

нагрузок (значения P_i в таблице). В зависимости от реализации той или иной формы выпучивания существенно меняются и продольные нагрузки при конечных прогибах системы. Целесообразно не только контролировать возмущения, возникающие в процессе эксперимента, но и, используя более точную модель, описывающую работу упругого основания, исключать теоретические неточности определения критических нагрузок.

Таким образом, удалось экспериментально обнаружить неустойчивое закритическое поведение деформируемой системы стержень — упругое основание при конечных прогибах. Для более полного описания экспериментальных результатов по локализации процесса выпучивания необходимо построение уточненной математической модели упомянутой системы, когда используются для описания работы упругого основания соотношения типа Власова — Леонтьева [6].

ЛИТЕРАТУРА

1. Твергорд В., Нидлман А. О явлении локализации выпучивания // Потеря устойчивости и выпучивание конструкций: теория и практика / Под ред. Дж. Томпсона и Дж. Ханта. — М.: Наука, 1991.
2. Потьер-Ферри М. Амплитудная модуляция, фазовая модуляция и локализация форм потери устойчивости // Там же.
3. Гузь А.Н. Механика разрушения композитных материалов при сжатии. — Киев: Наук. думка, 1990.
4. Тимошенко С.П. Устойчивость упругих систем. — М.; Л.: ОГИЗ, 1946.
5. Ясинский Ф.С. Избранные работы по устойчивости сжатых стержней. — М.; Л.: ГИТТЛ, 1952.
6. Власов В.З., Леонтьев Н.Н. Балки, плиты и оболочки на упругом основании. — М.: Физматгиз, 1960.
7. Астапов Н.С., Корнев В.М. Закритическое поведение идеального стержня на упругом основании // ПМТФ. — 1994. — № 2.
8. Вольмир А.С. Устойчивость деформируемых систем. — М.: Наука, 1967.
9. Алфутов Н.А. Основы расчета на устойчивость упругих систем. — М.: Машиностроение, 1991.
10. Томпсон Дж.М.Т. Неустойчивости и катастрофы в науке и технике. — М.: Мир, 1985.

г. Новосибирск

Поступила 16/VIII 1993 г.,
в окончательном варианте — 15/I 1994 г.

УДК 532.526.2

В.Д. Жесткая, В.М. Козин

ИССЛЕДОВАНИЯ НАПРЯЖЕННО-ДЕФОРМИРОВАННОГО СОСТОЯНИЯ ПОЛУБЕСКОНЕЧНОГО ЛЕДЯНОГО ПОКРОВА ПОД ДЕЙСТВИЕМ ДВИЖУЩЕЙСЯ НАГРУЗКИ

Вопросам изучения закономерностей поведения бесконечного ледяного покрова при движении по нему ограниченной в плане нагрузки посвящены работы [1—8] и др. Практический интерес к задаче исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) ледяного покрова при наличии свободной кромки, по которой перемещается система давлений с целью разрушения льда, появился сравнительно недавно. Это связано с тем, что на практике стал применяться резонансный метод разрушения льда, реализуемый при помощи амфибийных судов на воздушной подушке (СВП) [2].

В процессе опытов в модельных и натуральных условиях (рис. 1) было установлено значительное изменение ледокольных возможностей СВП при

© В.Д. Жесткая, В.М. Козин, 1994

наличии участка открытой воды и соответствующем маневрировании судов. Эксперименты показали, что при выполнении ледокольных работ в непосредственной близости от майны толщина разрушаемого льда увеличивается более чем в 2 раза. Однако все преимущества такой технологии проведения ледокольных работ и закономерности поведения льда под нагрузкой в таких условиях пока не выяснены.



Р и с. 1

В данной работе исследуется зависимость НДС полубесконечного ледяного покрова под действием движущегося СВП. Задача решается численным методом.

