ПМТФ, № 1, 1971

ДВИЖЕНИЕ ПУЗЫРЯ В ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ

А. М. Головин, М. Ф. Иванов

(Москва)

Рассматривается стационарное обтекание вязкой жидкостью сферического пузыря при малых числах Рейнольдса R. Метод асимптотического сращивания [1] позволяет рассчитать силу сопротивления пузыря, которая хорошо согласуется с экспериментом в области $R < 5$. При допущении о больших числах Пекле вычислена скорость роста (растворения) пузыря.

Экспериментальные данные, представленные в обзоре Хабермана и Мортона [2], по скорости подъема одиночных пузырей в жидкостях показывают, что сила вязкого сопротивления, действующая па пузырь при малых числах Рейнольдса ($R \ll 1$), совпадает с силой Стокса для твердой сферы того же радиуса. По мнению В. Г. Левича [3], причина этого обстоятельства связана с адсорбцией поверхностно-активных веществ, приводящей к образованию неподвижной пленки на поверхности пузыря. По мере увеличения R наблюдается переход от силы сопротивления, определяемой формулой Стокса, к силе сопротивления Адамара — Рыбчинского [3], действующей на сферический пузырь со свободной поверхностью. Этот переход, как показывают экспериментальные данные [2], осуществляется в зависимости от свойств жидкости в довольно широком интервале чисел Рейнольдса от $R \approx 10^{-4}$ до $R \approx 20$.

Ниже предполагается, что при $R \ll 1$ происходит обтекание сферического пузыря со свободной поверхностью. Функция тока определяется уравнением [1]

$$D^4\psi = \frac{R}{r^2 \sin\theta}\left(\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\frac{\partial}{\partial r} - \frac{\partial\psi}{\partial r}\frac{\partial}{\partial\theta} + 2\operatorname{ctg}\theta\frac{\partial\psi}{\partial r} - \frac{2}{r}\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right)D^2\psi$$
$$\left(D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin\theta}{r^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}, \quad R = \frac{ua}{\nu}\right) \qquad (1)$$

Здесь r — расстояние от центра пузыря, деленное на его радиус a; θ — полярный угол, отсчитываемый от направления скорости натекающего потока $\mathbf{u}$; ν — кинематическая вязкость жидкости.

Граничные условия, выражающие обращение в нуль v_r-радиальной компоненты скорости и $\sigma_{r\theta}$-компоненты тензора напряжений на поверхности пузыря, а также условие равномерности натекающего потока, имеют вид

$$\frac{\partial\psi}{\partial\theta} = 0, \quad \frac{\partial^2\psi}{\partial\theta^2} - \frac{\partial^2\psi}{\partial r^2} + 2\frac{\partial\psi}{\partial r} = 0 \quad \text{при } r = 1 \qquad (2)$$
$$\psi \to {}^1/_2 r^2 \sin^2\theta \quad \text{при } r \to \infty$$

Будем искать решение в виде

$$\psi = \psi_0 + R\psi_1 + R^2\psi_2 + \ldots \qquad (R \ll 1)$$

Тогда, как следует из (1) и (2)

$$\psi_0 = {}^1/_2\, r\,(r-1)\sin^2\theta \tag{3}$$

$$D^4\psi_1 = -3r^{-2}(1-r^{-1})\sin^2\theta\cos\theta \tag{4}$$

Частное решение уравнения (4) имеет вид

$$\psi_1 = -\left[{}^1/_8 r\,(r-1) + a_5r^5 + a_3r^3 + a_0 + a_{-2}r^{-2}\right]\sin^2\theta\cos\theta$$

По принципу минимальной особенности [1] следует полагать $a_5 = a_3 = 0$. Действительно, если сохранить эти члены, то нельзя будет это решение срастить с внешним разложением функции тока.

Таким образом, общее решение уравнения (4), удовлетворяющее граничным условиям при $r = 1$ и при $r \to \infty$, возрастающее не быстрее чем r^2, имеет вид

$$\psi_1 = (A - {}^1/_8\cos\theta)\, r\,(r-1)\sin^2\theta \tag{5}$$

Здесь A — некоторая постоянная, определяемая из сращивания с внешним разложением.

Далее можно получить уравнение

$$D^4\psi_2 = P_1(r)Q_1(\theta) + P_2(r)Q_2(\theta) + P_3(r)Q_3(\theta) \tag{6}$$

$$\begin{pmatrix} Q_1(\theta) = \sin^2\theta, & Q_2(\theta) = \sin^2\theta\cos\theta \\ Q_3(\theta) = (5\cos^2\theta - 1)\sin^2\theta, & P_1(r) = {}^1/_5 r^{-1}(1 - {}^3/_2 r^{-1}) \end{pmatrix}$$

Следует заметить, что Q_i являются собственными функциями оператора D^2.

