РОССИЙСКАЯ АКАДЕМИЯ НАУК
СИБИРСКОЕ ОТДЕЛЕНИЕ
ФИЗИКО-ТЕХНИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ РАЗРАБОТКИ ПОЛЕЗНЫХ ИСКОПАЕМЫХ

2020 № 6

УДК 622.765, 531.011

ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ МИНЕРАЛЬНОЙ ЧАСТИЦЫ СО СВОБОДНЫМ ПУЗЫРЬКОМ ВОЗДУХА В ЖИДКОСТИ

С. А. Кондратьев[1], Н. П. Мошкин[1,2,3]

[1]*Институт горного дела им. Н. А. Чинакала СО РАН,*
E-mail: kondr@misd.nsc.ru, *Красный проспект, 54, 630091, г. Новосибирск, Россия*
[2]*Институт гидродинамики им. М. А. Лаврентьева СО РАН,*
E-mail: nikolay.moshkin@gmail.com, *просп. Лаврентьева, 15, 630090, г. Новосибирск, Россия*
[3]*Новосибирский государственный университет,*
ул. Пирогова, 1, 630090, г. Новосибирск, Россия

Изучается динамика тяжелой частицы, прикрепленной к поверхности свободного газового пузырька в жидкости. Совершающий поверхностные колебания пузырек и обладающая массой частица рассматриваются как единая механическая система с геометрической связью. Предполагается, что основные силы, обеспечивающие взаимодействие этих объектов, — инерционная сила, обусловленная поверхностными колебаниями пузырька газа, и сила капиллярного прилипания. Описаны условия стабильности флотационного агрегата “частица – пузырек” при различных начальных возмущениях поверхности пузырька и массах частицы. Амплитуды скоростей мод поверхностных колебаний определяются энергией турбулентных пульсаций окружающей жидкости.

Флотация, минеральная частица, пузырек газа, поверхностные колебания пузырька

DOI: 10.15372/FTPRPI20200611

Важный фактор, обусловливающий эффективность флотационного процесса, — размер минеральных частиц. Увеличение крупности извлекаемых пенной флотацией частиц может повысить извлечение полезного компонента и сократить расходы на процесс измельчения руды. Например, расширение диапазона крупности флотируемых частиц 0.1 – 0.3 мм может дать экономию 30 – 50 % энергии, затрачиваемой в наиболее энергоемком переделе обогащения — процессе измельчения [1]. Поэтому изучение взаимодействия минеральной частицы с пузырьком газа и определение условий стабильности флотационного агрегата в турбулентном потоке пульпы имеют важное практическое значение.

Поведение минеральной частицы на пузырьке рассматривается в исследованиях, посвященных условиям отрыва минеральной частицы от пузырька, имеющего недеформируемую сферическую поверхность [2, 3]. Согласно этим работам, разрушение флотационного агрегата происходит, если центробежные силы, действующие на частицу, превышают силы капиллярного прилипания. Центробежные силы обусловлены попаданием флотационного агрегата

Работа выполнена в рамках проекта НИР (№ гос. регистрации АААА-А17-117092750073-6).

в турбулентный вихрь с диаметром, равным сумме диаметров пузырька и частицы. В инерционном интервале спектра турбулентности вследствие измельчения крупных вихрей более вероятно существование турбулентных пульсаций, а не подобных вихрям структур. Авторы пренебрегают инерционной силой отрыва, генерируемой поверхностными колебаниями пузырька, поэтому предложенный ими механизм неадекватно отражает природу физического явления.

Взаимодействие минеральной частицы с пузырьком газа и стабильность флотационного агрегата "частица – пузырек" с учетом упругости поверхности последнего описаны в [4, 5]. Сохранность флотационного агрегата рассматривается в предположении попадания агрегата "частица – пузырек" в турбулентный вихрь с размером, соизмеримым с параметрами агрегата. На воздействие турбулентных вихрей пузырек отвечает колебаниями с частотой, равной частоте вихревого движения окружающей жидкости. Минеральная частица, находящаяся на границе раздела "газ – жидкость", совершает колебательное движение с соответствующей частотой. Амплитуда этих колебаний — функция скорости диссипации энергии в камере флотационной машины.

В работе не принималось во внимание, что пузырек и частица на пузырьке имеют собственные частоты колебаний, превышающие частоты пульсаций окружающей их жидкости. На пульсационное воздействие окружающей жидкости пузырек отвечает собственными поверхностными колебаниями, что приводит к колебаниям частицы на пузырьке. При наборе минеральной нагрузки в системе "жидкость – пузырек – частица" могут возникнуть резонансные явления, увеличивающие инерционную силу отрыва. По этим причинам предложенный в [4, 5] механизм взаимодействия минеральной частицы с пузырьком недостаточно описывает природу физического явления и не может корректно раскрыть условия разрушения флотационного агрегата.