Постановка задачи и теоретическое решение. В качестве основной зависимости взято уравнение вязкоупругих колебаний льда под действием движущейся со скоростью v сосредоточенной силы P :

$$(1) \quad \frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_{\Phi} \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w + \rho_{\text{в}} g w + \rho_{\text{л}} h \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} + \rho_{\text{л}} \frac{\partial \Phi}{\partial t} \Big|_{z=0} = P \delta(x - vt, y - 0).$$

Здесь G — модуль упругости льда при сдвиге; h — толщина ледяного покрова; w — прогиб льда; $\rho_{\text{л}}$, $\rho_{\text{в}}$ — плотность льда и воды; g — ускорение силы тяжести; Φ — потенциал движения жидкости, удовлетворяющий граничным условиям и уравнению Лапласа; δ — дельта-функция; τ_{Φ} — время релаксации деформаций.

Оси координат x и y лежат в плоскости ледяной пластины, причем ось x направлена в сторону движения нагрузки, ось z — вверх.

Потенциал движения жидкости Φ подчиняется граничным условиям

$$(2) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=-H} = 0;$$

$$(3) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \frac{\partial \Phi}{\partial z} \Big|_{z=0} = 0$$

(H — глубина бассейна).

Получение численного решения облегчается, если исходные уравнения задачи предварительно подвергнуть некоторым преобразованиям.

Условию (2) удовлетворим, представив Φ в виде

$$(4) \quad \Phi = \varphi(x, y, t) \operatorname{ch} k(z + H), \quad k = \text{const.}$$

Подставив (4) в (3) и в уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \Phi}{\partial z^2} = 0,$$

получим

$$(5) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0;$$

$$(6) \quad \frac{\partial w}{\partial t} - \varphi k \operatorname{sh} k H = 0.$$

Переходя к подвижной системе координат $\xi = x - vt$, $\tau = t$, приведем уравнение (1) к виду

$$(7) \quad \frac{Gh^3}{3} \nabla^4 w + \tau_\Phi \frac{Gh^3}{3} \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \nabla^4 w + \rho_b g w + \rho_n h \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} + \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w + \rho_b \left(\frac{\partial \Phi}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial \Phi}{\partial \xi} \right) \Big|_{z=0} = P \delta(\xi, y = 0).$$

Представим w как $w = w_1 + w_2$, а Φ — как $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$, где w_1 и Φ_1 не зависят от τ . Тогда

$$(8) \quad \frac{Gh^3}{3} \nabla^4 w_1 - \tau_\Phi \nu \frac{Gh^3}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^4 w_1 + \rho_b g w_1 + \rho_n h \nu^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \rho_b \nu \frac{\partial \Phi_1}{\partial \xi} \Big|_{z=0} = \\ = P \delta(\xi, y = 0), \quad \frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_\Phi \left(\frac{\partial}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial}{\partial \xi} \right) \right) \nabla^4 w_2 + \rho_b g w_2 + \rho_n h \left(\frac{\partial^2}{\partial \tau^2} - \right. \\ \left. - 2\nu \frac{\partial^2}{\partial \tau \partial \xi} + \nu^2 \frac{\partial^2}{\partial \xi^2} \right) w_2 + \rho_b \left(\frac{\partial \Phi_2}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial \Phi_2}{\partial \xi} \right) \Big|_{z=0} = 0$$

или в старых переменных

$$(9) \quad \frac{Gh^3}{3} \left(1 + \tau_\Phi \frac{\partial}{\partial t} \right) \nabla^4 w_2 + \rho_b g w_2 + \rho_n h \frac{\partial^2 w_2}{\partial t^2} + \rho_b \frac{\partial \Phi_2}{\partial t} \Big|_{z=0} = 0.$$

Уравнение (8) описывает квазистационарную задачу, уравнение (9) — собственные колебания льда около поверхности, задаваемой уравнением (8), и в дальнейшем не рассматривается.