Решение уравнения (6) можно искать в виде

$$\psi_2 = f_1(r)Q_1(\theta) + f_2(r)Q_2(\theta) + f_3(r)Q_3(\theta)$$

Ограничимся определением функции $f_1(r)$

$$f_1(r) = a_3r^3 + a_2r^2 + a_1r + b_2r^2\ln r \tag{7}$$

Подстановка (7) в уравнение (6) позволяет определить коэффициенты, причем $b_2 = {}^1/_{20}$.

Как видно из формул (5) и (7), поправки к функции тока не удовлетворяют граничному условию на бесконечности. Причина этого обстоятельства, как известно [1], связана с тем, что отношение конвективных членов к вязким является величиной порядка Rr при $r \to \infty$. Хотя это отношение мало при $r \sim 1$, тем не менее на достаточно больших расстояниях конвективные члены в уравнении (1) не могут рассматриваться как малая поправка к уравнению Стокса.

Уравнения Озеена частично учитывают конвективные члены и правильно описывают поле скоростей на больших расстояниях [1]

$$\left(D^2 - \cos\theta\frac{\partial}{\partial\rho} + \frac{\sin\theta}{\rho}\frac{\partial}{\partial\theta}\right)D^2\Psi = 0 \tag{8}$$

$$\left(D^2 = \frac{\partial^2}{\partial\rho^2} + \frac{\sin\theta}{\rho^2}\frac{\partial}{\partial\theta}\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta},\quad \rho = Rr,\quad \Psi(\rho,\theta) = \psi\left(\frac{\rho}{R},\theta\right)\right)$$

Решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям на бесконечности и принципу минимальной особенности в начале координат, имеет вид

$$\Psi = \frac{\rho^2}{2R^2}\sin^2\theta - \frac{B}{R}(1+\cos\theta)\left\{1 - \exp\left[-\frac{\rho}{2}(1-\cos\theta)\right]\right\} \tag{9}$$

Здесь B — некоторая постоянная, которая определяется методом асимптотического сращивания.

Двучленное внешнее разложение (9), переписанное во внутренних переменных

$$\Psi = \frac{r^2}{2}\sin^2\theta - \frac{B}{R}(1+\cos\theta)\left\{1 - \exp\left[-\frac{Rr}{2}(1-\cos\theta)\right]\right\}$$

разложенное для малых R

$$\Psi = {}^1/_2\, r^2 \sin^2\theta - {}^1/_2\, Br \sin^2\theta$$

должно совпадать с одночленным внутренним разложением (3).

Следовательно, $B = 1$.

Двучленное внутреннее разложение (3), (5), записанное во внешних переменных

$$\psi = {}^1/_2\,(\rho / R)\,(\rho / R - 1)\,(1 + AR - {}^1/_4\, R\cos\theta)\,\sin^2\theta$$

разложенное для малых R

$$\psi = {}^1/_2\,(\rho / R)^2\,(1 - R / \rho + AR - {}^1/_4 R\cos\theta)\,\sin^2\theta$$

должно совпадать с двучленным внешним разложением (9), записанным с точностью до членов порядка R включительно

$$\Psi = {}^1/_2\, r^2\sin^2\theta - {}^1/_2 r\sin^2\theta + {}^1/_8 r^2 R\,(1-\cos\theta)\,\sin^2\theta$$

Отсюда следует, что $A = {}^1/_4$.

Таким образом, с точностью до членов порядка R функция тока вблизи поверхности пузыря имеет вид

$$\psi = {}^1/_2 r\,(r-1)\,[1 + {}^1/_4\, R\,(1-\cos\theta)]\,\sin^2\theta \tag{10}$$

Если следующую поправку к функции тока ψ_2 записать во внешних переменных, то среди прочих членов там будет содержаться член более высокого порядка

$$\psi_2 = -\frac{\rho^2 \ln R}{20R^2}\sin^2\theta \tag{11}$$

Известно [4], что если искать решение вдали от сферы в виде ряда по степеням R, принимая решение Озеена за нулевое приближение, то следующее приближение не содержит членов, которые сшиваются с функцией (11). Поэтому, чтобы ликвидировать этот член, внутреннее разложение следует дополнить членом вида

$$\psi = \psi_0 + R\psi_1 + {}^1/_{20} R^2 \ln R\; r\,(r-1)\sin^2\theta + \ldots$$

С точностью до членов порядка $R^2 \ln R$ функция тока вблизи поверхности пузыря имеет вид

$$\psi = {}^1/_2 r\,(r-1)\,[1 + {}^1/_4\, R\,(1-\cos\theta) + {}^1/_{10}\, R^2 \ln R] \sin^2\theta$$