В [6, 7] учитывается гибкость поверхности пузырька, рассматриваются его поверхностные колебания и колебания частички на поверхности пузырька. Для упрощения анализа в этих работах поверхность пузырька аппроксимируется плоскостью, что также приводит к снижению точности получаемых результатов. В [8] дополнительно к силам инерции, капиллярного прилипания и веса введены: сила Бассе; сила увлечения жидкости движущейся частицей; сила, обусловленная присоединенной массой частицы. Введение последней силы недостаточно обоснованно. Формирование флотационного агрегата подразумевает движение периметра контакта трех агрегатных состояний по поверхности частицы и его закрепление в наиболее устойчивом состоянии, т. е. на ребрах. На поверхности пузырька закрепляются гидрофобные частицы. Закрепившаяся частица одновременно погружена в окружающую жидкость и расположена в пузырьке газа. Увлечение жидкости движущейся частицей сомнительно, так как пульсирующее движение жидкости вокруг пузырька, совершающего поверхностные колебания, сохранится вне зависимости от наличия частицы. Большой объем гидрофобной частицы может находиться в объеме пузырька.

Цель настоящей работы — изучение поведения минеральной частицы, закрепленной на поверхности свободного газового пузырька в жидкости, и условий разрушения агрегата "частица – пузырек" в отсутствие поверхностно-активных веществ.

ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Собственные моды поверхностных колебаний свободного газового пузырька в невязкой жидкости впервые получены Рэлеем [9]. Закрепление минеральной частицы, обладающей определенной массой, на поверхности пузырька приведет к изменению характеристик поверхностных колебаний. Задача установления амплитуд и частот мод поверхностных колебаний пузырька с закрепленной на его поверхности минеральной частицей представляет практический интерес для флотационного способа обогащения, так как позволяет оценить достижимую крупность флотируемых частиц.

Предположим, что газовый пузырек флотационной крупности вместе с прикрепленной к нему частицей находится в неограниченном объеме невязкой несжимаемой жидкости. Уравнение поверхности пузырька в сферической системе координат, связанной с центром пузырька, записывается в виде $r = R + \eta(t,\mu)$, где R — невозмущенный радиус пузырька; $\mu = \cos(\Theta)$, угол Θ отсчитывается от верхней части вертикальной оси; $\eta(t,\mu)$ — возмущение поверхности, которое считается осесимметричным и малым. Возмущение $\eta(t,\mu)$ может быть представлено рядом по многочленам Лежандра $P_j(\mu)$ порядка j, $\eta(t,\mu) = \sum_{j=1}^{N} b_j(t) P_j(\mu).$

Коэффициенты $b_j(t), j = 1, ..., N$, можно рассматривать как обобщенные координаты поверхности пузырька. К поверхности пузырька при $\mu_0 = \mu(\Theta_0)$ прикреплена цилиндрическая частица массой $m_p = \pi r_0^2 h \rho_p$, плотностью ρ_p, радиусом r_0 и высотой h. Минеральная частица удерживается на поверхности капиллярной силой, приложенной вдоль линии трехфазного контакта и действующей по касательной к границе раздела фаз “жидкость – газ”. Частица закреплена в положении $\Theta_0 = 180°$ и может колебаться в радиальном направлении. На рис. 1 показана твердая частица, прикрепленная к границе раздела “газ – жидкость” и соответствующая пузырьку, имеющему бесконечно большой радиус.

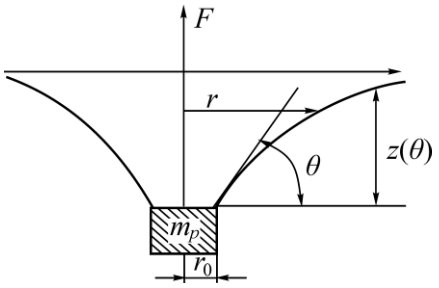

Рис. 1. Цилиндрическая частица массой $m_p = \pi r_0^2 h \rho_p$, плотностью ρ_p, радиусом r_0 и высотой h прикреплена к пузырьку с бесконечно большим радиусом: θ — трехфазный контактный угол; F — капиллярная сила; $z(\theta)$ — уравнение мениска

Примем следующие допущения [6]:

— $r_0 / a = o(1), h / a = o(1)$, здесь $a = \sqrt{\sigma / (\rho_f g)}$ — капиллярная постоянная; σ — поверхностное натяжение; ρ_f — плотность жидкости; g — гравитационное ускорение;

— поверхность пузырька “плоская” вблизи зоны контакта с частицей, т. е. радиус пузырька R больше радиуса минеральной частицы.

В этих предположениях, как показано в [10], поверхность мениска $z = z(\theta)$ описывается уравнением Лапласа. Квазистационарное выражение формы мениска

$$z(\theta) = K_0 r_0 \operatorname{tg}(\theta) \tag{1}$$

демонстрирует хорошее совпадение с экспериментами [11], где $K_0 = -\ln(r_0 / 2a) - \gamma$, $\gamma = 0.5772$ — постоянная Эйлера.