Уравнения (5), (6) после перехода к подвижной системе координат примут вид

$$(10) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + k^2 \varphi = 0;$$

$$(11) \quad \frac{\partial w}{\partial \tau} - \nu \frac{\partial w}{\partial \xi} - \varphi k \text{sh} k H = 0.$$

Учитывая, что $\Phi = \Phi_1 + \Phi_2$ (Φ_1 не зависит от τ), примем и

$$\varphi = \varphi_1(\xi, y) + \varphi_2(\xi, y, \tau).$$

Тогда для w_1 , φ_1 из уравнений (10), (11) получим

$$(12) \quad \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + k^2 \varphi_1 = 0;$$

$$(13) \quad \nu \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \varphi_1 k \text{sh} k H = 0.$$

Так как $\Phi_1 = \varphi_1(\xi, y) \text{ch} k(z + H)$, что следует из уравнения (4), то из (8), (12), (13) имеем

$$(14) \quad \frac{Gh^3}{3} \nabla^4 w_1 - \tau_\Phi \nu \frac{Gh^3}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^4 w_1 + \rho_b g w_1 + \rho_n h \nu^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} - \\ - \rho_b \nu \frac{\partial \varphi_1}{\partial \xi} \text{ch} k H = P \delta(\xi, y = 0), \\ \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial \xi^2} + \frac{\partial^2 \varphi_1}{\partial y^2} + k^2 \varphi_1 = 0, \quad \nu \frac{\partial w_1}{\partial \xi} + \varphi_1 k \text{sh} k H = 0.$$

Исключив из системы (14) φ_1 , приходим к уравнениям

$$(15) \quad \frac{Gh^3}{3} \nabla^4 w_1 + \tau_\Phi \nu \frac{Gh^3}{3} \frac{\partial}{\partial \xi} \nabla^4 w_1 + \rho_b g w_1 + (\rho_n h +$$

$$+ \frac{\rho_n}{k} \operatorname{cthkH} \left) \partial^2 \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^2} = P \delta(\xi, y = 0),$$

$$\frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi^3} + \frac{\partial^2 w_1}{\partial \xi \partial y^2} + k^2 \frac{\partial w_1}{\partial \xi} = 0.$$

Аналитическое решение системы уравнений (15) получить затруднительно, поэтому определение из нее w_1 целесообразно выполнить численным способом.

Для численного решения задачи выбран метод конечных элементов. Рассматривается ограниченная, но достаточно большая область ледового поля и примыкающей к нему чистой воды, на границах которой можно считать перемещения равными нулю. Размеры области назначаются при решении конкретной задачи. Для построения дискретной модели использован прямоугольный конечный элемент с 16 степенями свободы.

Представим w_1 в виде

$$(16) \quad w_1(\xi, y) = \sum_{i=1}^{16} N_i(\xi, y) q_i,$$

где $N_i(\xi, y)$ — функции формы; q_i — узловые перемещения.

Подставляя (16) в (15) и применяя метод Бубнова — Галеркина, приходим к системе уравнений

$$(17) \quad [K] \{q\} = \{P\}, ([T] - k^2 [S]) \{q\} = 0.$$

Здесь $\{q\}$ — вектор узловых перемещений; $\{P\}$ — вектор внешних нагрузок; $[K]$, $[T]$, $[S]$ — матрицы, формирующиеся из соответствующих матриц отдельных конечных элементов.

Представим $\{q\}$ как линейную комбинацию

$$(18) \quad \{q\} = \sum_{i=1}^n C_i \{q_i\},$$

где $\{q_i\}$ — собственный вектор матрицы $[T] - k^2 [S]$, отвечающий ее собственному значению k_i^2 ; n — число узловых перемещений.

Тогда

$$(19) \quad \sum_{i=1}^n [K]_i \{q_i\} C_i = \{P\}.$$

Здесь матрица $[K]_i$ отвечает собственному значению k_i^2 .

Определяя из системы (19) неизвестные постоянные C_i и подставляя их в (18), получим решение задачи.

Результаты исследований. С целью изучения зависимости НДС полубесконечного ледяного покрова от скорости судна и отстояния линии движения нагрузки от кромки льда была выполнена серия расчетов при разных значениях указанных параметров. Рассматривалось движение нагрузки $P = 0,4 \cdot 10^6 \text{ Н}$ со скоростями в диапазоне от 0 до 16 м/с. Отстояние линии движения судна от кромки льда варьировалось от 50 м в сторону ледяного поля до 50 м в сторону чистой воды.