Расчет силы сопротивления, испытываемой стационарно движущимся пузырем в жидкости, приводит к следующему результату:

$$F = 4\pi\mu a u\,(1 + {}^1/_4 R + {}^1/_{10} R^2 \ln R) \tag{12}$$

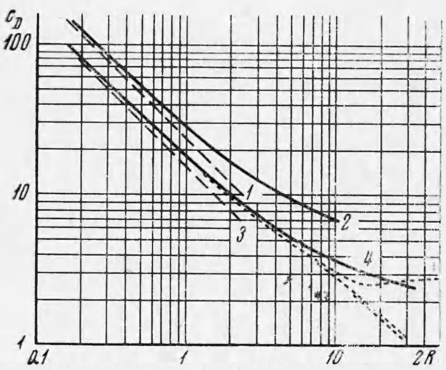
Здесь $\mu = \rho'\nu$ — динамическая вязкость жидкости.

Если ограничиться учетом первых двух членов в формуле (12), то зависимость коэффициента сопротивления c_D от R будет иметь вид

$$c_D = \frac{2F}{\pi\rho' a^2 u^2} = \frac{8}{R}\left(1 + \frac{1}{4} R\right) \tag{13}$$

Эта формула до $R \approx 5$ хорошо согласуется с экспериментальными данными [2], представленными на фигуре, где *1* — решение Стокса для твердой фазы, *2* — решение Стокса с поправкой Озеена, *3* — решение Адамара — Рыбчинского для сферы со свободной поверхностью, *4* — расчет по формуле (13). Экспериментальные кривые изображены точками.

Хотя в области $1.5 < R < 5$ формула Стокса также согласуется с экспериментальными данными, тем не менее соответствие с экспериментом формулы (13) по всей области $R < 5$ позволяет считать, что обтекание пузыря можно рассматривать как обтекание сферы со свободной поверхностью, а не как твердой сферической частицы. Различие в режимах обтекания, несущественное при определении скорости подъема пузыря в области $1.5 < R < 5$, оказывается важным при расчете скорости диффузионного роста или растворения пузыря.



Известно [3], что при стоксовском режиме обтекания при $ua \gg D (\nu \gg D)$ диффузионный поток к поверхности твердой сферы равен

$$I = 7.98\,(uD^2a^4)^{1/3}\,(c_\infty - c_a) \tag{14}$$

Здесь c_∞, c_a — концентрация газа вдали от пузыря и на его поверхности.

При обтекании сферы со свободной поверхностью аналогичный расчет с использованием формулы (10) позволяет получить

$$I = 5.79\,(uDa^3)^{1/2}\,(1 + {}^1/_4 R)^{1/2}\,(c_\infty - c_a) \tag{15}$$

При $R \to 0$ этот результат переходит в формулу Левича [3]. Для $R = 5$ поправка к первому члену разложения в ряд по степеням R составляет 50%

В формулу (15) можно подставить скорость стационарного подъема пузыря

$$u = \frac{1}{3}\frac{ga^2}{\nu}\frac{1}{1 + {}^1/_4 R} \tag{16}$$

Здесь g — ускорение свободного падения.

Тогда полный поток на поверхность пузыря будет иметь вид

$$I = 3.35\,(Da^5 g\,/\,\nu)^{1/2}\,(c_\infty - c_a) \tag{17}$$

Следует отметить, что сокращение множителя, зависящего от R в формуле (17), происходит и при учете следующего члена разложения функции тока в ряд по степеням R.

Известно [3], что скорость диффузионного роста (растворения) сферического пузыря при больших числах Рейнольдса ($\sqrt{R} \gg 1$) в отсутствие поверхностно-активных веществ также описывается формулой (17). Так что, по-видимому, эта формула пригодна по всей области безотрывного обтекания сферического пузыря.

Авторы благодарят В. Г. Левича за обсуждение результатов работы.

Поступила 23 IV 1970

ЛИТЕРАТУРА

1. Ван-Дайк М. Методы теории возмущений в механике жидкости. «Мир», 1967.
2. Haberman W. L., Morton R. K. An experimental study of bubbles moving in liquids. Proc. Amer. Soc. Civil Engineers, 1954, vol. 80, No. 1, Separate No. 387.
3. Левич В. Г. Физико-химическая гидродинамика. М., Физматгиз, 1959.
4. Proudman I., Pearson J. R. Expansions at small Reynolds Number for the flow past a sphere and circular cylinder. J. Fluid Mech., 1957, vol. 2, pt. 3, pp. 237—262.