В каждый фиксированный момент времени положение частицы обусловливается “обобщенной” координатой $z(t) = b_{N+1}(t)$ (в системе координат, связанной с центром пузырька, положение частицы определяется как $r = R + z(t)$). В начальный момент положение частицы совпадает с поверхностью пузырька. В дальнейшем частица остается на поверхности пузырька и движется только по радиусу:

$$g(b_1, \ldots, b_N, b_{N+1}, t) = \sum_{j=1}^{N} b_j(t) P_j(\mu_0) - b_{N+1}(t) = 0. \qquad (2)$$

Уравнение (2) накладывает геометрическую зависимость между обобщенными координатами $b_j(t),\ j = 1, ..., N+1$, механической системы, состоящей из пузырька с частицей, прикрепленной в положении $\mu_0 = \cos(\Theta_0)$. Изучение поведения минеральной частицы предполагает получение уравнений динамики, которым подчиняются “обобщенные” координаты, и анализ решения этих дифференциальных уравнений с учетом размеров минеральной частицы, газового пузырька и начальных возмущений его поверхности. Динамические уравнения, описывающие движение механической системы “пузырек – частица” и возникающие в невязкой несжимаемой жидкости, получаются с помощью лагранжевой механики [12]. Сначала вычисляется потенциальная и кинетическая энергия системы. Первая состоит из двух компонентов:

— энергии, связанной с поверхностным натяжением и определяемой выражением $\sigma_{\Delta s}$, где Δs — изменение поверхностного натяжения в результате сокращения или растяжения поверхности пузырька. Согласно [13], потенциальная энергия, обусловленная силой упругости поверхности пузырька, выражается следующим образом:

$$U_f = 2\pi\sigma \sum_{j=2}^{N} \frac{j^2 + j - 2}{2j+1} b_j^2(t);$$

— потенциальной энергии осциллирующей частицы, связанной с капиллярной силой, которая действует подобно пружине: при удалении частицы от равновесного положения стремится возвратить частицу в исходное положение. Предположим, что на частицу действует только капиллярная сила: $F = 2\pi\sigma r_0 \sin\theta$ [6]. Потенциальная энергия частицы может быть представлена как функция контактного угла θ с использованием (1):

$$U_p = F \cdot z(\theta) = 2\pi\sigma r_0 \sin(\theta) \cdot z = 2\pi\sigma r_0^2 K_0 \sin(\theta) \cdot \mathrm{tg}(\theta) = 2\pi\sigma r_0^2 K_0 \frac{\mathrm{tg}^2(\theta)}{\sqrt{1 + \mathrm{tg}^2(\theta)}}.$$

Потенциальная энергия частицы, связанная с силой тяжести, может быть опущена ввиду ее малости. Кинетическая энергия безвихревого течения с потенциалом скорости ϕ может быть получена интегрированием $\rho_f \left(\nabla\phi\right)^2$ по всему объему жидкости вне пузырька. Согласно [13], кинетическая энергия выражается так:

$$T_f = 2\pi R^3 \rho_f \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(j+1)(2j+1)} \dot{b}$$

Точка над символами — производная по времени. Дифференцируя (1) по времени, найдем, что $z' = (\mathrm{tg}(\theta))' K_0 r_0$ (штрих обозначает дифференцирование). Кинетическая энергия частицы, совершающей колебательное движение, имеет вид

$$T_p = \frac{m_p (z')^2}{2} = \frac{m_p (\mathrm{tg}\theta)')^2}{2} K_0^2 r_0^2 .$$

Обозначив $y(t) = r_0 \mathrm{tg}(\theta(t)), \ (z(t) = K_0 y(t))$, получим

$$T_p = \frac{m_p K_0^2 (\dot{}}{2} \quad .$$

УРАВНЕНИЯ ЛАГРАНЖА

Лагранжиан агрегата “пузырек – частица” в терминах кинетической и потенциальной энергий $L = L_f + L_p = \left(T - U\right)_f + \left(T - U\right)_p$:

$$L_f = 2\pi R^3 \left[\rho_f \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{(j+1)(2j+1)} \dot{\imath} \quad \right] \quad \tau\sigma \sum_{j=2}^{N} \frac{j^2 + j - 2}{2j+1} b_j^2(t),$$

$$L_p = \frac{m_p K_0}{2} \dot{} \qquad {}_0 r_0 \frac{y^2}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} - m_p \left[\sum \ddot{} \quad \right] y K_0. \tag{3}$$

Последний член в (3) появляется, потому что частица привязана к движущейся поверхности пузырька, т. е. к подвижной неинерциальной системе координат. Сила тяжести и диссипация энергии в тепло не учитываются.