Результаты расчетов показывают, что по мере роста скорости движения нагрузки от нуля прогибы и напряжения вначале уменьшаются по сравнению со статическими значениями. Это объясняется влиянием сил инерции воды. С развитием колебательного процесса, происходящим при дальнейшем росте скорости, прогибы и напряжения начинают увеличиваться и достигают максимальных значений при резонансной скорости нагрузки. Заметим, что аналогичное поведение параметров НДС было отмечено и в случае бесконечного ледяного покрова. Практически совпали и значения резонансных скоростей.

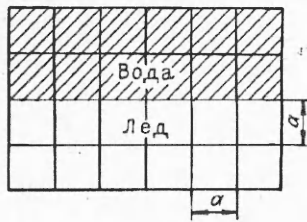


Рис. 2

Анализ влияния отстояния линии движения нагрузки от кромки льда позволил сделать следующие выводы. Как и надо было ожидать, при приближении нагрузки к кромке со стороны поля происходит возрастание w, σ_x, σ_y . При этом, если w и σ_x увеличиваются в 2—3 раза, то σ_y — в 7 раз. Последующий сход нагрузки с кромки льда и ее движение вдоль кромки по чистой воде приводят к дальнейшему росту w и σ_x и к уменьшению σ_y .

Это можно объяснить тем, что движение нагрузки вдоль кромки льда по чистой воде возбуждает чисто гравитационные волны. Водная среда более податлива, поэтому полная энергия этих волн оказывается больше энергии изгибно-гравитационных волн (ИГВ), возбуждаемых нагрузкой при движении по льду вдоль кромки. Гравитационные волны, проникая под ледяной покров, приводят к перераспределению реакций упругого основания и росту деформаций.

Рост прогибов и напряжений наблюдается до некоторого определенного значения отстояния линии движения нагрузки от кромки льда. При дальнейшем отдалении нагрузки происходит их асимптотическое убывание.

Расчеты были выполнены методом конечных элементов. Дискретная модель системы лед — вода показана на рис. 2, где $a = 50$ м. Как видно из рис. 2, рассматриваемая область имела форму прямоугольника 300×200 м и была разбита на 24 конечных элемента размером 50×50 м. Опыт предыдущих исследований дает основания утверждать, что при выбранном числе делений сетки и размерах конечного элемента полученные расчетом значения напряжений и перемещений достаточно достоверны.

Общее представление о характере НДС полубесконечного ледяного поля можно получить из рис. 3, где показаны пространственные эпюры w, σ_x, σ_y при толщине льда $h = 0,25$ м, глубине бассейна $H = 5$ м и скорости $v = 4$ м/с.

По результатам расчетов были построены графики зависимости максимального прогиба w_{\max} , максимальных напряжений $\sigma_{x\max}, \sigma_{y\max}$ от скорости v (рис. 4) и линии влияния нагрузки на прогибы и напряжения в середине кромки (рис. 5).

Выводы. Наличие свободной кромки, вдоль которой движется нагрузка, практически не сказывается на значениях резонансной скорости v_p , полученных для бесконечного ледяного покрова в условиях конечной глубины (для рассчитанного случая $v_p = 7,3$ м/с). Второй пик амплитуд и напряжений (см. рис. 4) при $v = 10$ м/с, так же как и в теории волнового сопротивления судна на чистой воде, существует лишь теоретически.

При разрушении ледяного покрова на большой площади наиболее эффективно движение СВП не по кромке льда, а по чистой воде на определенном расстоянии от нее (как видно из рис. 5, для рассчитанного случая оно составляет 12,5 м). Этот вывод следует из общего анализа НДС ледяного покрова [4]. Возникающие во льду от движущихся возмущений ИГВ имеют длинный фронт в направлении, перпендикулярном движению нагрузки, на гребнях которого за счет σ_x и происходит основное разрушение льда. Дополнительные виды разрушения (измельчение обломков, скалывание кромок и т.д.) происходят при трансформации ИГВ в местах разлома.

