. Turbulente Reibungsschichten an der Platte. Herausgegeben von ZWB der Lftf.— Forsch. 1942.
2. Абрамович Г. Н. Турбулентные свободные струи жидкостей и газов. Госэнергоиздат, 1948.
3. Goldstein S. Modern developments in fluid dynamics. London, 1943.
4. Лойцянский Л. Г. Аэродинамика пограничного слоя. ГИТТЛ, 1941.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ СТАЦИОНАРНОГО ВРАЩЕНИЯ КАРУСЕЛЬНОГО ГИДРОКАНАЛА

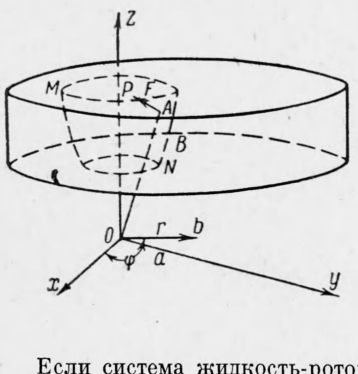
Г. К. Пожарицкий

(*Москва*)

Для решения озаглавленной задачи используется схема, близкая к схеме ротора на гибком валу [1].

Вообразим систему координат x, y, z с началом в неподвижной точке O и вертикальной осью z, вращающуюся с постоянной угловой скоростью ω вокруг этой оси, и ротор — тяжелое твердое тело,— стесненное идеальными голономными связями, могущее совершать поступательные перемещения по отношению к этой системе.

Пусть ротор имеет цилиндрическую полость с осью (фигура), параллельной оси z, радиусом R и высотой H, частично заполненную жидкостью плотности σ, тяжелой и несжимаемой. Предположим, что некая точка A ротора удерживается идеальной связью на постоянном расстоянии l от точки O и что в точке A приложена сила F, направленная из точки A к оси z перпендикулярно к ней, пересекающая эту ось в точке P и пропорциональная AP.



Вообразим ротор, целиком заполненный жидкостью, и обозначим через m массу системы, через b — проекцию ее центра тяжести B на плоскость xy и зададим положение G' в этой плоскости полярными координатами r, φ.

Пусть a — проекция точки A на плоскость xy, а ось x выбрана параллельной отрезку ba, имеющему постоянную длину e. Тогда координаты a будут

$$x_a = r \cos \varphi + e, \qquad y_a = r \sin \varphi$$

Если система жидкость-ротор находится в относительном равновесии r_0, φ_0, то свободная поверхность жидкости имеет формулу параболоида

$$z - \frac{\omega^2}{2g} (x^2 + y^2) = \alpha \qquad (1)$$

Потенциальная энергия системы имеет вид

$$U = mg\sqrt{l^2-(AP)^2} - \frac{\omega^2}{2}m(k^2+r^2) + \mu m\frac{(AP)^2}{2} -$$
$$-\int_D\left[gz - \frac{\omega^2}{2}(x^2+y^2)\right]dr, \qquad (AP)^2 = r^2+e^2+2re\cos\varphi$$

Здесь через k^2 обозначен центральный радиус инерции полного ротора относительно оси, параллельной оси z, через μm обозначена «жесткость пружины» F, а область D свободна от жидкости.

Если систему из положения равновесия перевести в близкое соседнее положение так, чтобы параболоид (1) переместился вдоль оси z на величину $\delta\sqrt{l^2-(AP)^2}$, то потенциальная энергия системы в этом положении будет меньше, чем потенциальная энергия системы при том же положении ротора и любом другом расположении жидкости внутри замкнутого цилиндра, совпадающего с полостью.

Действительно, переведем жидкость за параболоид MN (фигура)

$$z - \frac{\omega^2}{2g}(x^2+y^2) = \alpha - \delta\sqrt{l^2-(AP)^2} \tag{2}$$

Потенциальная энергия жидкости при этом может только увеличиться. Вариация потенциальной энергии при перемещении со свободной поверхностью (2) совпадает с вариацией функции

$$U_1 = m_1 g\sqrt{l^2-(AP)^2} - \frac{\omega^2}{2}m(k^2+r^2) + \mu m\frac{(AP)^2}{2}$$

где m_1 — действительная масса системы. Так как первая вариация этой функции необходимо должна уничтожаться, то r_0, φ_0 необходимо удовлетворяют уравнениям

$$\frac{\partial U_1}{\partial r} = \mu r_0 + \mu e\cos\varphi_0 - \nu g\frac{r_0+e\cos\varphi_0}{\sqrt{l^2-r_0^2-e^2-2r_0e\cos\varphi_0}} = 0$$
$$\frac{\partial U_1}{\partial\varphi} = r_0 e\sin\varphi_0\left[-\mu + \frac{\nu g}{\sqrt{l^2-r_0^2-e^2-2r_0e\cos\varphi_0}}\right] = 0 \qquad \left(\nu = \frac{m_2}{m}\right)$$

Второе уравнение допускает два решения $\varphi_0=0$, $\varphi_0=\pi$. Первое решение оставляет b на e ближе к оси z, чем a, а второе на e дальше. Решения r_0, полученные обращением в нуль квадратной скобки, сравнимы с l, и мы оставляем их в стороне. Решение первого уравнения, обращающееся в нуль вместе с e, ищем в виде ряда

$$r_0 = a_1e + a_2e^2 + \ldots$$
$$\mu r_0 \pm \mu e - \nu g\frac{r_0 \pm e}{\sqrt{l^2-r_0^2-e^2-2r_0e\cos\varphi}} - \omega^2 r_0 = 0$$

Ограничиваясь первым членом, получим

$$r_0 = \pm\left(\frac{\nu g/l - \mu}{\mu - \nu g/l - \omega^2}\right)e = a_1e$$

Решение $\varphi_0=0$ оказывается возможным, если $\nu g/l < \mu < \omega^2 + \nu g/l$, а решение $\varphi_0 = \pi$ возможно, если $\mu < \nu g/l$ или $\mu > \omega^2 + \nu g/l$.

Вторая вариация функции U_1 будет определенно положительна, если

$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial r^2} = \mu - \omega^2 - \nu g/l\left[1 - \frac{a_1e}{l} \pm \frac{e}{l}\right] + O_1(e) > 0$$
$$\frac{\partial^2 U_1}{\partial\varphi^2} = \pm a_1e^2\left[-\mu + g\nu/l\right] + O_2(e^2) > 0$$

где $O_1(e)$, $O_2(e^2)$ — величины высшего порядка малости, чем e и e^2. Оба эти неравенства выполняются для любых малых e, только при

$$\varphi_0 = \pi, \qquad \mu > \omega^2 + \nu g/l$$

При этих условиях движение будет устойчивым в смысле Ляпунова [2,3].

Поступила 17 V 1962

ЛИТЕРАТУРА

1. Четаев Н. Г. Устойчивость движения. ГТТИ, 1946.
2. Ляпунов А. М. Об устойчивости эллипсоидальных форм равновесия вращающейся жидкости. Собр. соч. т. 3, Изд-во АН СССР, 1959.
3. Румянцев В. В. Об устойчивости равновесия твердого тела, имеющего полости, наполненные жидкостью. ДАН СССР, 1959, т. 124, № 2.