Найденный лагранжиан используется для записи уравнений Эйлера – Лагранжа [13]:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial \dot{\imath}} \quad \frac{\partial L}{} \quad \lambda \frac{\partial g}{\partial b_j}, \ j = 1, ..., N+1; \ g(b_1, \ldots, b_N, b_{N+1}, t) = 0 ,$$

здесь λ — множитель Лагранжа, позволяющий учитывать ограничение (2). В результате получается система нелинейных обыкновенных дифференциальных уравнений, состоящая из $N+2$ уравнений и $N+2$ неизвестных. Решение этой системы уравнений определяет колебания поверхности пузырька $b_j(t), j = 1, \ldots$ и движение частицы в терминах переменной $y(t)$ (применяя введенные обозначения, можно вернуться к z или θ):

$$4\pi R^3 \rho_f \frac{\ddot{}}{(j+1)(2j+1)} + 4\pi\sigma \frac{j^2 + j - 2}{2j+1} b_j(t) = \pm\lambda P_j(\mu_0); \quad j = 2, \ldots, N,$$

$$m_p K_0^2 \ddot{} \qquad K_0 r_0 \left(2 \frac{y}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} - \left(\frac{y}{\sqrt{r_0^2 + y^2}} \right)^3 \right) + m_p K_0 \left[\sum \ddot{} \quad \right] = \mp \tag{4}$$

$$\sum_{j=1}^{N} b_j(t) P_j(\mu_0) - K_0 y = 0, \ \left[-\sum_{j=1}^{N} b_j(t) P_j(\mu_0) + K_0 y = 0 \right].$$

Запишем систему уравнений (4) для безразмерных параметров:

$$t^* = t \sqrt{\frac{\sigma}{\rho_f R^3}}, \ b^* = \frac{b}{R}, \ y^* = \frac{y}{R}, \lambda^* = \frac{1}{4\pi} \frac{\lambda}{R\sigma},$$

здесь характерный период колебаний $(\rho_f R^3 / \sigma)^{1/2}$ используется в качестве масштаба времени. Уравнения, записанные в безразмерных переменных, имеют следующий вид:

$$\frac{\ddot{}}{(j+1)(2j+1)}+\frac{j^2+j-2}{2j+1}b_j(t)=\pm\lambda P_j(\mu_0);\quad j=1,2,\ldots,N,$$

$$\frac{K_0}{3}\frac{m_p}{m_{fl}}\ddot{}\quad\lambda\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2}+y^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2}+y^2}}\right)^3\right)+\frac{m_p}{m_{fl}}\frac{K_0}{3}\left[\sum\ddot{}\qquad\right]=\mp$$

$$\sum_{j=1}^{N}b_j(t)P_j(\mu_0)-K_0y=0,\left[-\sum_{j=1}^{N}b_j(t)P_j(\mu_0)+K_0y\right].$$

В уравнения входят три безразмерных параметра: K_0, m_p/m_{fl} — отношение массы частиц к массе жидкости в объеме пузырька; $m_{fl}=4/3\pi R^3\rho_{fl}$ и r_0/R — отношение радиуса частиц к радиусу пузырька.

Используя ограничение (2), из системы уравнений можно исключить λ:

$$\lambda=\frac{\frac{3}{2}\frac{m_{fl}}{m_p}\frac{r_0}{R}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2}+y^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2}+y^2}}\right)^3\right)-\sum_{j=1}^{N}(j+1)(j^2+j-2)b_jP_j}{\left(\sum_{j=1}^{N}(j+1)(2j+1)P_jP_j\right)+\frac{3}{2}\frac{m_{fl}}{m_p}}.$$

В результате получается система обыкновенных дифференциальных уравнений для векторов $b_j(t), j=1,\ldots,N$ и $y(t)$:

$$\ddot{}\qquad t)(j+1)(2j+1)P_j(\mu_0)-(j+1)(j^2+j-2)b_j,$$

$$\ddot{}\qquad \frac{\;}{2K_0}\frac{m_{fl}}{m_p}\lambda(t)-\frac{3}{2}\frac{1}{K_0}\frac{m_{fl}}{m_p}\frac{r_0}{R}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2}+y^2}}-\frac{1}{2}\left(\frac{y}{\sqrt{\frac{r_0^2}{R^2}+y^2}}\right)^3\right). \tag{5}$$

Решение системы обыкновенных дифференциальных уравнений (5) требует задание начальных данных для функций и их первых производных. Начальные данные должны соответствовать ограничению (2): частица находится на поверхности пузырька. В начальный момент можно задавать только b_j, $\dot{}$. Пусть исходные данные определяются следующим образом:

$$b_j(0)=b_{0j},\; y(0)=\frac{1}{K_0}\sum b_j(0)P_j(\mu_0),$$

$$\dot{}\qquad\dot{}\qquad\dot{}\qquad\frac{\;}{K_0}\sum\dot{}\qquad \tag{6}$$

Поведение пузырька и частицы полностью характеризуется уравнениями движения (5) с начальными условиями (6). Динамика формы пузырька и колебаний частицы получается из этих уравнений стандартным методом.