Если ставится задача расширить проложенный во льду канал, то СВП следует двигаться с резонансной скоростью по кромке ледяного поля. Напря-

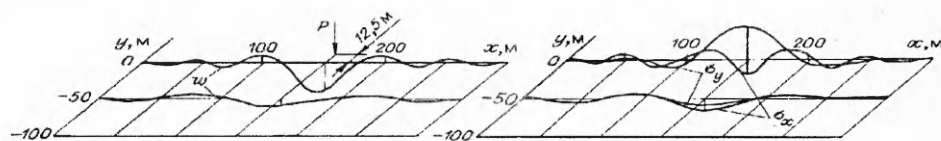
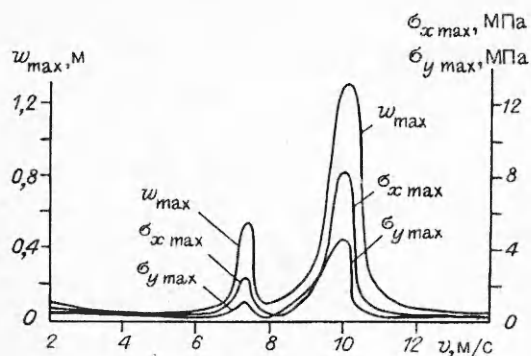
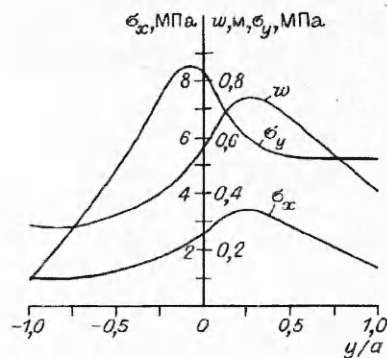


Рис. 3



Р и с. 4



Р и с. 5

жения σ_y при этом достигают максимальных значений, и расширение области разрушения происходит путем облома кромок канала.

ЛИТЕРАТУРА

1. Хейсин Д.Е. Динамика ледяного покрова. — Л.: Гидрометеиздат, 1967.
2. Зуев В.А., Козин В.М. Использование судов на воздушной подушке для разрушения ледяного покрова. — Владивосток: Изд-во Дальневост. ун-та, 1988.
3. Букатов А.Е., Черкесов Л.В. Влияние ледяного покрова на волновое движение // Морские гидрофизические исследования. — Севастополь: МГИ АН УССР, 1971. — № 2 (52). — С. 113—114.
4. Доценко С.Ф. Установившиеся гравитационно-упругие трехмерные волны от движущихся возмущений // Цунами и внутренние волны. — Севастополь: Изд-во АН УССР, 1976. — С. 144—155.
5. Иванов К.Е., Кобеко П.П., Шульман А.Р. Деформации ледового покрова при движении грузов // ЖТФ. — 1946. — Т. 16. — С. 257—262.
6. Bates H.F., Shapiro L.H. Stress amplification under a moving load on floating ice // J. Geophys. Res. — 1981. — V. 86, N 7. — P. 6638—6642.
7. Kozin V.M. Experimental investigation of ice breaking by a moving load // Pacific / Asia Offshore Mechanics Sympos. (PACOMS '90), Seoul, 1990. — P. 102—105.
8. Kozin V.M., Zhyostkaya V.D. The calculation of ice sheet stress-strain state by numerical method // 8th Intern. Offshore Mechanics and Arctic Engng Conf., Hague, 1989. — P. 19—23.

г. Комсомольск-на-Амуре

Поступила 29/X 1992 г.,
в окончательном варианте — 8/XII 1993 г.

УДК 539.375

М.А. Леган

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАЗРУШАЮЩЕЙ НАГРУЗКИ, МЕСТА И НАПРАВЛЕНИЯ РАЗРЫВА С ПОМОЩЬЮ ГРАДИЕНТНОГО ПОДХОДА

Представлены результаты исследования, целью которого было получить ответы на вопрос: где, в каком направлении и при какой нагрузке начнется разрушение при наличии концентрации напряжений? Для решения этого вопроса используется градиентное условие прочности. Рассматривается применение этого условия к задаче о растяжении пластины с эллиптическим отверстием, большая ось которого наклонена к оси растяжения. Полученные

© М.А. Леган, 1994