РЕЗУЛЬТАТЫ И ИХ ОБСУЖДЕНИЕ

Численное решение задачи (5), (6) для оценки колебаний частицы и возмущений поверхности пузырька проводилось с использованием стандартного метода Рунге – Куэтта 4-го порядка. Оценка зависимости результатов от количества членов ряда по полиномам Лежандра, проведенная для $N = 8, 12, 20$, показала, что достаточно применять $N = 8$. Расчеты проводились при параметрах, близких к реальным физическим размерам газового пузырька и флотируемой частицы в промышленных условиях: $R = 0.00052$ м, $\rho_p = 4500$ кг/м^3, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $\sigma = 0.072$ Н/м, $r_0 = 0.0001 - 0.00030$ м, $h = 1.5r_0 - 2.0r_0$.

Средняя скорость турбулентных пульсаций в инерционном интервале спектра турбулентности дается выражением

$$\overline{u}' = C(\varepsilon l)^{\frac{1}{3}}, \tag{7}$$

где C — постоянная, равная 1.37. При скорости диссипации энергии 15 м^2/с^3 и размере турбулентного образования 0.002 м средняя пульсационная скорость пространственно-изотропных пульсаций составит 0.43 м/с [14 – 16]. Распределение вероятности относительной скорости между двумя точками, разделенными расстоянием l, нормально. Тогда максимальная скорость пульсаций турбулентных образований масштаба 0.002 м может достигнуть ~ 0.8 м/с.

Скорость формирования флотационных агрегатов максимальна в области с высокой скоростью диссипации энергии [17 – 19]. Можно ожидать, что и разрушение образовавшихся агрегатов наиболее вероятно в областях с высокой скоростью рассеивания энергии. В связи с этим в нашем расчете скорость диссипации энергии выбрана 15 м^2/с^3.

Результаты расчетов приведены на рис. 2 – 5. На рис. 2 показаны колебания частицы вблизи положения равновесия $z = 0$ для двух различных начальных скоростей, которые задавались согласно (7) для производных от коэффициентов второй моды: $\dot{\imath}$ м/с, $\dot{\imath}$ м/с и $\dot{\imath}$ м/с, в уравнениях (6). Все остальные коэффициенты $b_{0j}, \dot{\imath}$ равнялись нулю. На рис. 2*а* изображены отклонения границы “жидкость – газ” от горизонтали в зависимости от времени. Сплошные линии, отмеченные кружками, соответствуют начальной скорости 0.1 м/с, пунктирные — начальной скорости 0.25 м/с, а сплошные — начальной скорости 0.5 м/с. Частица совершает колебательное движение по гармоническому закону. Максимальное отклонение от положения равновесия составляет 14 % от радиуса пузырька при начальной скорости 0.5 м/с, 6 % — при начальной скорости 0.25 м/с и 0.5 % — при меньшей скорости 0.1 м/с.

Используя уравнение (1), можно получить зависимость от времени угла θ, $\theta(t) = \operatorname{arctg}(z(t)/(K_0 r_0))$ (рис. 2*б*). Для заданных параметров расчета максимальное отклонение угла θ от горизонтали составляет около $40°$ при начальной скорости 0.5 м/с, $18°$ — 0.25 м/с и $6°$ — 0.1 м/с.

На рис. 3 демонстрируются колебания частицы цилиндрической формы, прогнозируемые для трех различных плотностей цилиндра: $\rho_p = 3000$ кг/м^3 (сплошная линия с кружками), $\rho_p = 4500$ кг/м^3 (пунктирная линия) и $\rho_p = 6000$ кг/м^3 (сплошная линия). С ростом массы частицы наблюдается увеличение амплитуды колебаний, возрастание максимума отклонение угла θ линии “жидкость – газ” от горизонтали и небольшой фазовый сдвиг.

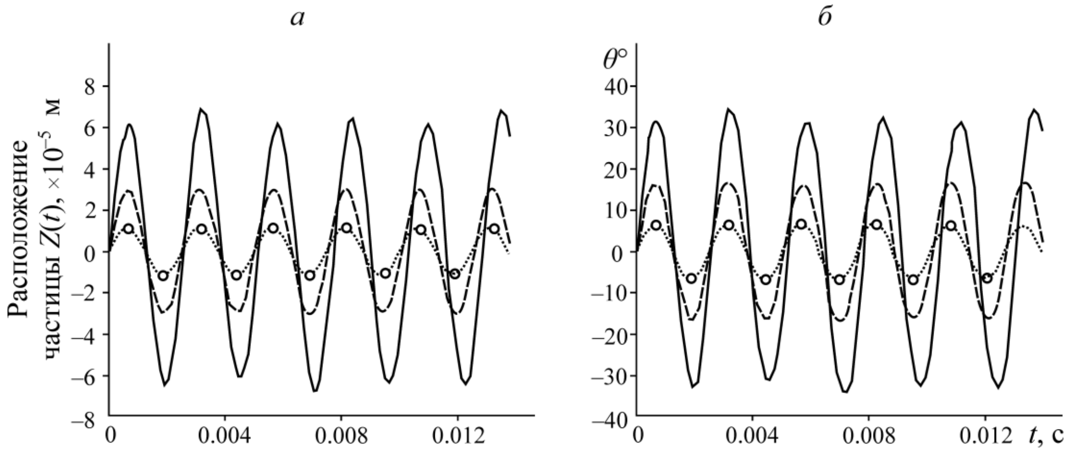

Рис. 2. Колебания частицы около $z = 0$ как функция времени: *а* — отклонение частицы от радиуса покоящегося пузырька ($M_p = 2.1206e-08$, $M_{fl} = 5.8898e-07$, $r_0 / R = 0.19231$); *б* — отклонение контактного угла θ от горизонтали в зависимости от времени ($r_0 = 100$ мкм, $h = 150$ мкм, $R = 0.00052$ м, $\rho_p = 4500$ кг/м^3, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $\sigma = 0.072$ Н/м, $\dot{\imath}$ .25; 0.5 м/с)

На рис. 2, 3*а* показаны результаты, полученные только для возмущений второй моды $b_2(t)$ в начальный момент времени. Для оценки взаимодействия между различными модами на рис. 3*б* представлены результаты вычислений для начальных возмущений второй, третьей и четвертой мод ($j = 2, 3, 4$): $\dot{\imath}$ м/с, $\dot{\imath}$ м/с, $\dot{\imath}$ м/с. Начальная скорость частицы составляла 0.2 м/с, $R = 0.0008$ м, частица имела кубическую структуру $h = 2r_0$. Остальные параметры идентичны рис. 2. Колебания частицы нелинейные, и наблюдается появление биений.

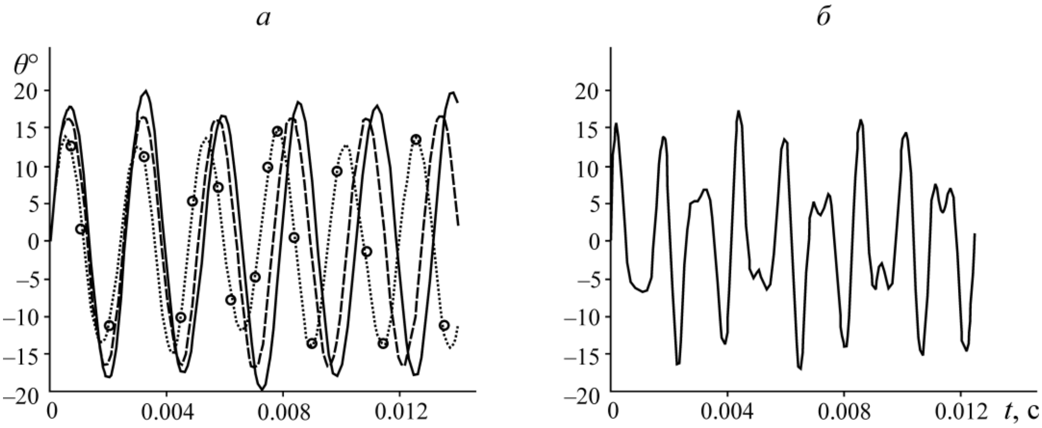

Рис. 3. Отклонение контактного угла θ от горизонтали в зависимости от времени для трех плотностей частицы: $\rho_p = 3000$; 4500; 6000 кг/м^3, обозначенных сплошной с кружками, пунктирной и сплошной линиями соответственно: $r_0 = 100$ мкм/м, $h = 150$ мкм, $R = 0.00052$ м, $\rho_f = 1000$ кг/м^3, $\sigma = 0.072$ Н/м, $\dot{\imath}$ м/с (*а*); колебания минеральной частицы в случае начального возмущения второй, третьей и четвертой мод: $\dot{\imath}$ м/с, $\dot{\imath}$ м/с, $\dot{\imath}$ м/с, $R = 0.0008$ м, $r_0 = 100$ мкм, $h = 200$ мкм (*б*)

На рис. 4 приводятся профили поверхности пузырька с закрепленной на ней частицей в моменты времени. Начальная скорость частицы 0.25 м/с распределена по трем модам в соотношении 0.7; 0.2; 0.1 для мод 2, 3 и 4 соответственно. Из рисунка следует, что минеральная частица деформирует поверхность пузырька и имеет большие амплитуды.

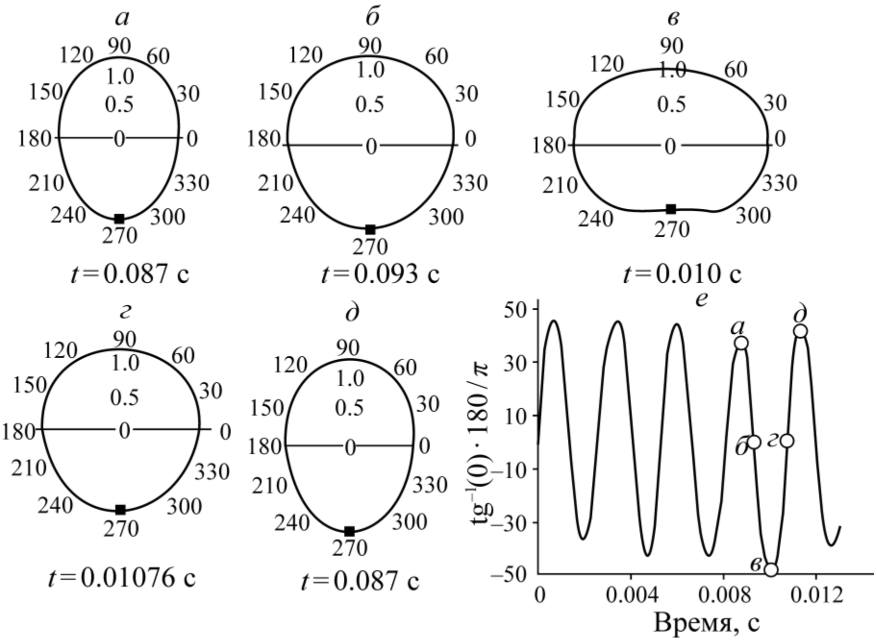

Рис. 4. Поверхностные колебания свободного газового пузырька в жидкости, содержащего на своей поверхности минеральную частицу, в зависимости от времени (*а*–*д*), показанного на *е*. Радиус пузырька 0.00052 м; частица цилиндрической формы с радиусом 0.0001 м и высотой 0.00015 м; плотность частицы $4.5 \cdot 10^3$ кг/м^3

На рис. 5 показан контактный угол на поверхности основания цилиндрической частицы в зависимости от начальной скорости ее колебаний и крупности, которая определяется ее радиусом r_0 и высотой h. Расчеты проведены для $R = 8 \cdot 10^{-4}$ м; $r_0 = 1.0 \cdot 10^{-4} - 3.0 \cdot 10^{-4}$ м; $h = 2r_0$, начальная скорость частицы устанавливалась возмущением только второй моды и изменялась в пределах $\dot{i}$ 0.8 м/с. Плотности частицы и жидкости, коэффициент поверхностного натяжения соответствовали расчетам, представленным на рис. 2. Размеры флотируемой частицы ограничены отношением массы частицы к массе жидкости в объеме пузырька m_p / m_{fl} и отношением радиуса частиц к радиусу пузырька.

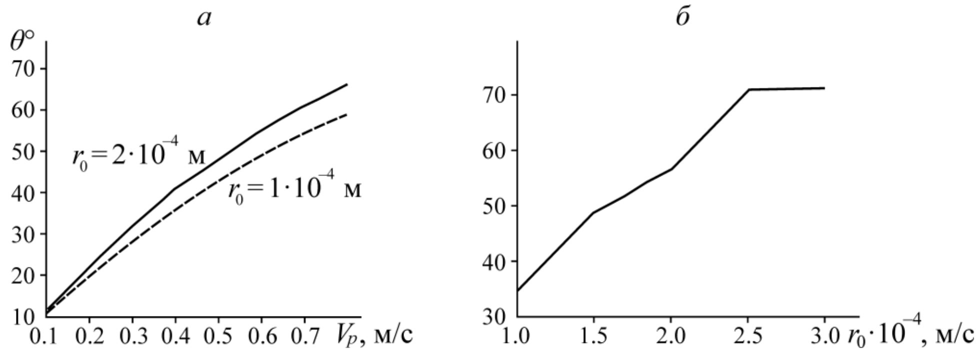

Рис. 5. Максимум контактного угла θ : *а* — в зависимости от начальной скорости частицы; *б* — от размеров частицы, $\dot{i}$ м/с

Если гидрофобность поверхности частицы можно характеризовать динамическим контактным углом в 60°, то при начальной скорости частицы 0.8 м/с контактный угол достигнет этой величины для частицы цилиндрической формы с радиусом $r_0 = 2\cdot 10^{-4}$ м. При таком отклонении произойдет смыкание периметра трехфазного контакта и отрыв частицы от пузырька.

На рис. 5*б* показан контактный угол в зависимости от размеров частицы. Видно, что при размерах ~ 250 мкм угол отклонения границы раздела “газ – жидкость” от горизонта в точке, принадлежащей периметру трехфазного контакта, достигнет наступающего динамического угла $> 60°$. Произойдет разрушение агрегата “частица – пузырек”.

ВЫВОДЫ

Во время колебаний частицы на поверхности пузырька, совершающего поверхностные колебания, контактный угол изменяется в широких пределах, что предполагает устойчивое закрепление периметра трехфазного контакта на ребрах частицы.

При достижении контактным углом величины наступающего динамического контактного угла возможно смыкание линии смачивания на минеральной поверхности и отрыв частицы от пузырька. Крупность флотируемых частиц, гидрофобность поверхности которых можно характеризовать наступающим контактным углом 60°, составляет ~ 250 мкм.

Возбуждение различных мод поверхностных колебаний пузырька приводит к нелинейным колебаниям частицы и появлению биений с увеличенными амплитудами наступающего контактного угла.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. **Tabosa E., Runge K., and Duffy K.-A.** Strategies for increasing coarse particle flotation in conventional flotation cells, Proc. 6th Int. Flotation Conf. Cape Town, South Africa, 2013.
2. **Goel S. and Jameson G. J.** Detachment of particles from bubbles in an agitated vessel, Miner. Eng., 2012, Vol. 36 – 38. — P. 324 – 330.
3. **Nguyen A. V., An-Vo D.-A., Tran-Cong T., and Evans G. M.** A review of stochastic description of the turbulence effect on bubble-particle interactions in flotation, Int. J. Miner. Proc., 2016, Vol. 156. — P. 75 – 86.
4. **Pyke B., Fornasiero D., and Ralston J.** Bubble particle heterocoagulation under turbulent conditions, J. Colloid Interface Sci., 2003, Vol. 265. — P. 141 – 151.
5. **Nguyen A.** New method and equations for determining attachment tenacity and particle size limit in flotation, Int. J. Miner. Proc., 2003, Vol. 68. — P. 167 – 182.
6. **Kondrat’ev S. A. and Izotov A. S.** Influence of bubble oscillations on the strength of particle adhesion, with an accounting for the physical and chemical conditions of flotation, J. Min. Sci., 1998, Vol. 34. — P. 459 – 465.
7. **Kondrat’ev S. A. and Izotov A. S.** Interaction of a “gas–liquid” phase interface with a mineral particle, J. Min. Sci., 1999, Vol. 35, No. 4. — P. 439 – 444.
8. **Stevenson P., Ata S., and Evans G. M.** The Behavior of an oscillating particle attached to a gas-liquid surface, Ind. Eng. Chem. Res., 2009, Vol. 48. — P. 8024 – 8029.
9. **Rayleigh L.** On the Capillary Phenomena of Jets. Proc. R. Soc. London, 1879, Vol. 29. — P. 71 – 97.
10. **Deryagin B. V.** Theory of distortions of the plane surface of a liquid by small objects and its application to measurement of edge wetting angles of thin films of filaments and fibers, Dokl. Akad. Nauk. SSSR, 1946, Vol. 51, No. 7. — P. 517 – 520.

11. **Tovbin M. V., Chesha I. I., and Dukhin S. S.** Investigation of properties of surface layer of liquids by the floating drop method, Kolloidn. Zh., 1970., Vol. 32, No. 5. — P. 771 – 777.
12. **Ланцош К.** Вариационные принципы механики / Пер. с англ. — М.: Мир, 1965. — 408 с.
13. **Vejrazka Jiri, Vobecka Lucie, and Tihon Jaroslav.** Linear oscillations of a supported bubble or drop, Phys. Fluids, 2013, Vol. 25. — 062102.
14. **Снегирев А. Ю.** Высокопроизводительные вычисления в технической физике. Численное моделирование турбулентных течений. — СПб.: Изд-во политехн. ун-та, 2009. — С. 143.
15. **Liepe F. and Mockel H. O.** Studies of combination of substances in liquid-phase 6, influence of turbulence on mass-transfer of suspended particles, Chem. Technol., 1976, Vol. 28. — P. 205 – 209.
16. **Andersson R. and Andersson B.** On the breakup of fluid particles in turbulent flows, Am. Inst. Chem. Eng. J., 2006, Vol. 52, No. 6. — P. 2020 – 2030.
17. **Schubert H. and Bischofberger C.** On the microprocesses air dispersion and particle-bubble attachment in flotation machines as well as consequences for the scale-up of macroprocesses, Int. J. Miner. Proc., 1998, Vol. 52, No. 4. — P. 245 – 259.
18. **Schubert H.** Nanobubbles, hydrophobic effect, heterocoagulation and hydrodynamics in flotation, Int. J. Miner. Proc., 2005, Vol. 78, No. 1. — P. 11 – 21.
19. **Rodrigues W. J., Leal Filho L. S., and Masini E. A.** Hydrodynamic dimensionless parameters and their influence on flotation performance of coarse particles, Miner. Eng., 2001, Vol. 14, No. 9. — P. 1047 – 1054.

Поступила в редакцию 28/IX 2020
После доработки 22/X 2020
Принята к публикации 03/XI 2020